

Структура исследования. Решение модельной задачи (на материале математики). Особенности учебного исследования.

Кандидат физико-математических наук, доцент
Сибирского федерального университета

Оксана Витальевна Знаменская

13 декабря 2010

□ Что такое исследование?

Исследование – это творческая деятельность по изучению объекта, процесса или явления с определенной целью, но с заранее неизвестным результатом

- ✓ Основным критерием **научно-исследовательской** работы является получение **объективно новых знаний**.
- ✓ В случае **учебного исследования** речь может идти о **субъективно новых, но самостоятельно добытых знаниях**.

В учебно-исследовательских работах следует учитывать фактор доступности информации. Прямое воспроизведение хорошо известных фактов или методов исследованием не считается.

Этапы исследования

- 1. Формулирование исследовательского вопроса или проблемы.**
- 2. Подбор материала для исследования. Формулирование гипотез и проверка их правдоподобности.**
- 3. Обоснование гипотез.**
- 4. Изложение результатов исследования в канонической форме для применения и для обсуждения в научном сообществе.**
- 5. Практическое применение результатов исследования.**

Этапы научного исследования выделяют с учетом специфики научной области. Перечень этапов может несколько отличаться для гуманитарного, естественнонаучного и математического исследования.

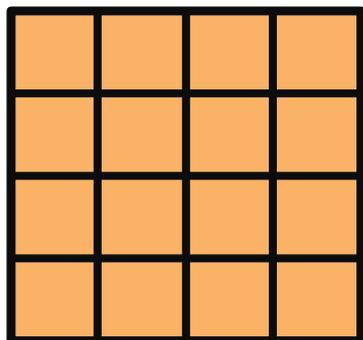
Результаты научного исследования оформляют в виде научной статьи

Во всем мире научные статьи пишут по определенным канонам, выработанным многими поколениями учёных. Это необходимо, чтобы разные люди без дополнительных усилий понимали друг друга.

Любая научная статья преследует **одновременно две цели:**

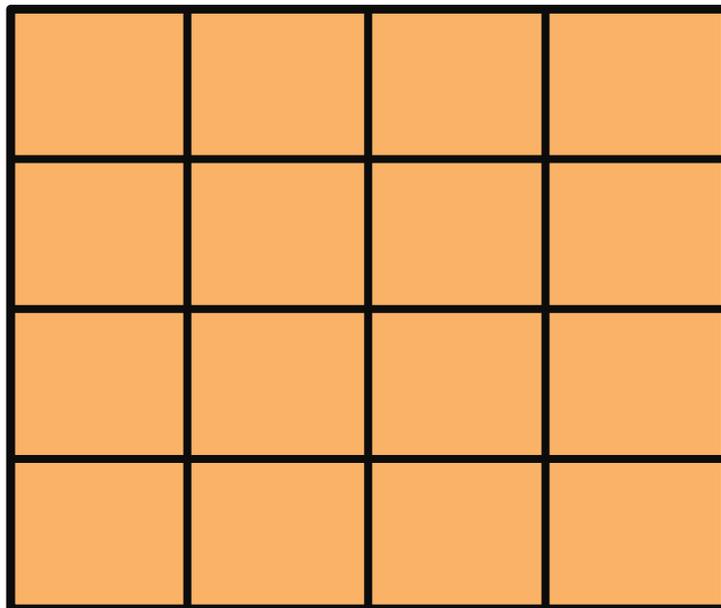
- ✓ донести основные идеи автора до широкой аудитории так, чтобы неспециалисты в данной узкой теме смогли **понять основные идеи, затратив на это минимум времени;**
- ✓ представить детальное изложение полученных результатов так, чтобы небольшое число узких специалистов смогли их **понять, перепроверить, развить и применить.**

Дело о квадратах



Или история жизни одной
исследовательской задачи

**Задача. Сколько квадратов
изображено на рисунке?**



□ Ответ: 30 квадратов

□ Как правильно считать квадраты?

□ Как правильно считать квадраты?



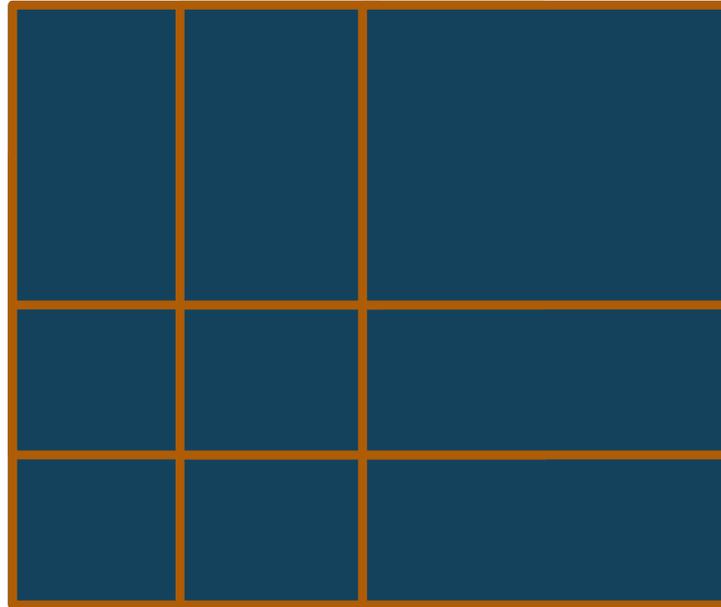
Квадратов со стороной 4 клеточки - один

□ Как правильно считать квадраты?



Квадратов со стороной 3 клеточки - четыре

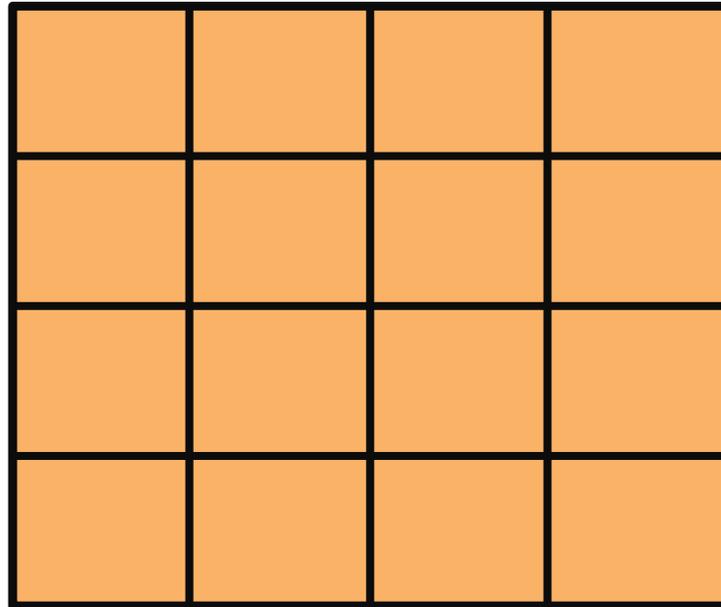
□ Как правильно считать квадраты?



Квадратов со стороной 2 клеточки - девять

Квадратов со стороной 1 клеточка - шестнадцать

□ Как правильно считать квадраты?

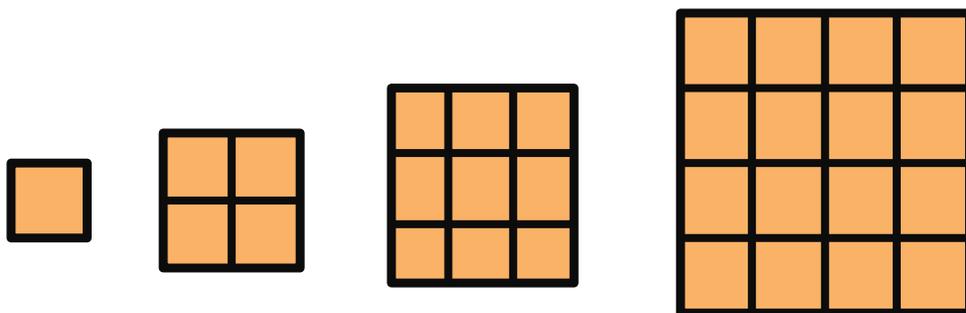
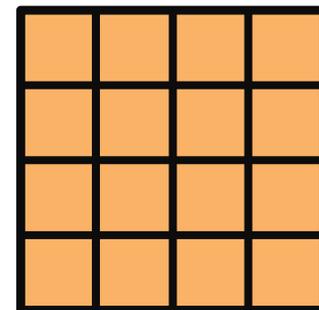


$$1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

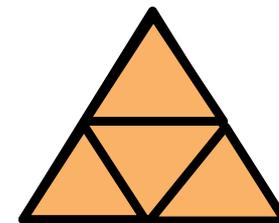
Ответ: 30 квадратов

Пора задать исследовательский вопрос!

□ Что сохранится, а что изменится, если разбить квадрат на другое количество квадратиков?



□ Что сохранится, а что изменится, если квадрат заменить на треугольник, ромб или другую фигуру (и сколько их может быть)?



□ Каков оптимальный способ подсчета квадратов?

□ Как получить ответ не пересчитывая каждый раз квадраты (как получить формулу для количества квадратов)?

Для задачи о квадратах

- Что сохранится, а что изменится, если разбить квадрат на другое количество квадратиков?
- Что сохранится, а что изменится, если квадрат заменить на треугольник, ромб или другую фигуру (и сколько их может быть)?
- Каков оптимальный способ подсчета квадратов?
- Как получить ответ, не пересчитывая каждый раз квадраты (как получить формулу для количества квадратов)?

исследование
объекта

исследование
способа
(метода)

На языке

«объект – предмет»

□ Как описать весь класс объектов с теми же свойствами?

- Какие есть аналогичные объекты с теми же свойствами?
- В чем уникальность этого объекта?

□ Возможен ли красивый способ описания класса объектов и его свойств?

Исследовательское отношение к задаче

На языке задачи

□ Как решать все подобные задачи?

- Какие задачи аналогичны (подобны) этой?
- В чем уникальность (особенность) этой задачи?

□ Возможно ли более красивое решение подобных задач?

На языке «объект – предмет»

□ Как описать весь класс объектов с теми же свойствами?

- Какие есть аналогичные объекты с теми же свойствами?
- В чем уникальность этого объекта?

□ Возможен ли красивый способ описания класса объектов и его свойств?



исследование
объекта

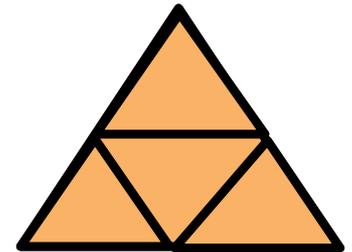
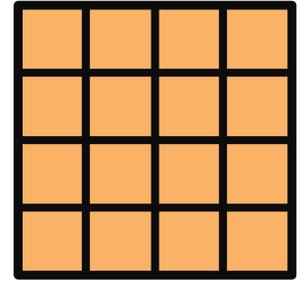


исследование
способа
(метода)

Аналогия

Анало́гия (др.-греч. ἀναλογία — соответствие, сходство) — подобие, сходство предметов (явлений, процессов) в каких-либо свойствах, а также познание путём сравнения.

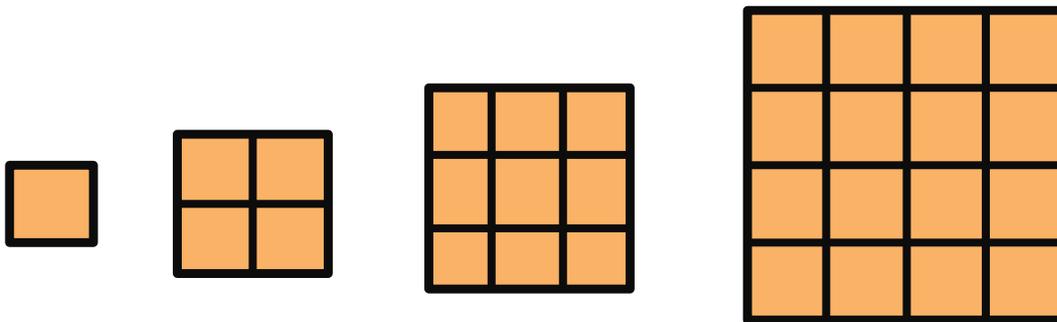
□ *Что сохранится, а что изменится, если квадрат заменить на треугольник, ромб или другую фигуру (и сколько их может быть)?*



«Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями, лучший математик — тот, кто устанавливает аналогии доказательств, более сильный математик — тот, кто замечает аналогии теорий; но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии». **Стефан Банах**

Наблюдение и обобщение

□ Что сохранится, а что изменится, если разбить квадрат на другое количество квадратов?



$$\begin{aligned}1 \\ 1 + 4 = 5 \\ 1 + 4 + 9 = 14 \\ 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \\ 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1^2 = 1 \\ 1^2 + 2^2 = 5 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55\end{aligned}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = ?$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = ?$$

проще

Если формула для суммы нам известна (из книг или от учителя), то доказываем ее.

Для этого обычно используется метод математической индукции

полезнее

Если мы пока не знаем, чему равна эта сумма, то **возникает задача каким-то образом догадаться, какой вид имеет выражение для суммы.**

- Иногда может помочь **метод наблюдения и обобщения** (ищем закономерность в образовании чисел 1, 5, 14, 30, 55).
- Иногда может помочь **метод аналогии** (суммы каких последовательностей нам уже известны, в чем особенность формул).

Метод аналогии. Гипотеза

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = ?$$

Если мы пока не знаем, чему равна эта сумма, то **возникает задача каким-то образом догадаться, какой вид имеет выражение для суммы.**

Рассмотрим формулы для сумм:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)= n^2$$

$$1+2+3+4+5+\dots+ n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

Заметим, что справа – многочлен второй степени от n . Слева n всегда стоит в первой степени.

Гипотеза: В нашем случае справа от знака равенства тоже будет многочлен. У него будет степень 3.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$$

Задача: Найти a, b, c, d .

Моделирование

Гипотеза: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$

Задача: Найти a, b, c, d .

Модель этой задачи на языке функциональных зависимостей

Дано:

$$f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 5$$

$$f(3) = 14$$

$$f(4) = 30$$

$$f(5) = 55$$

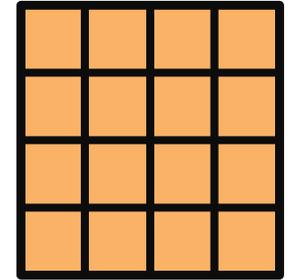
Найти: a, b, c, d

Способ решения хорошо известен из школьной программы.

Ответ: $a=1/3, b=1/2, c=1/6, d=0$.

Моделирование — построение вспомогательной системы (модели), отражающей существенные характеристики объектов, процессов или явлений с целью их изучения и предсказания поведения.

Пора задать вопросы на понимание (рефлексивные вопросы)!



□ *Решена ли задача?*

Некоторые задачи в цепочке задач решены.

□ *Какая задача решена?*

Доказана Теорема: Пусть квадрат образован из $n \times n$ квадратиков. Тогда общее число квадратов на рисунке вычисляется по формуле $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = 1/3n^3 + 1/2n^2 + 1/6n$.

□ *Получены ли ответы на все вопросы?*

Точно остались без ответа вопросы:

1. Что будет, если рассматривать не квадраты, а треугольники?
2. Можно ли применить наш метод поиска суммы к суммам другого типа? Останется ли справедливой гипотеза? Будут ли ограничения? (задача на исследование метода)

□ *Какая исследовательская задача решалась?*

У исследовательской задачи **не бывает формулировки**, она определяется через описание проблемы, объекта, предмета, целей, задач и методов исследования.

Как описать исследовательскую задачу?

У исследовательской задачи **не бывает формулировки**, она определяется **через описание проблемы, объекта, предмета, целей, задач и методов исследования.**

Объект и предмет исследования

Объект исследования (способ, явление, процесс, система) – ответ на вопрос **«Что рассматривается?»**

Предмет исследования (свойство объекта, избранное для изучения) – ответ на вопрос **«какие аспекты и функции объекта выделяются для изучения?»**

Для нас объект – фигура из квадратов (квадрат, составленный из квадратиков), предмет – комбинаторные характеристики этой фигуры (количество квадратиков в системе)

Как описать исследовательскую задачу?

□ Цель исследования отражает проблему исследования.

Цель – ответ на вопрос: «**Какой результат предполагает получить исследователь? Каким видится этот результат еще до его получения?**»

Для нас целью исследования было получение формулы для вычисления количества квадратиков в фигуре произвольного размера.

□ Задачи исследования конкретизируют цель.

Задачи – ответ на вопрос «**Что нужно сделать для достижения цели?**»

Мы решали следующие задачи:

1. Выявление и моделирование на алгебраическом языке зависимости количества квадратов от размеров фигуры.
2. Поиск и обоснование формулы для количества квадратов.
3. Формулирование результатов исследования в виде определений и теорем.

Как описать исследовательскую задачу?

□ **Гипотеза исследования** – это то, что вы предполагаете и намерены проверить в начале или в ходе исследования.

Гипотеза по форме может формулироваться как теорема. Гипотеза – это правдоподобное утверждение, истинность которого вы пытаетесь доказать или опровергнуть. Теорема – это доказанная гипотеза.

Мы сформулировали гипотезу о виде формулы для подсчета квадратов в фигуре. В ходе исследования были и другие гипотезы.

□ **Методы исследования** – ответ на вопрос «Какого типа рассуждение или действие помогло осуществить исследование?» Выделяют общенаучные (наблюдение, эксперимент, индукция, аналогия, обобщение, моделирование, др) и частнопредметные методы исследования.

Мы использовали следующие методы:

1. Наблюдение, аналогия, обобщение, моделирование.
2. Метод математической индукции, метод решения системы линейных уравнений с 4 неизвестными.

Как описать исследовательскую задачу?

□ **Проблема исследования выражается в наличии некоторого противоречия, отсутствия знания при необходимости в нем, отсутствии средств или способов деятельности.**

Проблема может быть объективной и субъективной (способ неизвестен никому из математиков или способ неизвестен нам, школьникам).

Наша проблема заключалась в отсутствии (у нас) готовых формул для вычисления комбинаторных характеристик некоторых фигур при необходимости их вычисления.

□ **Актуальность и значимость исследования – ответ на вопрос «Зачем думать об этой проблеме сейчас и вообще?»**

Решение проблемы может быть актуальным лично для исследователя, для группы исследователей или для научного сообщества в целом.

Актуальность решения данной задачи для нас состоит в том, что она является модельной по отношению к целому классу исследовательских задач по математике. Решив ее, мы многое поняли про то, как происходит математическое исследование.

Как описать исследовательскую задачу?

□ **Результаты исследования** – ответ на вопросы «**Какое новое знание получили? Какой статус этого знания?**»

Статус знания бывает следующим: истинное (доказанное), правдоподобное (подтвержденное примером или другим способом, но не доказанное), постановка проблемы (не удастся ни подтвердить, ни опровергнуть). Форма результатов в математике: определения, утверждения, доказательства, примеры.

Наш основной результат – теорема. Но можно сформулировать и результаты – гипотезы.

□ **Практическая значимость исследования** – это ответ на вопрос «**Для решения каких практических или прикладных задач могут быть использованы результаты исследования лично Вами или еще кем-то?**» Но не обязательно на вопрос «как в жизни (в быту) теорема пригодится?»

Для нас практическая значимость данного исследования состоит в получении собственного исследовательского опыта. Результаты можно использовать в допобразовании для составления олимпиадных задач.

**Успеха в
исследованиях!**