

Тема 1: Множества

1.1 Основные понятия

a – *элемент*; M – *множество*

$a \in M$ – « a принадлежит M »

$a \notin M$ – « a не принадлежит M »

$A \subseteq B$ – множество A является **подмножеством** множества B

$A \subseteq B$ и $A \neq B$ } множество A – **строгое** подмножество множества B
 $A \subset B$ }

Примеры:

A – множество сотрудников ФИТ;

M_1 – множество всех операций по сборке РС;

\mathbb{N} – множество натуральных чисел;

\mathbb{R} – множество всех действительных чисел.

- Равенство множеств:
 - 1) $A=B$, если их элементы совпадают;
 - 2) $A=B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.
- **Конечность** и **бесконечность** множества определяется числом его элементов.
- Мощность множества M , $|M|$, – есть число его элементов.
- Если $|M|=0$, то множество M называется **пустым**.
 $M=\emptyset$.

! $\emptyset \subseteq A$ – пустое множество является подмножеством любого множества

Способы задания множеств:

- Перечисление:

Только для конечных множеств!

- Подражающая процедура рекурсия или индукция

a) $1 \in M_{2^n}$;

b) если $m \in M_{2^n}$, то $2m \in M_{2^n}$.

M_{2^n} – числа, являющиеся степенями двойки;

$n \in \mathbb{N}$, где \mathbb{N} – множество натуральных чисел.

- Описание характеристических свойств

$$M = \{x/P(x)\} \text{ или } M = \{x:P(x)\}$$

$$M_{2^n} = \{x:x=2^n, n \in \mathbb{N}\}$$

Пример 1

Задать множество N – множество натуральных чисел

а) Списком нельзя

б) $1 \in N$; если $n \in N$, то $n+1 \in N$

в) $N = \{x: x - \text{целое положительное число}\}$

Пример 2

Задать множество M_{2n} – множество всех четных чисел $2, 4, 6, \dots$, не превышающих 100

а) $M_{2n} = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$

б) $2 \in M_{2n}$; если $n \in N$, то $(n+2) \in M_{2n}$; $n \leq 98$

с) $M_{2n} = \{n: n - \text{целое положительное число, не превышающее } 100\}$ или $M_{2n} = \{n: n \in N \text{ и } n/2 \in N, n \leq 100\}$

Пример 3

$U = \{a, b, c\}$. Определить $\beta(U)$ – **булеан** множества U – множество всех подмножеств, состоящих из элементов множества U . Какова мощность множества $\beta(U)$?

$$\beta(U) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$\beta(U) \neq 8.$$

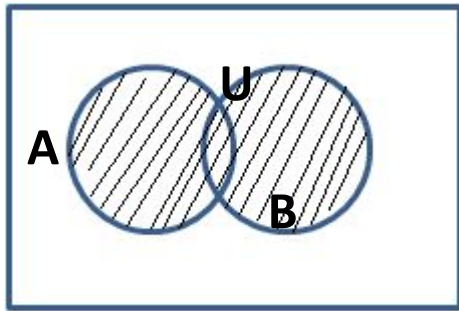
Пример 4

Какие определения множеств A, B, C, D являются корректными:

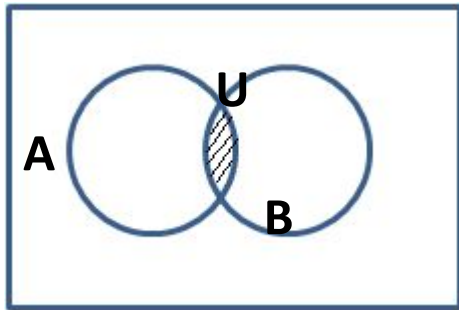
- a) $A = \{1, 2, 3\}$;
- b) $B = \{5, 6, 6, 7\}$;
- c) $C = \{x: x \in A\}$;
- d) $D = \{A, C\}$

1.2 Операции над множествами

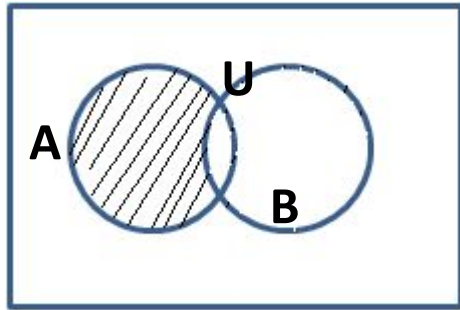
- Объединение $A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$



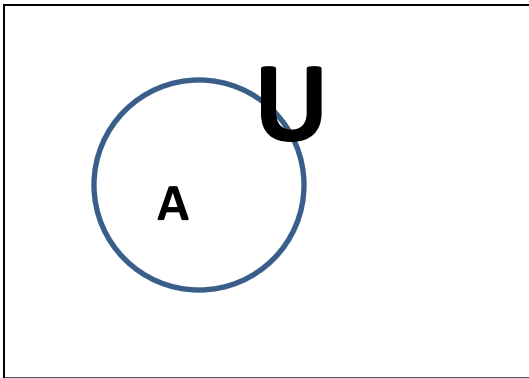
- Пересечение $A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$



- Разность $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ и } x \notin B\}$ $A \setminus B \neq B \setminus A$



- Дополнение (до U) $\bar{A} = U \setminus A$



Все четыре операции называются **булевыми операциями над множествами**

Пример 1

U – универсальное множество – все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

Пусть U – множество всех сотрудников ФИТ;

A – множество сотрудников старше 35;

B – множество сотрудников, имеющих стаж более 10 лет;

C – множество заведующих кафедрами.

Каков смысл каждого из следующих множеств:

а) \bar{B} ;

б) $A \cap B \cap C$;

в) $A \cup (B \cap \bar{C})$;

г) $B \setminus C$;

д) $C \setminus B$.

Пример 2

Пусть M – множество натуральных чисел, не превосходящих 100;

N – множество натуральных чисел.

Задать множества \bar{M} и \bar{N} .

Пример 3

Осуществить операции над множествами

$A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{c, d, e, f, g, h\}$

Пример 4

Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$.

Найти

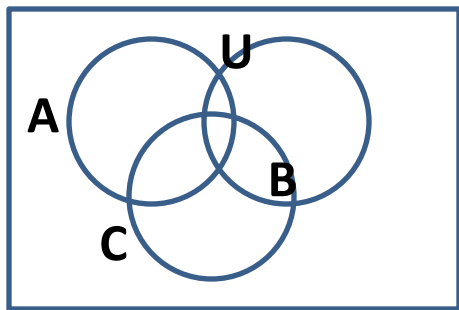
а) $\bar{A} \cup \bar{B}$; б) $\overline{A \cap B}$; в) $A \cap \bar{B}$; г) $(B \setminus A) \cup \bar{C}$

1.3 Диаграммы Венна

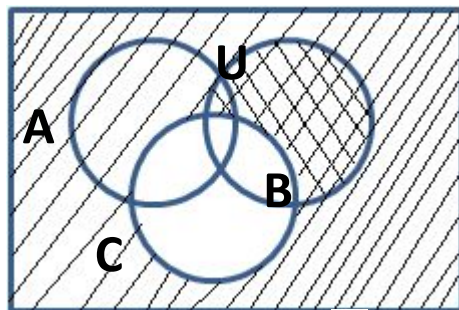
Диаграмма Венна – геометрическое представление множества.

Пример 1

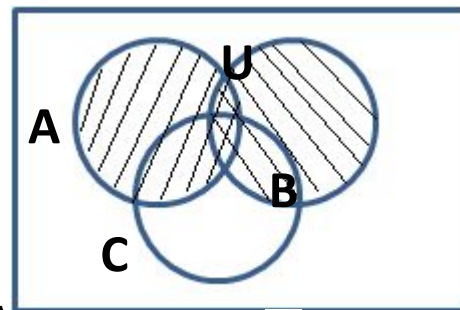
Представить множество $A \cup (B \cap \bar{C})$ диаграммой Венна.



a)



b) $B \cap \bar{C}$



$A \cup (B \cap \bar{C})$

Пример 2

Проиллюстрировать на конкретных множествах и с помощью диаграммы Венна справедливость соотношения:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.5 Векторы. Прямые произведения. Проекции векторов. (Самостоятельно)