

# Тема 4. Нелинейные модели

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

12  
45



# Темы лекции

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Нелинейная регрессия
- Преобразования переменных
- Экономическая интерпретация регрессионной модели



# Направления анализа и развития парной линейной регрессии

- Ключевые точки (начало координат)
- Кривая или прямая
- Форма криволинейной зависимости
- Вспомогательные экономические показатели (скорость и темп роста, эластичность)
- Уточнение формы (экстремумы, пределы)
- Сравнение функциональных форм

# Этапы построения модели

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

1. Выбор теоретических предпосылок
2. Формализация предпосылок
3. Построение математической модели
4. Анализ построенной модели



# Производственная функция Кобба-Дугласа

Многие экономические процессы не являются линейными по сути. Их моделирование линейными уравнениями не даст положительного результата.

Пример. Производственная функция Кобба – Дугласа

$$Y = AK^\alpha L^\beta$$

$Y$  – объем выпуска;  $K, L$  – затраты капитала и труда;  $\alpha, \beta$  – параметры модели.

# Классы нелинейных регрессий

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Различают *два класса* нелинейных регрессий:

1. Регрессии, нелинейные относительно переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.
2. Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Регрессии, нелинейные относительно объясняющих переменных, всегда сводятся к линейным моделям.



# Классы нелинейных регрессий

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011  
Линейная модель

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

Модель, нелинейная по переменным

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^2 + \beta_2 \sqrt{X_2} + \beta_3 \log X_3 + \varepsilon$$

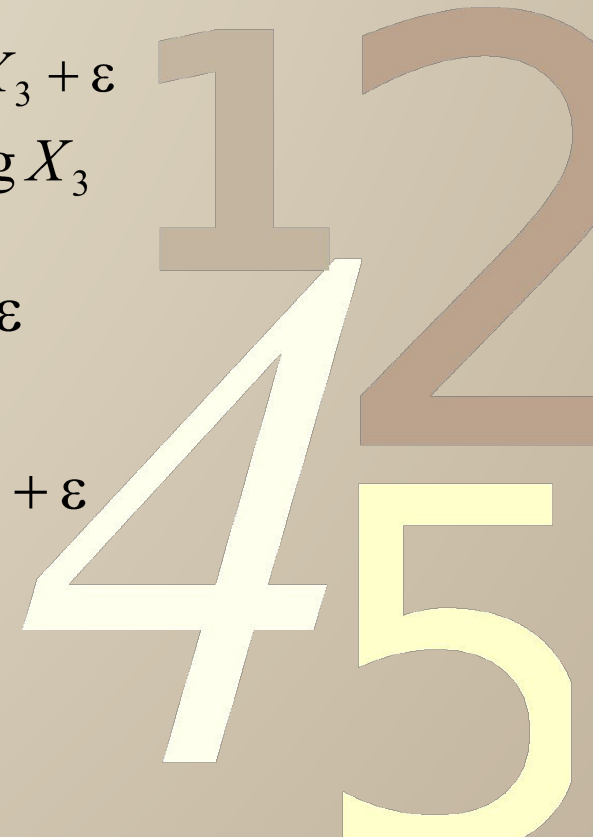
$$Z_1 = X_1^2, \quad Z_2 = \sqrt{X_2}, \quad Z_3 = \log X_3$$

После подстановки модель стала линейной

$$Y = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \varepsilon$$

Модель, нелинейная по параметрам

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 \beta_4 X_3 + \varepsilon$$



# Линейная модель

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

$$E[Y | X] = \alpha + \beta X$$

1  
2  
4  
5



# Линейная модель

$$E[Y | X] = \alpha + \beta X$$

$$\beta = \frac{\partial E[Y | X]}{\partial X} = \frac{\Delta E[Y | X]}{\Delta X}$$

$$\Delta X = 1 \quad \beta = \Delta Y$$

$$\alpha = E[Y | X = 0]$$

Если переменная  $X$  увеличится на 1, то  $Y$  изменится в среднем на  $\beta$  единиц измерения при прочих равных условиях



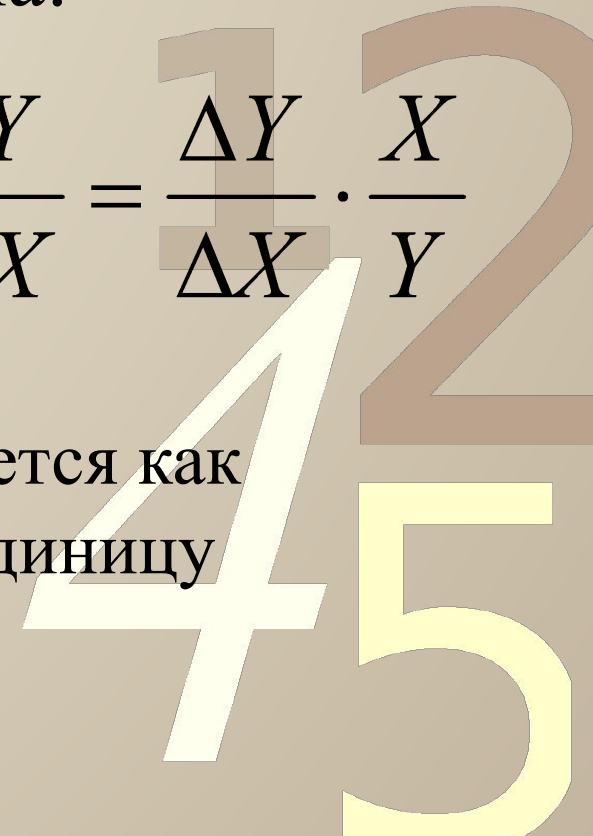
# Моделирование эластичности

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Независимо от вида математической связи между  $Y$  и  $X$  *эластичность* равна:

$$L = \frac{dY / Y}{dX / X} = \frac{dY / dX}{Y / X} \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

Эластичность  $y$  по  $x$  рассчитывается как относительное изменение  $y$  на единицу относительного изменения  $x$ .



# Пример расчета эластичности

Рассмотрим кривую Энгеля:

$$Y = \alpha X^\beta$$

где  $Y$  – спрос на товар,  $X$  – доход. Имеем:

$$\text{Эластичность} = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\alpha \beta X^{\beta-1}}{\alpha X^{\beta-1}} = \beta,$$

Например для модели  $Y = 0,01X^{0,3}$  эластичность спроса по доходу равна 0,3. Иными словами, изменение дохода ( $X$ ) на 1% вызывает изменение спроса ( $Y$ ) на 0,3%

# Эластичность – переменная величина

Эластичность не всегда бывает постоянной для различных значений  $X$  и  $Y$

Например, для линейной модели

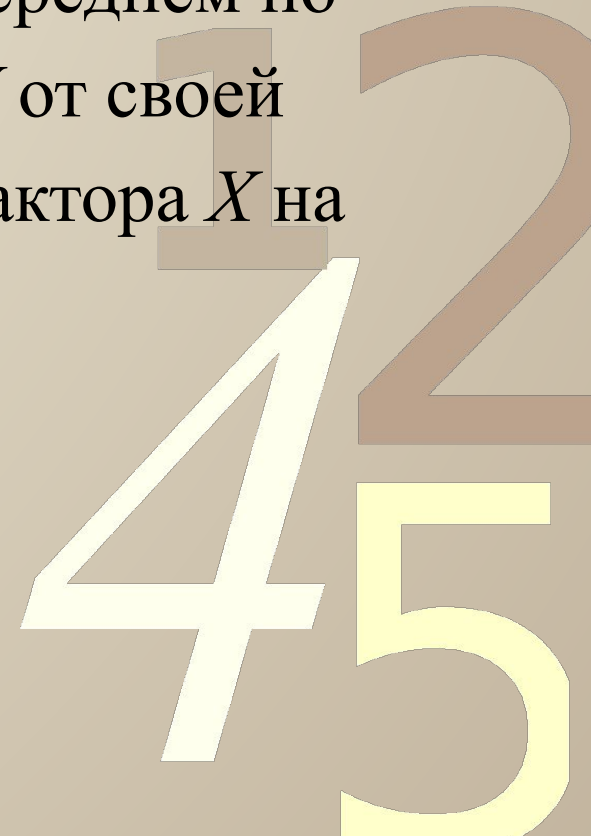
$$L = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\beta}{Y / X} = \beta \frac{X}{Y}$$

# Средний коэффициент эластичности

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Средний коэффициент эластичности  $\bar{L}$  показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат  $Y$  от своей средней величины при изменении фактора  $X$  на 1% от своего среднего значения

$$\bar{L} = f'(\bar{X}) \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$



# Логарифмическая форма

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$Y_i = \alpha' X_i^\beta \varepsilon'_i$$

Прологарифмировав обе части уравнения,  
получим

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

# Логарифмическая форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии  $\beta$  – эластичность зависимой переменной по объясняющей переменной

$$\frac{dY}{Y} = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY / Y}{dX / X}$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает, на сколько процентов меняется в среднем  $Y$  при возрастании  $X$  на 1%. ППРУ

Логарифмическую форму следует использовать там, где есть основание предполагать постоянство эластичности

# Логарифмическая форма

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Вычисление наклона (скорости роста)

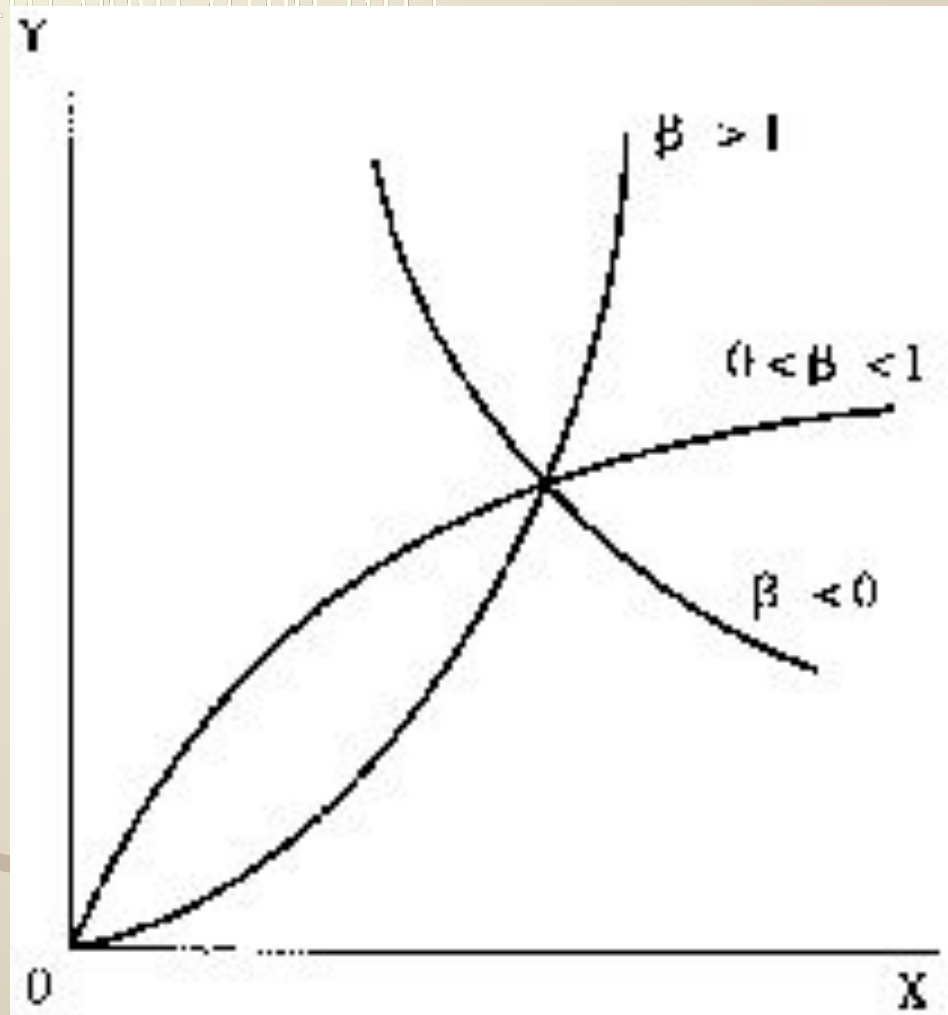
$$\frac{dY}{dX} = \beta \frac{Y}{X}$$

Наклон постоянно меняется с изменением номера наблюдения





# Графики логарифмической формы зависимости



1 2  
4 5

# Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии  $\beta$ :

$$\frac{dY}{Y} = \beta dX \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY}{Y dX} \quad \xrightarrow{dX=1} \quad \beta \cdot 100\% = \frac{dY}{Y} \cdot 100\%$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает на сколько процентов возрастает  $Y$  при возрастании  $X$  на одну единицу

При интерпретации коэффициент следует умножать на 100

# Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Эластичность растет с ростом  $Y$ :

$$\beta = \frac{dY}{YdX} \Rightarrow L = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{YX}{Y} = \beta X$$

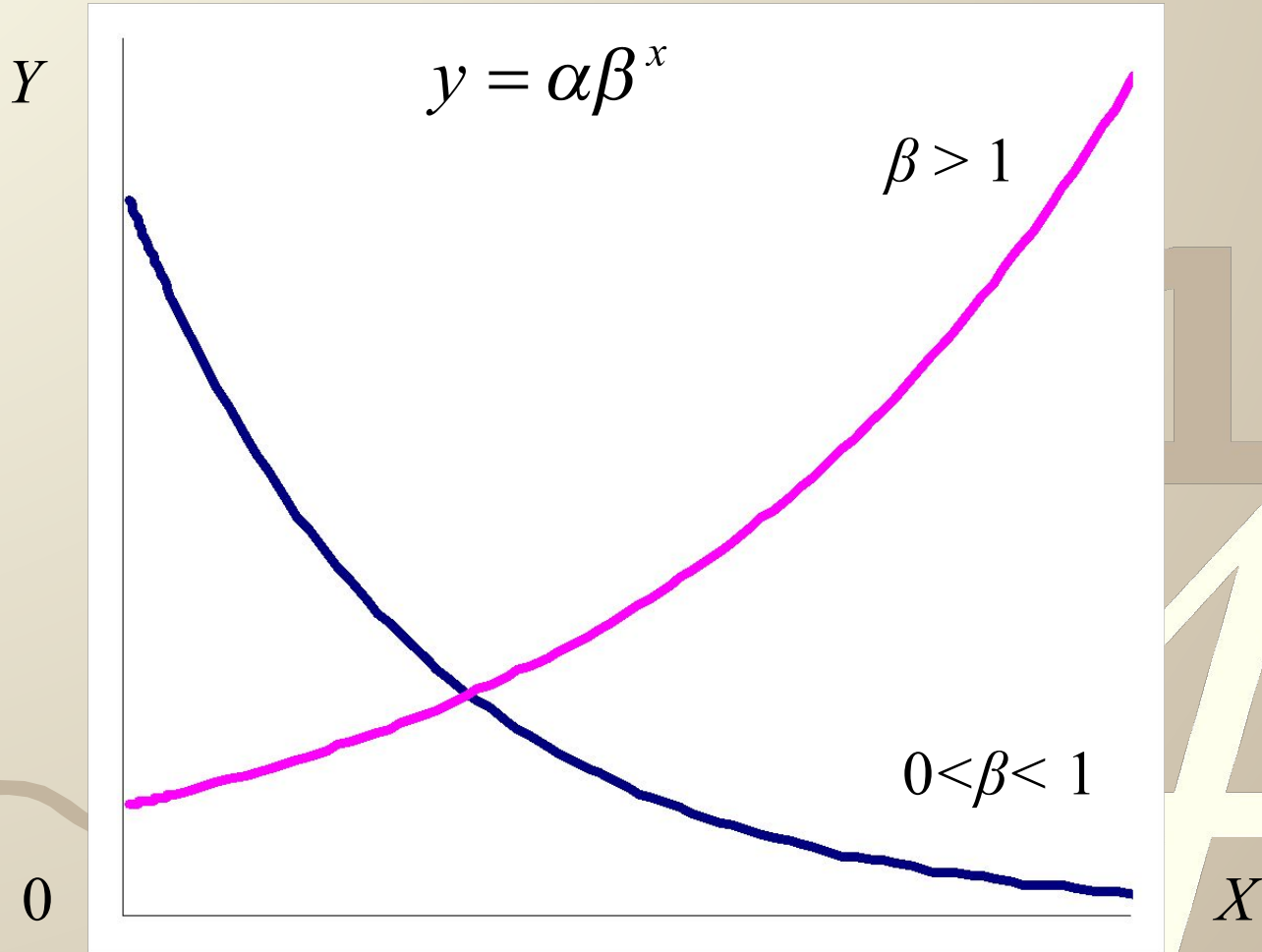
Это указывает на класс зависимостей, где следует применять линейно-логарифмическую форму регрессии

Моделирование эффектов насыщения на уровне скорости роста: «возрастание с возрастающей скоростью»

Примеры: кривые Энгеля для товаров роскоши, моделирование оплаты труда (процентная надбавка за стаж и опыт)

# Графики логарифмически-линейной формы зависимости

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011



# Логарифмически-линейная форма от времени

$$\ln Y_i = \alpha + \beta t_i + \varepsilon_i$$

Вид уравнения:  $Y_i = e^{\alpha} e^{\beta t_i} e^{\varepsilon_i}$

Интерпретация:  $\frac{dY}{Y} = \beta t$

Коэффициент при переменной времени выражает темп прироста. Он показывает на сколько процентов (если умножить его на 100) возрастает  $Y$  ежегодно

Эту функциональную форму удобно использовать для моделирования процессов экономического роста

# Преобразование случайного отклонения

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

МНК применяется к преобразованным (линеаризованным) уравнениям. Поэтому необходимо особое внимание уделять рассмотрению свойств случайных отклонений – выполнимости предпосылок теоремы Гаусса-Маркова.

Пример.

$$Y = \alpha X^\beta + \varepsilon \quad \xRightarrow{\ln(\cdot)} \quad \ln Y = \ln(\alpha X^\beta + \varepsilon)$$

Логарифмирование нелинейной модели с аддитивным случайным членом не приводит к линеаризации соотношения относительно параметров.

# Сравнение различных моделей

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

1. Содержательный анализ
2. Формальный анализ:
  - *Метод Зарембки*
  - *Преобразование Бокса-Кокса*

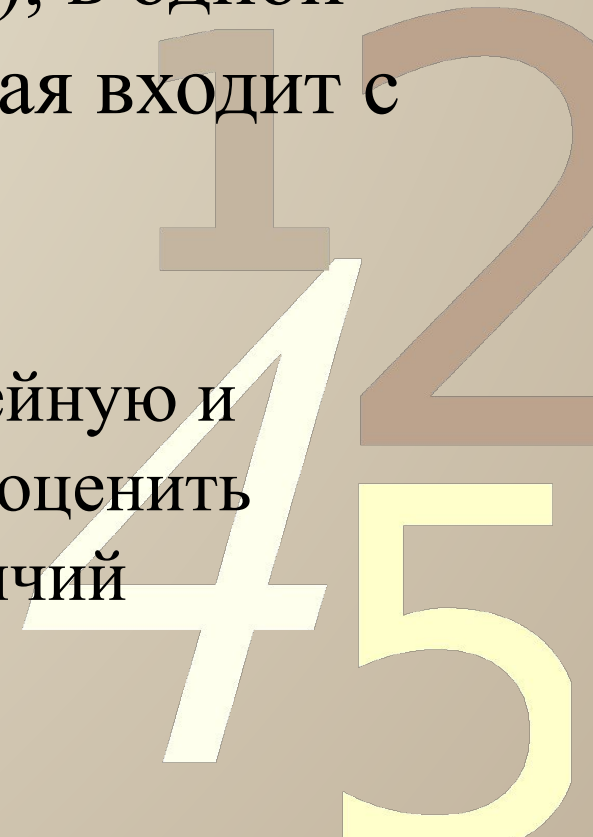


# Метод Зарембки

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Применим для выбора из двух форм (несравнимых непосредственно), в одной из которых зависимая переменная входит с логарифмом, а в другой – нет

Метод позволяет сравнить линейную и логарифмическую регрессии и оценить значимость наблюдаемых различий





# Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

- 0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011
1. Вычисляем среднее геометрическое значений зависимой переменной и все ее значения делим на это среднее:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \dots Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln Y_i}$$

2. Рассчитываются линейная и логарифмическая регрессии, и сравниваются значения их сумм квадратов остатков (*ESS*)

$$Y_i^* = \alpha_1 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (RSS_1) \quad \ln Y_i^* = \alpha_2 + \beta_2 \ln X_i + \varepsilon'_i \quad (RSS_2)$$

# Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

3. Вычисляем  $\chi^2$ -статистику для оценки значимости различий

$$\chi^2 = \left( \frac{N}{2} \right) \cdot \left| \ln \frac{RSS_1}{RSS_2} \right|$$

4. Сравниваем с критическим значением  $\chi^2$ -распределения  $\chi_{\alpha;k}^2$ . Различия значимы на уровне значимости  $\alpha$ , если

$$\chi^2 > \chi_{\alpha;k}^2$$

# Метод Бокса-Кокса

Идея метода. Переменная  $\frac{Y^\lambda - 1}{\lambda}$ :

при  $\lambda=1$  превращается в линейную функцию  $\frac{Y - 1}{1}$

при  $\lambda \rightarrow 0$  переходит в логарифм  $\frac{Y^\lambda - 1}{\lambda} \rightarrow \ln Y$

Плавно изменяя  $\lambda$ , можно постепенно перейти от линейной регрессии к логарифмической, все время сравнивая качество

# Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

- 0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011
1. Преобразуют зависимую переменную по методу Зарембки:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \dots Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln Y_i}$$

2. Рассчитывают новые переменные (преобразование Бокса-Кокса) при значениях  $\lambda$  от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \frac{Y_i^{*\lambda} - 1}{\lambda}$$

$$X_i^{(B-C)} = \frac{X_i^\lambda - 1}{\lambda}$$

# Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

- 0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011
3. Рассчитывают уравнения регрессии для новых переменных при значениях  $\lambda$  от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \alpha + \beta X_i^{(B-C)} + \varepsilon_i$$

4. Определяют минимальное значение суммы квадратов остатков (SSR).
5. Выбирают одну из крайних регрессий, к которой ближе точка минимума.

# Вопросы для самопроверки

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Какие вы знаете виды нелинейных моделей.
- Какие вы знаете нелинейные методы оценивания.
- Как определять эластичность.
- Что такое предельные эффекты переменных.
- Основные способы линеаризации моделей.
- Какие вы знаете типы производственных функций.
- Как выбрать между линейной и логарифмической моделями.
- Экономический смысл коэффициентов линейной модели.
- Экономический смысл коэффициентов логарифмической модели
- Экономический смысл коэффициентов полулогарифмической модели.

