Тема 4. Нелинейные модели

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Темы лекции

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Нелинейная регрессия
- Преобразования переменных
- Экономическая интерпретация регрессионной модели

Направления анализа и развития парной линейной регрессии

- Ключевые точки (начало координат)
- Кривая или прямая
- Форма криволинейной зависимости
- Вспомогательные экономические показатели (скорость и темп роста, эластичность)
- Уточнение формы (экстремумы, пределы)
- Сравнение функциональных форм

Этапы построения модели

1. Выбор теоретических предпосылок
2. Формализация предпосылок
3. Построение математической модели
4. Анализ построенной модели

Производственная функция Кобба-Дугласа

Многие экономические процессы не являются линейными по сути. Их моделирование линейными уравнениями не даст положительного результата.

<u>Пример</u>. Производственная функция Кобба – Дугласа

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Y – объем выпуска; K, L – затраты капитала и труда; α, β – параметры модели.

Классы нелинейных регрессий

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Различают ***два класса*** нелинейных регрессий:

1. Регрессии, нелинейные относительно переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.
2. Регрессии, нелинейные по оцениваемых параметрам.

Регрессии, нелинейные относительно объясняющих переменных, всегда сводятся к линейным моделям.

Классы нелинейных регрессий

Линейная модель

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

Модель, нелинейная по переменным

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1^2 + \beta_2 \sqrt{X_2} + \beta_3 \log X_3 + \varepsilon$$

$$Z_1 = X_1^2, \quad Z_2 = \sqrt{X_2}, \quad Z_3 = \log X_3$$

После подстановки модель стала линейной

$$Y = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \varepsilon$$

Модель, нелинейная по параметрам

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 \beta_4 X_3 + \varepsilon$$

Линейная модель

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

$$E[Y \mid X] = \alpha + \beta X$$

Линейная модель

$$E[Y \mid X] = \alpha + \beta X$$

$$\beta = \frac{\partial E[Y \mid X]}{\partial X} = \frac{\Delta E[Y \mid X]}{\Delta X}$$

$$\Delta X = 1 \qquad \beta = \Delta Y$$

$$\alpha = E[Y \mid X = 0]$$

Если переменная X увеличится на 1, то Y изменится в среднем на β единиц измерения при прочих равных условиях

Моделирование эластичности

Независимо от вида математической связи между Y и X ***эластичность*** равна:

$$L = \frac{dY / Y}{dX / X} = \frac{dY / dX}{Y / X} \approx \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

Эластичность y по x рассчитывается как относительное изменение y на единицу относительного изменения x.

Пример расчета эластичности

Рассмотрим кривую Энгеля: $Y = \alpha X^{\beta}$

где Y – спрос на товар, X – доход. Имеем:

$$\text{Эластичность} = \frac{dY/dX}{Y/X} = \frac{\alpha\beta X^{\beta-1}}{\alpha X^{\beta-1}} = \beta,$$

Например для модели $Y = 0{,}01X^{0,3}$ эластичность спроса по доходу равна 0,3. Иными словами, изменение дохода (X) на 1% вызывает изменение спроса (Y) на 0,3%

Эластичность – переменная величина

Эластичность не всегда бывает постоянной для различных значений X и Y

Например, для линейной модели

$$L = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\beta}{Y / X} = \beta \frac{X}{Y}$$

Средний коэффициент эластичности

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Средний коэффициент эластичности $\overline{L}$ показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат Y от своей средней величины при изменении фактора X на 1% от своего среднего значения

$$\overline{L} = f'(\overline{X})\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

Логарифмическая форма

$$Y_i = \alpha' X_i^{\beta} \varepsilon_i'$$

Прологарифмировав обе части уравнения, получим

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Логарифмическая форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β – эластичность зависимой переменной по объясняющей переменной

$$\frac{dY}{Y} = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY / Y}{dX / X}$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает, на сколько процентов меняется в среднем Y при возрастании X на 1%. ППРУ

Логарифмическую форму следует использовать там, где есть основание предполагать постоянство эластичности

Логарифмическая форма

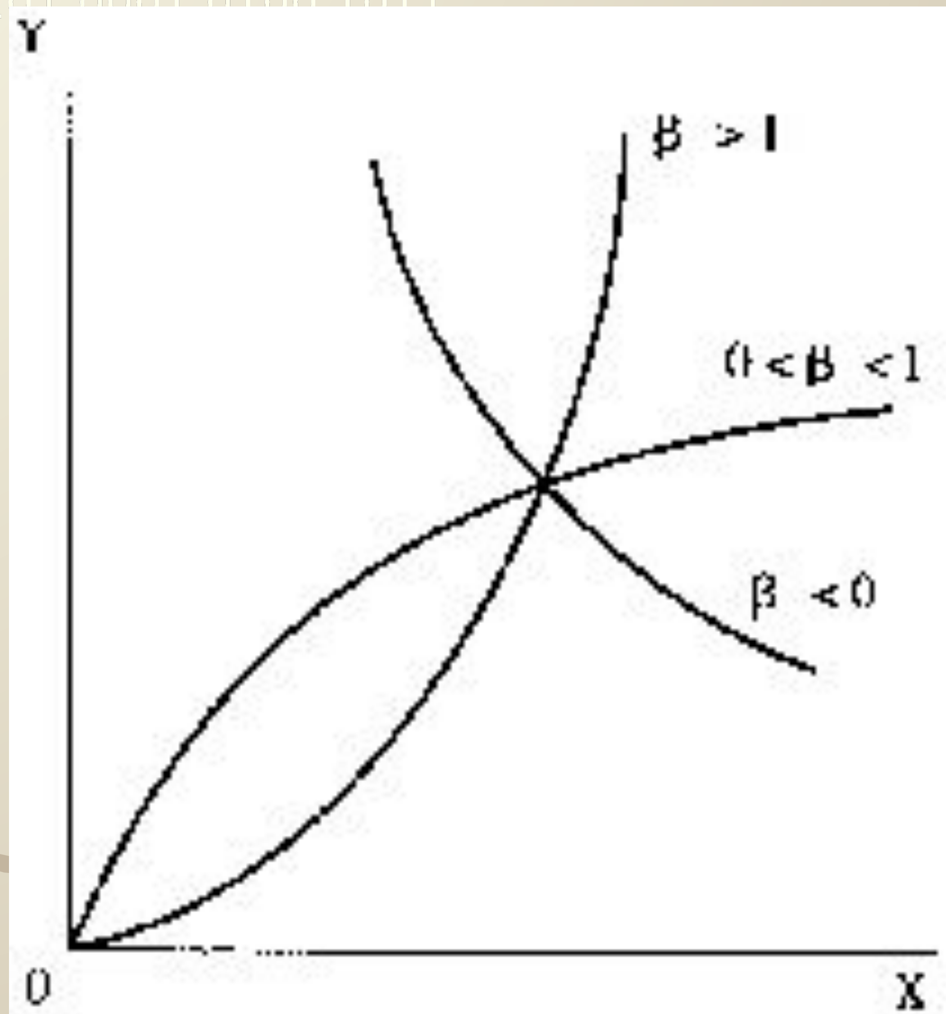
$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Вычисление наклона (скорости роста)

$$\frac{dY}{dX} = \beta \frac{Y}{X}$$

Наклон постоянно меняется с изменением номера наблюдения

Графики логарифмической формы зависимости



Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β:

$$\frac{dY}{Y} = \beta dX \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY}{YdX} \quad \overset{dX=1}{\Rightarrow} \quad \beta \cdot 100\% = \frac{dY}{Y} \cdot 100\%$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает на сколько процентов возрастает Y при возрастании X на одну единицу

При интерпретации коэффициент следует умножать на 100

Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Эластичность растет с ростом *Y*:

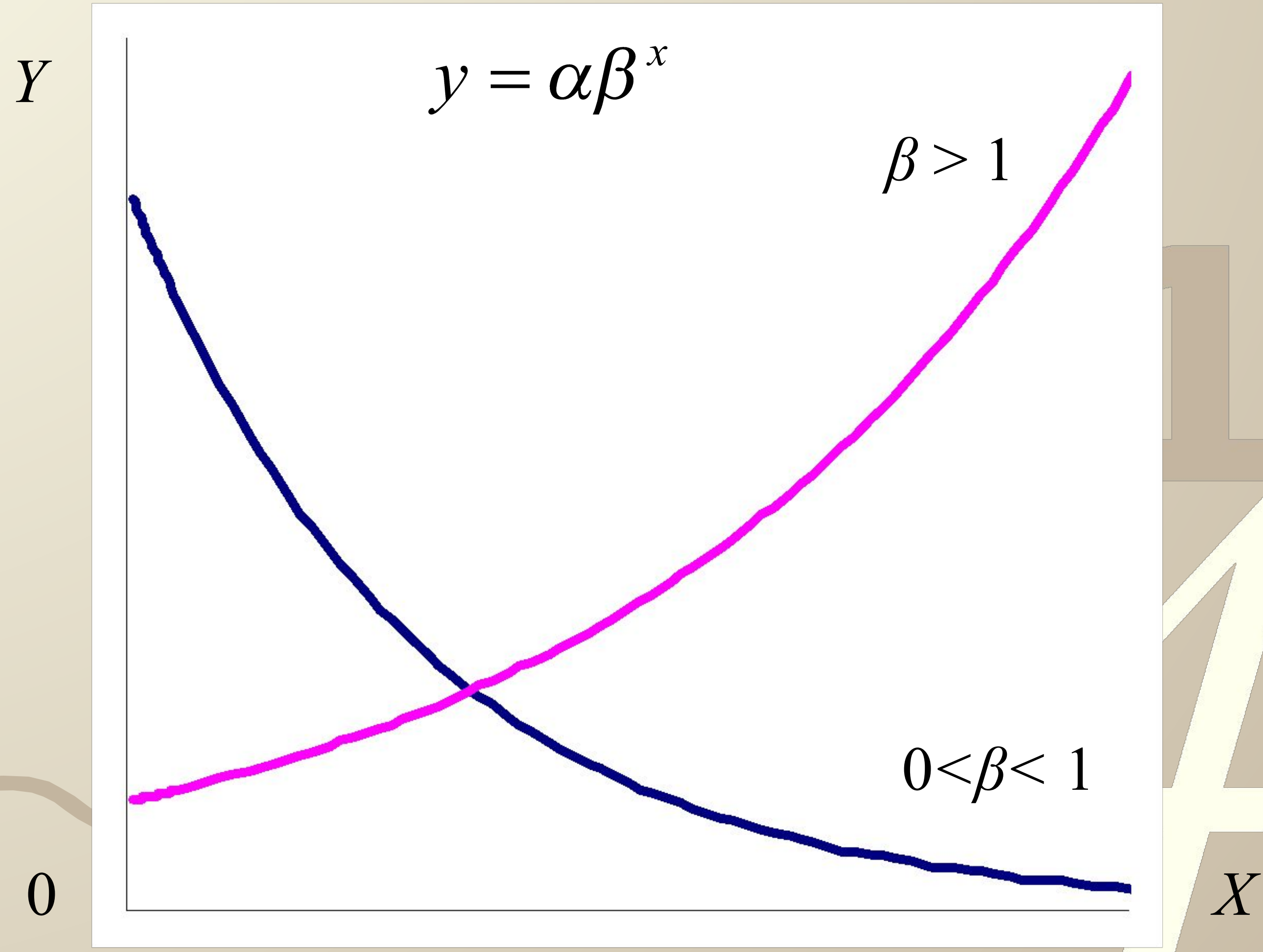
$$\beta = \frac{dY}{YdX} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{YX}{Y} = \beta X$$

Это указывает на класс зависимостей, где следует применять линейно-логарифмическую форму регрессии

Моделирование эффектов насыщения на уровне скорости роста: «возрастание с возрастающей скоростью»

Примеры: кривые Энгеля для товаров роскоши, моделирование оплаты труда (процентная надбавка за стаж и опыт)

Графики логарифмически-линейной формы зависимости



Логарифмически-линейная форма от времени

$$\ln Y_i = \alpha + \beta t_i + \varepsilon_i$$

Вид уравнения: $$Y_i = e^{\alpha} e^{\beta t_i} e^{\varepsilon_i}$$

Интерпретация: $$\frac{dY}{Y} = \beta t$$

Коэффициент при переменной времени выражает темп прироста. Он показывает на сколько процентов (если умножить его на 100) возрастает Y ежегодно

Эту функциональную форму удобно использовать для моделирования процессов экономического роста

Преобразование случайного отклонения

МНК применяется к преобразованным (линеаризованным) уравнениям. Поэтому необходимо особое внимание уделять рассмотрению свойств случайных отклонений – выполнимости предпосылок теоремы Гаусса-Маркова.

<u>Пример</u>.

$$Y=\alpha X^{\beta}+\varepsilon \quad \overset{\ln(\cdot)}{\Rightarrow} \quad \ln Y=\ln(\alpha X^{\beta}+\varepsilon)$$

Логарифмирование нелинейной модели с аддитивным случайным членом не приводит к линеаризации соотношения относительно параметров.

Сравнение различных моделей

1. Содержательный анализ
2. Формальный анализ:

- *Метод Зарембки*
- *Преобразование Бокса-Кокса*

Метод Зарембки

Применим для выбора из двух форм (несравнимых непосредственно), в одной из которых зависимая переменная входит с логарифмом, а в другой – нет

Метод позволяет сравнить линейную и логарифмическую регрессии и оценить значимость наблюдаемых различий

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

1. Вычисляем среднее геометрическое значений зависимой переменной и все ее значения делим на это среднее:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \cdots Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i}$$

2. Рассчитываются линейная и логарифмическая регрессии, и сравниваются значения их сумм квадратов остатков (*ESS*)

$$Y_i^* = \alpha_1 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (RSS_1) \qquad \ln Y_i^* = \alpha_2 + \beta_2 \ln X_i + \varepsilon_i' \quad (RSS_2)$$

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Зарембки

3. Вычисляем χ^2-статистику для оценки значимости различий

$$\chi^2 = \left(\frac{N}{2}\right) \cdot \left|\ln \frac{RSS_1}{RSS_2}\right|$$

4. Сравниваем с критическим значением χ^2-распределения $\chi^2_{\alpha;k}$. Различия значимы на уровне значимости α, если

$$\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k}$$

Метод Бокса-Кокса

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Идея метода. Переменная $\dfrac{Y^{\lambda}-1}{\lambda}$:

при λ=1 превращается в линейную функцию $\dfrac{Y-1}{1}$

при $\lambda\to 0$ переходит в логарифм $\dfrac{Y^{\lambda}-1}{\lambda}\to \ln Y$

Плавно изменяя λ, можно постепенно перейти от линейной регрессии к логарифмической, все время сравнивая качество

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

1. Преобразуют зависимую переменную по методу Зарембки:

$$Y_i^* = Y_i / \sqrt[n]{Y_1 Y_2 \cdots Y_n} = Y_i / e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Y_i}$$

2. Рассчитывают новые переменные (преобразование Бокса-Кокса) при значениях λ от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \frac{Y_i^{*\lambda} - 1}{\lambda} \qquad X_i^{(B-C)} = \frac{X_i^{\lambda} - 1}{\lambda}$$

Сравнение различных моделей парной регрессии методом Бокса-Кокса

3. Рассчитывают уравнения регрессии для новых переменных при значениях λ от 1 до 0:

$$Y_i^{(B-C)} = \alpha + \beta X_i^{(B-C)} + \varepsilon_i$$

4. Определяют минимальное значение суммы квадратов остатков (SSR).

5. Выбирают одну из крайних регрессий, к которой ближе точка минимума.

Вопросы для самопроверки

- Какие вы знаете виды нелинейных моделей.
- Какие вы знаете нелинейные методы оценивания.
- Как определять эластичность.
- Что такое предельные эффекты переменных.
- Основные способы линеаризации моделей.
- Какие вы знаете типы производственных функций.
- Как выбрать между линейной и логарифмической моделями.
- Экономический смысл коэффициентов линейной модели.
- Экономический смысл коэффициентов логарифмической модели
- Экономический смысл коэффициентов полулогарифмической модели.