

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТЕМА №10

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз по разному.

Пример. Подбрасывание монеты: частота появления герба приближается к $1/2$.

К. Пирсон подбрасывал монету 24000 раз,
выпадение герба 12012 раз.

$$\frac{12012}{24000} = 0.5005$$

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Исходным понятием теории вероятностей является понятие **опыт (испытание)**, стохастический эксперимент).

Опыт (испытание) может иметь несколько исходов (результатов опыта), взаимоисключающих друг друга.

Определение 1. Элементарным исходом (или **элементарным событием**) называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта.

Определение 2. Множество всех элементарных исходов называется **пространством элементарных событий (исходов)**.

Множество исходов опыта образует **пространство элементарных исхо**

если выполнены следующие требования:

- в результате опыта один из исходов обязательно происходит;
- появление одного из исходов опыта исключает появление остальных;
- в рамках данного опыта нельзя разделить элементарный исход на более мел составляющие.

пространство элементарных исходов обозначают: Ω ,

элементарные исходы — ω ,

элемент ω принадлежит Ω : $\omega \in \Omega$,

множество Ω состоит из элементов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$, и только из них:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ или $\Omega = \{\omega_i\}, i = 1, \dots, n, \dots$,

В частности, Ω может содержать *конечное* число элементарных исходов.

Рассмотрим примеры, поясняющие понятие пространства элементарных исходов.

Пример 1. Пусть опыт состоит в *однократном подбрасывании монеты*.

Два элементарных исхода:

выпадение „герба" (можно обозначить этот исход Γ , ω_Γ или ω_1) и

выпадение „цифры" (Δ , ω_Δ или ω_2).

Таким образом, $\Omega = \{\Gamma, \Delta\}$, $\Omega = \{\omega_\Gamma, \omega_\Delta\}$ или $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

При двукратном подбрасывании монеты (или однократном подбрасывании двух монет) пространство элементарных исходов будет, очевидно, содержать четыре элемента, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$\Omega = \{\omega_{\Gamma\Gamma}, \omega_{\Gamma\Delta}, \omega_{\Delta\Gamma}, \omega_{\Delta\Delta}\}$

где, например, $\omega_{\Gamma\Gamma}$ — появление „герба" и при первом, и при втором подбрасываниях.

Пример 2. При однократном бросании игральной кости возможен любой из шести элементарных исходов

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} ,$$

где $\omega_i, i = \overline{1,6}$ означает появление i очков на верхней грани кости,

т.е. $\Omega = \{\omega_i\}, i = 1, \dots, 6, \quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} .$

При двукратном бросании игральной кости каждый из шести возможных исходов при первом бросании может сочетаться с каждым из шести исходов при втором бросании,

$$\text{т.е. } \Omega = \{\omega_{ij}\}, i, j = 1, \dots, 6$$

где ω_{ij} — исход опыта, при котором сначала выпало i , а затем j очков.

⇒ пространство элементарных исходов Ω содержит 36 элементарных исходов

§ 2. События, действия над ними

Определение 3. Любой набор элементарных исходов, т.е. произвольное подмножество A пространства элементарных исходов Ω , $A \subset \Omega$, называют **событием**.

События обозначают прописными латинскими буквами:

$$A, B_1, C_3, \dots,$$

Определение 4. Элементарные исходы $\omega_i \in A$, которые являются элементами рассматриваемого подмножества (события), называют **элементарными исходами, благоприятствующими данному событию, или образующими это событие**.

Определение 5. Говорят, что событие **A произошло** (или наступило), если в результате опыта появился какой-либо из элементарных исходов $\omega_i \in A$.

Пример 4. При однократном бросании игральной кости

$$\Omega = \{\omega_i\}, i=1, \dots, 6$$

где ω_i — элементарный исход, заключающийся в выпадении i очков.

Рассмотрим следующие события:

A — выпадение четного числа очков;

B — выпадение нечетного числа очков;

C — выпадение числа очков, кратного трем. \Rightarrow

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \text{ и } C = \{\omega_3, \omega_6\}.$$

Определение 4. Событие, состоящее из всех элементарных исходов, т.е. событие, которое обязательно происходит в данном опыте, называют **достоверным событием**.

Достоверное событие, как и пространство элементарных исходов, обозначают буквой Ω .

Определение 5. Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода, т.е. событие, которое никогда не происходит в данном опыте, называют **невозможным событием**.

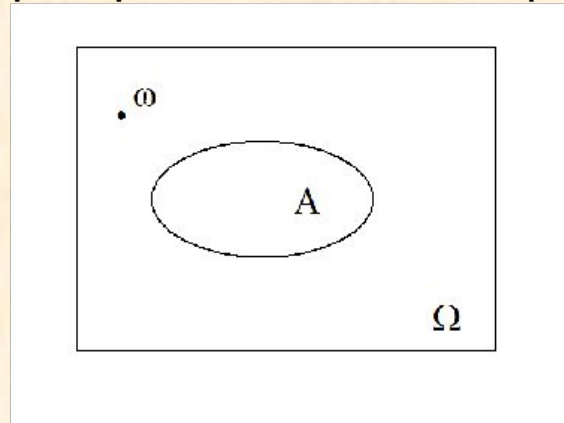
Невозможное событие обозначают символом \emptyset .

Важное свойство Ω и \emptyset : $A \subset \Omega$ и $\emptyset \subset A$

Пример 5. При бросании игральной кости
достоверное событие — например, выпадение хотя бы одного очка,
невозможное — выпадение 7 очков.

Наглядно представляют события в виде *диаграммы Эйлера — Венна* —

Все пространство элементарных исходов Ω — прямоугольник,



каждый элементарный исход ω_i — точка внутри прямоугольника, а каждое событие $A \subset \Omega$ — некоторое подмножество точек этого прямоугольника.

Трактовкой диаграммы Эйлера — Венна может служить опыт с бросанием случайным образом частицы в прямоугольник. Тогда элементарный исход ω_i — это попадание частицы в точку ω_i прямоугольника, а событие A — в часть прямоугольника, задаваемую подмножеством A .

ОПЕРАЦИИ (ДЕЙСТВИЯ) НАД СОБЫТИЯМИ

(совпадают с операциями над подмножествами).

Таблица исходов.

A	Ω	\emptyset
+	+	-
-		

+ событие произошло

- событие не произошло

1. Равенство событий

Определение 6. Два события называются **равными**, если в результате испытания они оба либо происходят, либо не происходят:

$$A = B$$

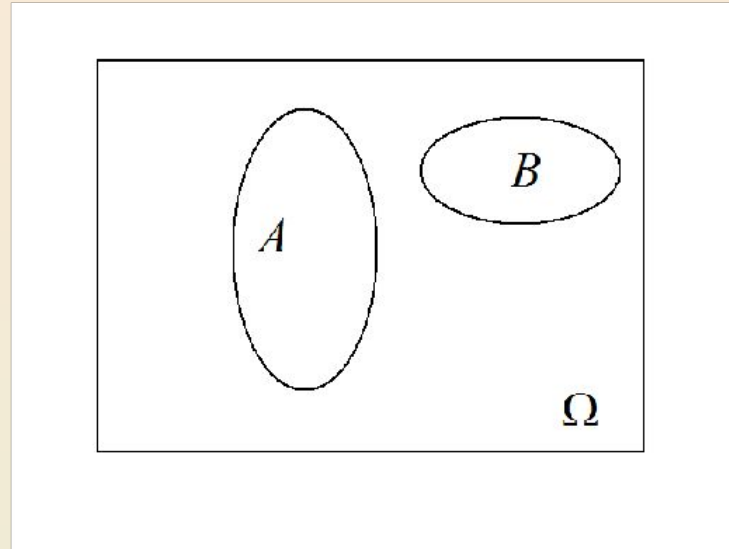
A	B
+	+
-	-

Геометрически: совпадение фигур.

Логически: одинаковые высказывания о событиях.

2. Несовместность событий

Определение 7. События A и B называют **несовместными**, или **непересекающимися**, если **их пересечение** является **невозможным** событием, т.е. если $A \cap B = \emptyset$



В противном случае события называют **совместными**, или **пересекающимися**.

3. Пересечение событий

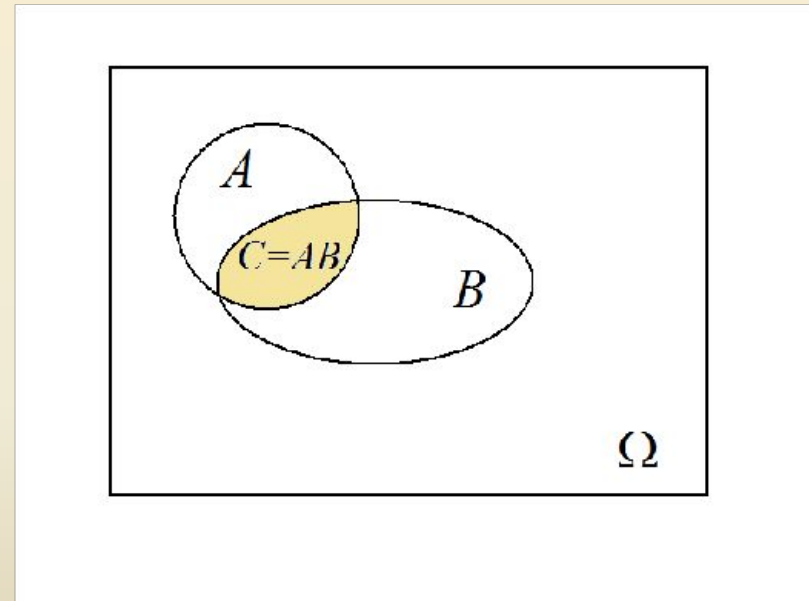
Определение 8. Пересечением (произведением) двух событий A и B называют событие C , происходящее тогда и только тогда, когда одновременно происходят оба события A и B , т.е. событие, состоящее из тех и только тех элементарных исходов, которые принадлежат и событию A , и событию B .

Пересечение событий A и B записывают следующим образом:

$$C = A \cap B, \Leftrightarrow C = AB.$$

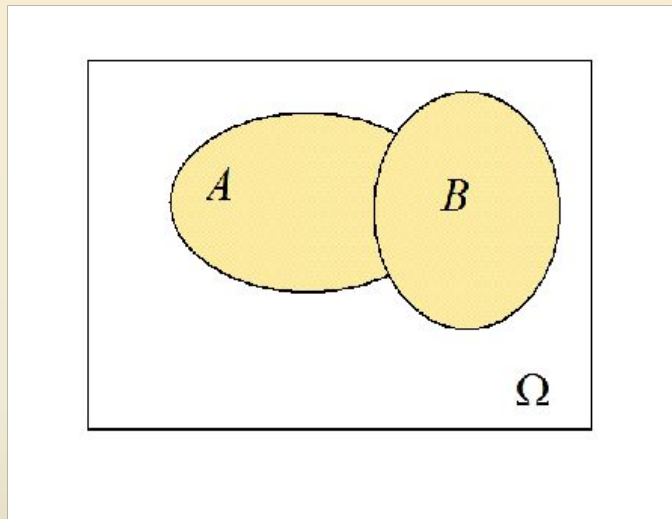
Логическое «И»

A	B	$A \cap B$
+	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	-



4. Объединение событий

Определение 9. **Объединением (суммой) двух событий A и B** называют событие **C** , происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B ,
т.е. **событие C , состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат хотя бы одному из подмножеств A или B**



Объединение событий A и B :

$$A \cup B \Leftrightarrow A + B$$

Логически: «**ИЛИ**»

A	B	A + B
+	+	+
+	-	+
-	+	+
-	-	-

Аналогично определяют понятия произведения и суммы событий для любого конечного числа событий и даже для бесконечных последовательностей событий.

Так, событие

$$A_1 \square A_2 \square \dots \square A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i \quad (A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = \prod_{i=1}^n A_i)$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих **всем событиям** $A_i, i \in N$,

а событие

$$A_1 \square A_2 \square \dots \square A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad (A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i)$$

состоит из элементарных исходов, принадлежащих **хотя бы одному из событий** $A_i, i \in N$.

Определение 10. События A_1, A_2, \dots, A_n называют **попарно несовместными (непересекающимися)**, если

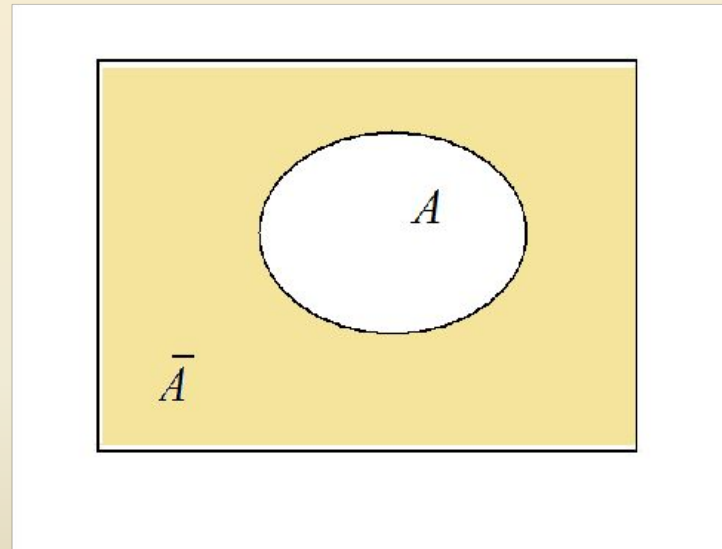
$$A_i \square A_j = \emptyset, \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

5. Дополнение события

Определение 11. **Дополнением события A** (обозначают \bar{A}) называют событие, происходящее тогда и только тогда, когда **не происходит** событие A

Событие \bar{A} называют также событием, **противоположным** **событию A** .

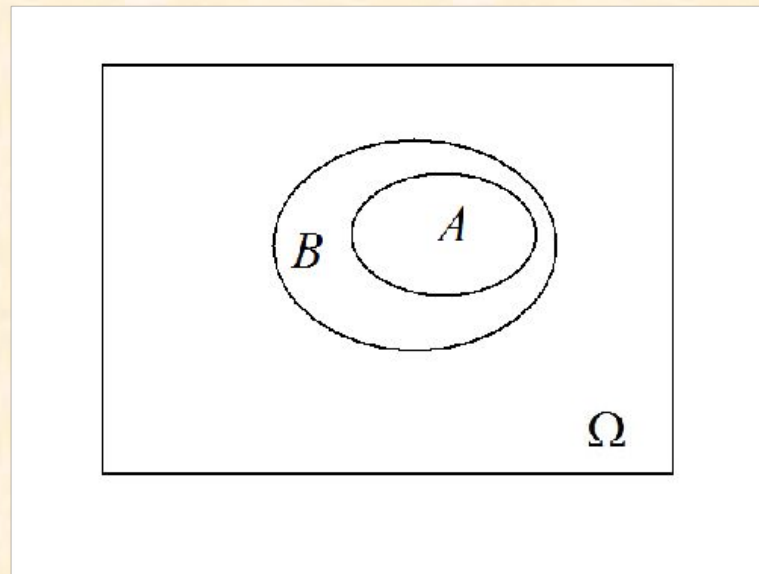
A	\bar{A}
+	-
-	+



6. Включение события

Определение 12. Событие A **включено** (содержится) в событие B , что записывают $A \subset B$, если появление события A обязательно влечет за собой наступление события B , или **каждый элементарный исход ω , принадлежащий A , обязательно принадлежит и событию B .**

Включение $A \subset B$ эквивалентно равенству $AB = A$.



Пример 6. Техническое устройство (ТУ) состоит из $m = 2$ элементов. В теории надежности говорят, что элементы соединены последовательно, если ТУ прекращает функционировать при отказе любого элемента, и соединены параллельно, если прекращение функционирования ТУ наступает только при отказе всех m элементов.

Условное изображение последовательного и параллельного соединений приведены на рисунке.

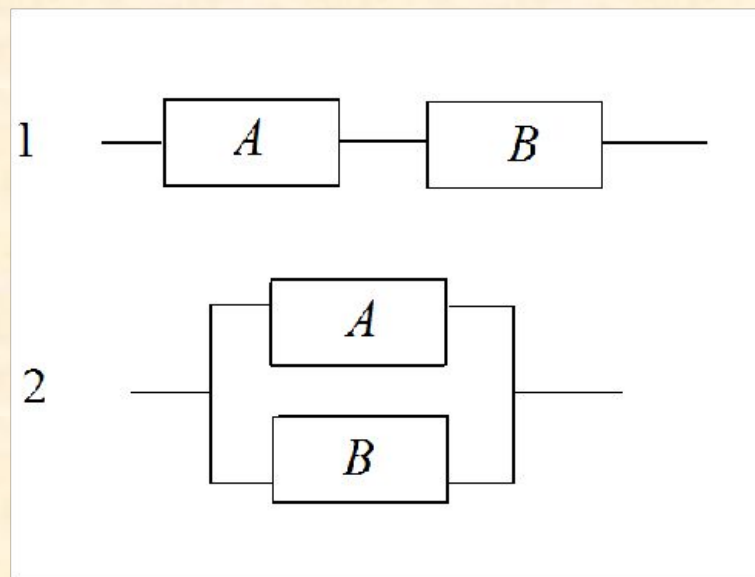
Пусть C — событие, означающее отказ ТУ,

A - событие, означающее отказ элемента A ; B - событие, означающее отказ элемента B ;

Тогда события C , A и B связаны соотношениями:

для рис. 1 $C = A \cap B$

для рис. 2 $C = A \cup B$.



§ 3. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Определение 13. *Алгеброй событий* \mathbf{A} называют такое замкнутое множество, для которого определены операции сложения, умножения и дополнения:

1) если подмножества $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{A}$,

то их объединение: $A \cup B \in \mathbf{A}$

и их пересечение: $A \cap B \in \mathbf{A}$;

2) если подмножество $A \in \mathbf{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathbf{A}$

и удовлетворяющее условиям:

$$\Omega \in \mathbf{A}$$

$$\emptyset \in \mathbf{A}$$

то есть алгебра событий содержит достоверное событие Ω и невозможное событие \emptyset .

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ

- $A+B = B+A,$
 $AB = BA.$ – Коммутативность относительно сложения и умножения событий
- $(A+B)+C = A+(B+C),$
 $(AB)C = A(BC).$ – Ассоциативность относительно сложения и умножения событий
- $A(A+B) = A,$
 $A+AB = A.$ – Закон поглощения

Следствия из свойств алгебры событий

- $A+A = A; \quad AA = A$
 - $A+\emptyset = A; \quad A+\Omega = \Omega$
 - $A\emptyset = \emptyset; \quad A\Omega = A$
- $A(B+C) = AB+AC,$
 $A+BC = (A+B)(A+C).$ – Дистрибутивность относительно сложения и умножения событий
 - $A\cdot\bar{A} = \emptyset, \quad A+\bar{A} = \Omega;$
 - $\overline{\bar{A}} = A, \quad \overline{\emptyset} = \Omega, \quad \overline{\Omega} = \emptyset.$
 - $\overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B}, \quad \overline{A\cdot B} = \bar{A}+\bar{B}. \quad$ – Свойство двойственности.

§ 4. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Определение 15 (философское). **Вероятность** – численная мера степени объективной возможности появления события.

В современной математике вводится на основании аксиом.

1. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ (по Колмогорову)

Определение 16 (аксиоматическое). **Вероятность события A** – некоторое число $P(A)$, которое характеризует меру возможности появления этого события и удовлетворяет аксиомам:

1. $P(A) \geq 0$ – вероятность – неотрицательная функция
2. $P(\Omega) = 1$ – вероятность достоверного события равна 1.
3. if $A=B+C$, $B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(B+C) = P(B) + P(C)$
4. if $A=B \Rightarrow P(A) = P(B)$ – аксиома однозначности.

Замечание. Аксиома 3 распространяется на любое число попарно несовместных событий:

$$\underline{\text{if}} \ A=A_1+A_2+\dots+A_n, \ A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(A_1+A_2+\dots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ

1. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Доказательство: По свойству алгебры логики $A + \bar{A} = \Omega$; $A \square \bar{A} = \emptyset$.

На основании 2 ($P(\Omega) = 1$) и 3 ($P(A) = P(B) + P(C)$) аксиом имеем
 $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) = P(\Omega) - P(\bar{A}) \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

2. $P(\emptyset) = 0$.

Доказательство: Так как $P(\Omega) = 1$ и $\Omega = \bar{\emptyset}$

$$\Rightarrow P(\emptyset) \stackrel{(1)}{=} 1 - P(\bar{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 0$$

3. \forall события A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

Доказательство: Исходя из 1 аксиомы определения 1б: $P(A) \geq 0$ и $P(\bar{A}) \geq 0$

С другой стороны, на основании 1 свойства

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

ЧАСТОТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть проведена серия из n опытов, в каждом из которых появляется или не появляется событие A .

Определение 17. **Частотой события A** в данной серии опытов называется отношение числа m опытов в которых появилось событие A к общему числу опытов:

$$W = P^*(A) = \frac{m}{n}$$

1. $P(A) \geq 0$ $P^*(A) = m / n \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$ $P^*(A) = n / n = 1$

3. if $A=A_1+A_2$, $A_1 \square A_2 = \emptyset \Rightarrow$

$$P^*(A) = P^*(A_1+A_2) = (m_1 + m_2) / n = m_1 / n + m_2 / n = P^*(A_1) + P^*(A_2)$$

§ 5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ТЕОРЕМА сложения вероятностей. Для любых событий $A, B \in \Omega$ верно

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

Определение 18. Вероятность события A , вычисленная при условии, что имело место другое событие B , называется **условной вероятностью события A** .

Обозначение условной вероятности события A : $P(A | B)$

Вычисляется по формуле

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Определение 19. Два события называются **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

$$P(A) = P(A | B); \quad P(B) = P(B | A).$$

Условие **независимости** события A от события B :

$$P(A | B) = P(A)$$

Условие **зависимости** события A от события B :

$$P(A | B) \neq P(A)$$

ТЕОРЕМА умножения вероятностей. Для любых событий $A, B \in \Omega$

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Следствия

1. **Определение независимости** событий A и B : $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

2. Для независимых событий A_i :

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

ТЕОРЕМА Если события A и B – *независимы*, то

- \overline{A} и \overline{B} – *независимы*,
- \overline{A} и B – *независимы*,
- A и \overline{B} – *независимы*.

§ 6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Основная формула комбинаторики Пусть даны k групп элементов

Пусть i -я группа состоит из n_i элементов

Тогда число способов выбрать по одному элементу из каждой группы равно

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

Число размещений из n по k (выбор k элементов из n с учетом их порядка)

без повторений	с повторениями
$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\left(A_n^k\right)_{\text{повт.}} = n^k$

Число перестановок из n элементов (размещений из n по n , т.е. при $k = n$)

без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

Число сочетаний из n по k (выбор k элементов из n без учета их порядка)

без повторений	с повторениями
$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$	$\left(C_n^k\right)_{\text{повт.}} = C_{n+k-1}^k$

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Определение. События A и B называются **равновозможными**, если их вероятности равны: $P(A) = P(B)$.

Определение. Если опыту соответствует пространство Ω элементарных исходов ω_i , для которых

1) число элементарных исходов ω_i – конечное,

2) все ω_i – равновозможные: $p(\omega_1) = \dots = p(\omega_n)$,

то говорят, что *опыт укладывается в классическую схему* (или схему случаев).

Определение. **Равновозможные** элементарные события (исходы) ω_i называются *случаями* или *шансами*.

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Опыт, удовлетворяющий условию равновозможности элементарных исходов, называют «классической схемой».

Пусть N — общее число равновозможных элементарных исходов в Ω , N_A — число элементарных исходов, образующих событие A (или, как говорят, благоприятствующих событию A).

Определение 2.1. Вероятностью события A называют отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу N равновозможных элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Данное определение вероятности события принято называть классическим определением вероятности.

Замечание. Наряду с названием «классическая схема» используют также названия «случайный выбор», «равновероятный выбор»

2.3. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности обобщает классическое на случай **бесконечного множества элементарных исходов** Ω , когда Ω – подмножество пространства \mathbf{R} (числовой прямой), \mathbf{R}^2 (плоскости), \mathbf{R}^n (n-мерного евклидова пространства).

В пространстве \mathbf{R} в качестве подмножеств будем рассматривать лишь промежутки или их объединения, т.е. подмножества, которые имеют длину. В пространстве \mathbf{R}^2 — те подмножества, которые имеют площадь, и т.д.

в зависимости от того, какому пространству принадлежит Ω :

мера $\mu(A)$ подмножества A :

в \mathbf{R} : $\mu(A)$ – длина,

в \mathbf{R}^2 : $\mu(A)$ – площадь

в \mathbf{R}^3 (\mathbf{R}^n): $\mu(A)$ – объем (обобщенный объем)

Пространство элементарных исходов Ω имеет конечную меру, а вероятность попадания „случайно брошенной“ точки в любое подмножество Ω пропорциональна мере этого подмножества и не зависит от его расположения и формы. В этом случае говорят, что рассматривается „геометрическая схема“ или „точку наудачу бросают в область Ω “.

Определение Тройку (Ω, \mathcal{A}, P) , состоящую из пространства элементарных исходов Ω , с σ -алгеброй событий \mathcal{A} и определенной на Ω вероятности P , называют *вероятностным пространством*.

Формула полной вероятности

Предположим, что в результате опыта может произойти одно из n событий

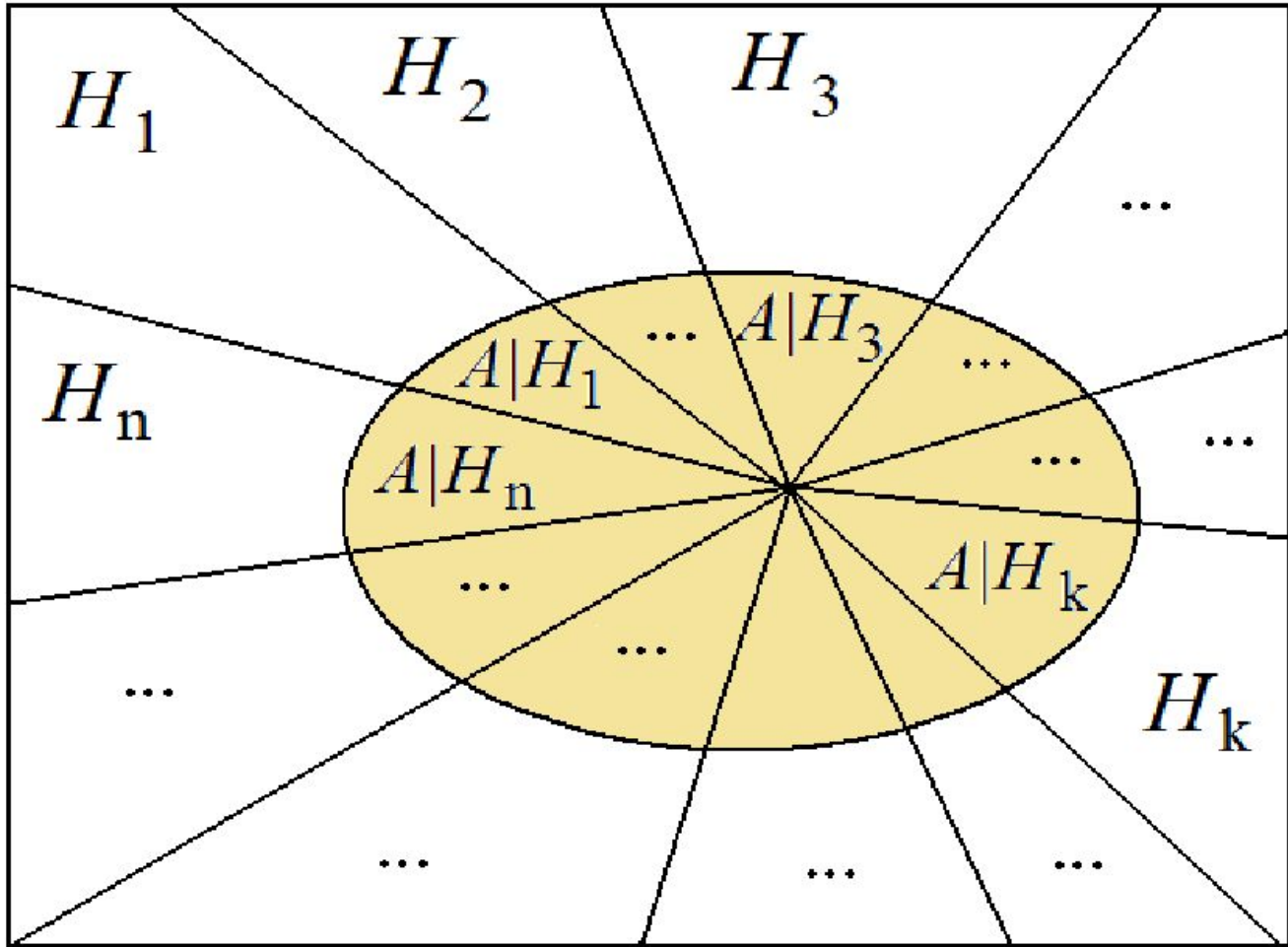
H_1, H_2, \dots, H_n , которые удовлетворяют следующим двум условиям:

- 1) они являются попарно несовместными, т.е. $H_i \cap H_j = \emptyset$ при $i \neq j$
- 2) хотя бы одно из них обязательно должно произойти в результате опыта, другими словами, их объединение есть достоверное событие,

т.е. $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \bigcup_{k=1}^n H_k = \Omega$

Определение События H_1, H_2, \dots, H_n удовлетворяющие условиям 1 и 2, называют *гипотезами*.

Если события удовлетворяют второму из двух указанных требований, то их совокупность называют *полной группой событий*. Таким образом, гипотезы — это попарно несовместные события, образующие полную группу событий. вычисления безусловной вероятности события A .



Формула полной вероятности

Определение События H_1, H_2, \dots, H_n удовлетворяющие условиям 1 и 2, называют *гипотезами*.

Если события удовлетворяют второму из двух указанных требований, то их совокупность называют *полной группой событий*.

Таким образом, гипотезы — это попарно несовместные события, образующие полную группу событий.

Теорема Пусть для некоторого события A и гипотез

H_1, H_2, \dots, H_n известны $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$,

и $P(A | H_1), P(A | H_2), \dots, P(A | H_n)$. Тогда безусловную вероятность определяют по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) \cdot P(H_2)P(A | H_2) \cdot \dots \cdot P(H_n)P(A | H_n)$$

которую называют *формулой полной вероятности*.

Формула Байеса

Пусть по-прежнему некоторое событие A может произойти с одним из событий, H_1, H_2, \dots, H_n образующих полную группу попарно несовместных событий, называемых, как уже отмечалось, гипотезами. Предположим, что известны вероятности гипотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, и что в результате опыта событие A произошло, т.е. получена дополнительная информация. Как „изменятся“ вероятности гипотез, т.е. чему будут равны условные вероятности

$$P(H_1 | A), P(H_2 | A), \dots, P(H_n | A)$$

если известны также условные вероятности $P(A | H_1), P(A | H_2), \dots, P(A | H_n)$ события A ? Для ответа на этот вопрос используют следующую теорему.

Теорема. Пусть для некоторого события A , $P(A) > 0$, и гипотез H_1, H_2, \dots, H_n известны $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, $P(A | H_1), P(A | H_2), \dots, P(A | H_n)$. Тогда условная вероятность $P(H_i | A)$, $i = 1, \dots, n$, определяется формулой Байеса

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$