Тема: «Уравнения, содержащие переменную под знаком функции «антье»»

Автор работы: Земская Ольга
ученица 11 «А» МБОУ «СОШ №4»
Руководитель:
Никифорова Наталья
Владимировна

г. Ангарск, 2015

Цели

- Систематизировать по методам решения уравнения, содержащие целую часть числа.

Задачи

- Подобрать и рассмотреть примеры задач, содержащих целую часть числа;
- Научиться приемам и методам подхода к решению задач, содержащих целую часть числа;
- Показать различные способы решения уравнений, содержащих целую часть числа;

Гипотеза

- Можно ли написать алгоритм решения уравнений содержащих целую часть?

Объект исследования:

уравнения, содержащие переменную под знаком функции «антье».

Введение:

В работе систематизированы уравнения содержащие целую часть числа по видам решения. Всего в работе рассмотрено четыре вида уравнений:

- I вид: $[f(x)]=a$
- II вид: $[f(x)]= g(x)$
- IIIвид: $[f(x)]= [g(x)]$
- IV вид: $[f(x)]^2 \pm [f(x)] = a$

- Работа адресована школьникам, которые принимают участие в математических олимпиадах.
- Материал работы может быть использован на факультативных занятиях по математике, а так же для самостоятельной работы обучающихся.

Целая часть числа «антье»

- Определение: целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число n, не превосходящее x.

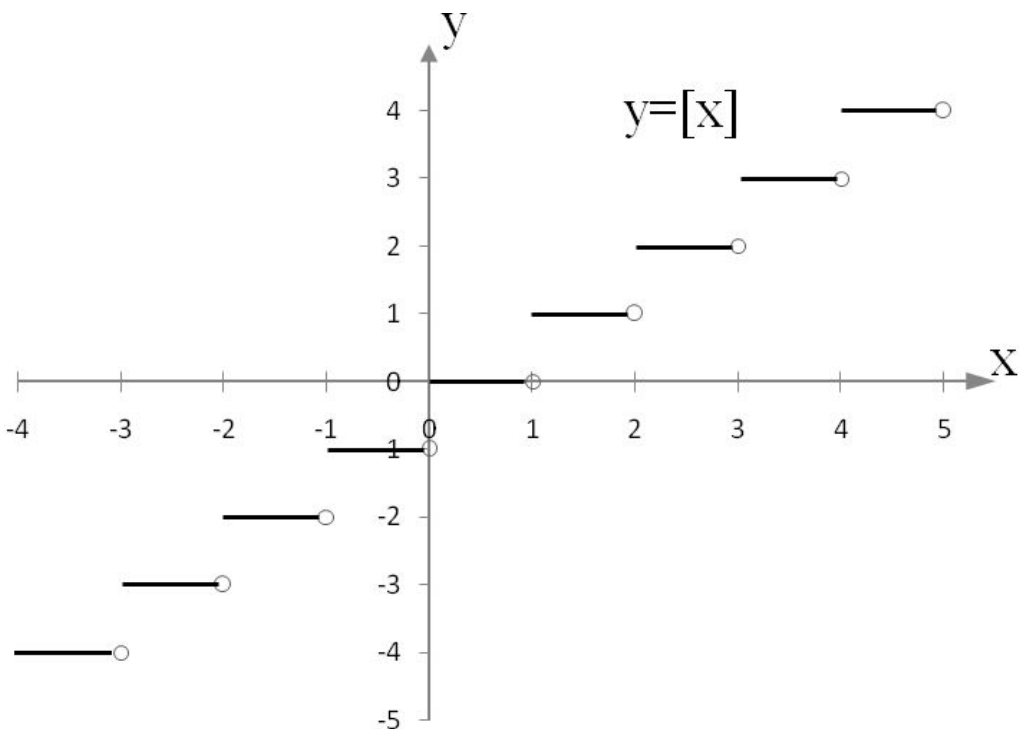
Из определения =>, что $[x] \le x < [x] + 1 \Leftrightarrow 0 \le x = [x] < 1$

- Антье обозначается как $[x]$ (неизвестная величина заключенная в квадратные скобки) или $E(x)$, где E- первая буква французского слова entire- целый.

Свойства целой части действительного числа

1. $[\,x\,] = x$, если $x \in Z$
2. $[\,x\,] \le x < [\,x\,] + 1$ (любое число больше своей целой части, но меньше целой части, увеличенной на 1)
3. $[\,x + m\,] = [\,x\,] + m$, где $m \in Z$

График функции y=[x] построим пользуясь определением целой части



Основные способы решения уравнений с целой частью
I вид:[f(x)]=a

[2x+0,2]= 1

по свойству 2 данное уравнение равносильно неравенству:

$1 \le 2x+0{,}2 < 2$

$0{,}8 \le 2x < 1{,}8$

$0{,}4 \le x < 0{,}9$

Ответ: $x \in [0{,}4; 0{,}9)$

II вид: $[f(x)] = g(x)$

$[x^2-5]=x+7$

Решение:

Поскольку левая часть уравнения целое число, то и правая часть тоже должна быть целым числом , так как $7 \in Z$ то и $x \in Z$.

Значит $[x^2-5]=x^2-5$ => уравнение принимает вид: $x^2-5= x+7$

=> $x^2-6x-7=0$

$$x_{1;2}= 3\pm\sqrt{9+7}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3-4 \\ x=3+4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-1$; $x=7$.

III вид: $[f(x)] = [g(x)]$

$[x-1] = [\frac{x+2}{2}]$

1) $[x-1] = t \in Z \Rightarrow [(x+2)/2] = t$

2) По определению $\Rightarrow$

$$\begin{cases} t \le x-1 < t+1 \\ t \le (x+2)/2 < t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+1 \le x < t+2 \\ 2t-2 \le x < 2t \end{cases}$$

3) Если $t+2 \le 2t-2 \Rightarrow t \ge 4 \Rightarrow$ $x = \varnothing$

т.к. $[x-1] = t$ и $[(x+2)/2] = t$

$$\begin{cases} 4 \le x-1 < 5 \\ 4 \le (x+2)/2 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \le x < 6 \\ 6 \le x < 8 \end{cases}$$

4) Если $2t \le t+1 \Rightarrow t \le 1 \Rightarrow x = \varnothing$

$$\begin{cases} 1 \le x-1 < 2 \\ 1 \le (x+2)/2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le x < 3 \\ 0 \le x < 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} t \ge 4 \Rightarrow \text{не имеет решения} \\ t \le 1 \end{array} \right.$$

$1 < t < 4,\ t \in Z \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array} \right.$$

5) Для $t = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3 \le x < 4 \Rightarrow x \in [3;4) \\ 2 \le x < 4 \end{cases}$

6) Для $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} 4 \le x < 5 \Rightarrow x \in [4;5) \\ 4 \le x < 6 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} x \in [3;4) \\ x \in [4;5) \end{array} \right. \Rightarrow \quad x \in [3;5)$$

Ответ: $x \in [3;5)$

IV вид: $[f(x)]^2 \pm [f(x)] = a$

$[\ x + \frac{1}{2}\ ] + [x]^2 = [2x] + 2$

Сначала докажем, что для ∀ действия, значению переменной x справедливо равенство:

$[2x] = [x] + [\ x + \frac{1}{2}\ ]$

Доказательство:

∀ x ∈ R можно представить в виде суммы его целой и дробной части:

x=k+a, где k ∈ Z, $0 \le a < 1 \Rightarrow [2x] = [2k + 2a] = 2k + [2a]$.

$[x] = k$, $[\ x + \frac{1}{2}\ ] = k + [\ a + \frac{1}{2}\ ]$.

Докажем, что $2k + [2a] = k + k + [a + \frac{1}{2}]$ равносильно равенству $[2a] = [a + \frac{1}{2}]$.

Т.к. $0 \leq a < 1$ рассмотрим два случая:

1) $a \in [0; \frac{1}{2})$ в этом случае $[2a]=0$ и $[a + \frac{1}{2}]=0$.

2) $a \in [\frac{1}{2}; 1)$ в этом случае $[2a]=1$ и $[a + \frac{1}{2}]=1$.

Таким образом, требуемое равенство $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$ справедливо для $\forall$ действительного значения переменной x.

$[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$

$[x+\frac{1}{2}] + [x]^2 = [2x] + 2$

$[x]^2 - [x] - 2 = 0$

$$D=9 \Rightarrow [x] = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} [x]=-1 \\ [x]=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-1; 0) \\ x \in [2; 3) \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-1; 0)$

Заключение

- «Целая часть числа» - сложная и интересная тема математики. Это понятие широко используются в теории чисел, теории вероятностей и других разделах математики, а также в смежных науках. Данная работа позволяет изучить разнообразные виды решения уравнений.
- К сожалению, современная школьная программа не предусматривает изучение данной темы. Материал можно использовать на факультативах, на занятиях математических кружков, начиная с девятого по одиннадцатый классы. Работа поможет подготовиться к олимпиадам по математике учащимся 9-11 классов.
- В ходе исследования, выяснилось, что общего алгоритма решения уравнений содержащих целую часть числа не существует.

Спасибо за внимание!