Тензор скоростей деформации

Выполнил ст.гр.МПМ-12 А.И. Меркель

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \left\| \varepsilon_{ik} \right\| \qquad (1)$$

Таблица (1) определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга.

Действительно, вектор v — тензор первого ранга.

Совокупность величин $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k}$ определяет тензор второго ранга $\left\| \frac{\partial \upsilon_i}{\partial \upsilon_k} \right\|$. Его всегда можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Тензор (1) $\varepsilon = \left\| \varepsilon_{ik} \right\|$ есть симметричная часть тензора $\left\| \frac{\partial \upsilon_i}{\partial \upsilon_k} \right\|$.

Доказательство тензорного характера величин ε_{ik} можно провести и непосредственно. Имеем равенство $v_b = v_a + \frac{1}{2}\Omega \times \rho + gradF$; в нем v_a, v_b - векторы, $\Omega \times \rho$ - произведение псевдовектора $\boldsymbol{\Omega}$ на вектор $\boldsymbol{\rho}$ – также вектор. Следовательно v_d - также вектор.

Рассмотрим скалярное произведение $v_d \bullet \boldsymbol{\rho}$. Это произведение – скаляр, инвариант.

Для скалярного произведения, так как $v_d = gradF$, имеем:

$$v_d \bullet \rho = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2}\xi_2 + \frac{\partial F}{\partial \xi_3}\xi_3. \qquad (2)$$

Но $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ - однородная функция второй степени; по теореме Эйлера об однородных функциях можем записать: $v_d \bullet \rho = 2F$. Таким образом, F-инвариант, не зависящий от системы координат.

Рассмотрим две системы координат. Пусть ξ_1', ξ_2', ξ_3' - старые координаты, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 - новые. Так как $F = F'$, то, имея в виду: $F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ik}\xi_1\xi_k.$ можем записать:

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\varepsilon'_{mn}\xi'_m\xi'_n = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\xi_i\xi_j \qquad (3)$$

Выразим старые координаты через новые:

$$\xi_1 = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{mi}\xi'_m \quad \xi_1 = \sum_{n=1}^{3} \alpha_{nj}\xi'_n \tag{4}$$

И подставим (4) в правую часть (3),тем самым получив (5):

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\varepsilon'_{mn}\xi'_m\xi'_n = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\left(\sum_{m=1}^{3}\alpha_{mi}\xi'_m\right)\left(\sum_{n=1}^{3}\alpha_{nj}\xi'_n\right) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\xi'_m\xi'_n\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\alpha_{mi}\alpha_{nj}\right).$$

Приравнивая коэффициенты, получаем:

$$\varepsilon'_{mn} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\alpha_{mi}\alpha_{nj} \tag{6}$$

Формула (6) - формула преобразования компонент тензора второго ранга при переходе от одной системы координат к другой. Следовательно, таблица $\left\|\varepsilon_{ik}\right\|$ есть аффинный ортогональный тензор второго ранга — **тензор скоростей деформаций**.