

Тензор скоростей деформации

Выполнил ст.гр.МПИМ-12 А.И.

Меркель

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \|\varepsilon_{ik}\| \quad (1)$$

Таблица (1) определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга. Действительно, вектор v — тензор первого ранга.

Совокупность величин $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ определяет тензор второго ранга $\|\frac{\partial v_i}{\partial v_k}\|$. Его всегда можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Тензор (1) $\varepsilon = \|\varepsilon_{ik}\|$ есть симметричная часть тензора $\|\frac{\partial v_i}{\partial v_k}\|$.

Доказательство тензорного характера величин ε_{ik} можно провести и непосредственно. Имеем равенство $v_b = v_a + \frac{1}{2}\Omega \times \rho + grad F$; в нем v_a, v_b - векторы, $\Omega \times \rho$ - произведение псевдовектора Ω на вектор ρ - также вектор. Следовательно v_d - также вектор.

Рассмотрим скалярное произведение $v_d \cdot \rho$. Это произведение - скаляр, инвариант.

Для скалярного произведения, так как $v_d = grad F$, имеем:

$$v_d \cdot \rho = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \xi_2} \xi_2 + \frac{\partial F}{\partial \xi_3} \xi_3. \quad (2)$$

Но $F(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ - однородная функция второй степени; по теореме Эйлера об однородных функциях можем записать: $v_d \cdot \rho = 2F$. Таким образом, F -инвариант, не зависящий от системы координат.

Рассмотрим две системы координат. Пусть ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 - старые координаты, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 - новые. Так как $F = F'$, то, имея в виду:

можем записать:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik} \xi_i \xi_k.$$

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \varepsilon'_{mn} \xi'_m \xi'_n = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j \quad (3)$$

Выразим старые координаты через новые:

$$\xi_1 = \sum_{n=1}^3 \alpha_{mi} \xi'_m \quad \xi_1 = \sum_{n=1}^3 \alpha_{nj} \xi'_n \quad (4)$$

И подставим (4) в правую часть (3), тем самым получив (5):

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \varepsilon'_{mn} \xi'_m \xi'_n = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \left(\sum_{m=1}^3 \alpha_{mi} \xi'_m \right) \left(\sum_{n=1}^3 \alpha_{nj} \xi'_n \right) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \xi'_m \xi'_n \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \alpha_{mi} \alpha_{nj} \right)$$

Приравнявая коэффициенты, получаем:

$$\varepsilon'_{mn} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \alpha_{mi} \alpha_{nj} \quad (6)$$

Формула (6) - формула преобразования компонент тензора второго ранга при переходе от одной системы координат к другой.

Следовательно, таблица $\|\varepsilon_{ik}\|$ есть аффинный ортогональный тензор второго ранга — **тензор скоростей деформаций**.