

Теорема Арцела.  
Равномерная непрерывность.  
Непрерывные отображения  
метрических компактов.  
Обобщенная теорема Арцела.

Подготовил:  
Студент группы АСПМ-10-1  
Огородников Кирилл

# Основные понятия

*Метрическим пространством* называется пара  $(X, \rho)$ , состоящая из некоторого множества (пространства)  $X$  элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции  $\rho(x, y)$ , определенных для любых  $x$  и  $y$  из  $X$  и подчиненной следующим трем аксиомам:

- $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x=y$ ;
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ .

Пусть  $X$  – некоторое множество. Система  $T$  его подмножеств называется *топологией* на  $X$ , если выполнены следующие условия:

- Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих  $T$ , принадлежит  $T$ ;
- Пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих  $T$ , принадлежит  $T$ ;
- $X, \emptyset \in T$ .

Пара  $(X, T)$  называется *топологическим пространством*. Множества, принадлежащие  $T$ , называются *открытыми множествами*.

# Основные понятия

Дополнение до открытых множеств данного топологического пространства называется *замкнутыми множествами*.

*Замыкание множества* — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество.

Топологическое пространство  $F$  называется *компактом*, если любое покрытие  $F$  открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.

Функция  $f(x)$ , определенная в некоторой окрестности точки  $a$ , называется *непрерывной в этой точке*, если существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Функция называется *непрерывной на множестве  $X$* , если она непрерывна в любой точке этого множества.

Функция  $f(x)$  называется *равномерно непрерывной* на множестве  $X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$  что для любых  $x', x''$  из условия  $|x' - x''| < \delta$  вытекает условие  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

# Основные понятия

Семейство  $\Phi$  функций  $\phi$ , определенных на некотором отрезке  $[a, b]$ , называется *равномерно ограниченным*, если существует такое число  $K$ , что  $|\phi(x)| < K$  для всех  $x \in [a, b]$  и всех  $\phi \in \Phi$ .

Семейство  $\Phi = \{\phi\}$  называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon$  для всех  $x_1$  и  $x_2$  из  $[a, b]$  таких, что  $\rho(x_1, x_2) < \delta$ , и для всех  $\phi \in \Phi$ .

Множество  $X$ , лежащее в некотором топологическом пространстве  $T$ , называется *предкомпактным (или компактным относительно  $T$ )*, если его замыкание в  $T$  компактно.

Пусть  $M$  – некоторое множество в метрическом пространстве  $R$  и  $\varepsilon$  – некоторое положительное число. Множество  $A$  из  $R$  называется  *$\varepsilon$ -сетью* для  $M$ , если для любой точки  $x \in M$  найдется хотя бы одна точка  $a \in A$ , такая, что  $\rho(x, a) \leq \varepsilon$ .

Множество  $M$  называется *вполне ограниченным*, если для него при любом  $\varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

# Основные понятия

*Теорема (о предкомпактных подмножествах в метрических пространствах).*

Для того, чтобы множество  $M$ , лежащее в метрическом пространстве  $R$ , было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

Отображение  $f$  метрического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$  называется непрерывным, если для любого открытого множества пространства  $Y$  его полный прообраз является открытым в пространстве  $X$ .

Отображение  $F$  метрического пространства  $X$  в метрическое пространство  $Y$  называется *равномерно непрерывным*, если для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что  $\rho_2(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$  как только  $\rho_1(x_1, x_2) < \delta$  (здесь  $\rho_1$  – расстояние в  $X$ , а  $\rho_2$  – расстояние в  $Y$ ), причем  $\delta$  зависит только от  $\varepsilon$ , но не от  $x_1$  и  $x_2$ .

# Теорема Арцела

**Теорема (Арцела).** Для того чтобы семейство  $\Phi$  непрерывных функций, определенных на отрезке  $[a, b]$ , было предкомпактно в  $C[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равномерно непрерывно.

**Доказательство.**

**Необходимость.** Пусть семейство  $\Phi$  предкомпактно в  $C[a, b]$ . Тогда по теореме о предкомпактных подмножествах в метрических пространствах, для каждого положительного  $\varepsilon$  в семействе  $\Phi$  существует конечная  $\varepsilon/3$ -сеть  $\phi_1, \dots, \phi_k$ . Каждая из функций  $\phi_i$ , как непрерывная функция на отрезке, ограничена:  $|\phi_i(x)| \leq K_i$ .



Чезаре Арцела

# Теорема Арцела

Положим  $K = \max K_i + \varepsilon/3$ . По определению  $\varepsilon/3$ -сети, для всякого  $\phi \in \Phi$  имеем, хотя бы для одного  $\phi_i$ ,

$$\rho(\phi, \phi_i) = \max_x |\phi(x) - \phi_i(x)| \leq \varepsilon/3.$$

Следовательно,

$$|\phi(x)| \leq |\phi_i(x)| + \varepsilon/3 \leq K_i + \varepsilon/3 \leq K.$$

Итак,  $\Phi$  равномерно ограничено.

Далее, так как каждая из функций  $\phi_i$ , образующих  $\varepsilon/3$ -сеть, непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , то для данного  $\varepsilon/3$  существует такое  $\delta_i$ , что

$$|\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| < \varepsilon/3,$$

если  $|x_1 - x_2| < \delta_i$ .

Положим  $\delta = \min \delta_i$ . Для произвольной функции  $\phi \in \Phi$  выберем  $\phi_i$  так, чтобы  $\rho(\phi, \phi_i) < \varepsilon/3$ ; тогда при  $|x_1 - x_2| < \delta$  будем иметь

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq |\phi(x_1) - \phi_i(x_1)| + |\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| + |\phi_i(x_2) - \phi(x_2)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность  $\Phi$  также доказана.

# Теорема Арцела

## Достаточность.

Пусть  $\Phi$  – равномерно ограниченное и равномерно непрерывное семейство функций. В силу теоремы о предкомпактных подмножествах в метрических пространствах для доказательства его предкомпактности в  $C[a, b]$  достаточно показать, что при любом  $\varepsilon > 0$  для него в  $C[a, b]$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть.

Пусть  $|\phi(x)| \leq K$  для всех  $\phi \in \Phi$  и пусть  $\delta > 0$  выбрано так, что  $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon/5$  при  $|x_1 - x_2| < \delta$  для всех  $\phi \in \Phi$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  на оси  $x$  точками  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  на промежутки длины меньше  $\delta$  и проведем через эти точки вертикальные прямые. Отрезок  $[-K, K]$  на оси  $y$  разобьем точками  $y_0 = -K < y_1 < \dots < y_m = K$  на промежутки длины меньше  $\varepsilon/5$  и проведем через эти точки деления горизонтальные прямые. Таким образом, прямоугольник  $a \leq x \leq b, -K \leq y \leq K$  разобьется на ячейки с горизонтальной стороной меньше  $\delta$  и вертикальной стороной меньше  $\varepsilon/5$ . Сопоставим теперь каждой функции  $\phi \in \Phi$  ломаную  $\Psi(x)$  с вершинами в точках  $(x_k, y_l)$ , т.е. в узлах построенной сетки и уклоняющуюся в точках  $x_k$  от функции  $\phi(x)$  меньше, чем на  $\varepsilon/5$  (существование такой ломаной очевидно).

# Теорема Арцела

Поскольку по построению

$$|\phi(x_k) - \Psi(x_k)| < \varepsilon/5, |\phi(x_{k+1}) - \Psi(x_{k+1})| < \varepsilon/5, |\phi(x_k) - \phi(x_{k+1})| < \varepsilon/5,$$

то

$$|\Psi(x_k) - \Psi(x_{k+1})| < 3\varepsilon/5.$$

Так как между точками  $x_k$  и  $x_{k+1}$  функция  $\Psi(x)$  линейна, то  $|\Psi(x_k) - \Psi(x)| < 3\varepsilon/5$  для всех  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ .

Пусть теперь  $x$  – произвольная точка отрезка  $[a, b]$  и  $x_k$  – ближайшая к  $x$  слева из выбранных нами точек деления. Тогда

$$|\phi(x) - \Psi(x)| \leq |\phi(x) - \phi(x_k)| + |\phi(x_k) - \Psi(x_k)| + |\Psi(x_k) - \Psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, ломаные  $\Psi(x)$  по отношению к  $\Phi$  образуют  $\varepsilon$ -сеть.

Число их, очевидно, конечно; таким образом,  $\Phi$  вполне ограничено.

Теорема полностью доказана.

# Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов.

*Теорема.* Непрерывное отображение метрического компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.

**Доказательство.**

Пусть отображение  $F$  метрического компакта  $K$  в метрическое пространство  $M$  непрерывно, но не равномерно непрерывно. Это значит, что для некоторого  $\varepsilon > 0$  и каждого натурального  $n$  найдутся в  $K$  такие точки  $x_n$  и  $x'_n$ , что  $\rho_1(x_n, x'_n) < 1/n$  и в то же время  $\rho_2(F(x_n), F(x'_n)) \geq \varepsilon$  ( $\rho_1$  – расстояние в  $K$ ,  $\rho_2$  – расстояние в  $M$ ). Из последовательности  $\{x_n\}$  в силу компактности  $K$  можно выбрать подпоследовательность  $\{x_{nk}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $x \in K$ . Тогда и  $\{x'_{nk}\}$  сходится к  $x$ ; но при этом для каждого  $k$  должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\rho_2(F(x), F(x_{nk})) \geq \varepsilon/2; \quad \rho_2(F(x), F(x'_{nk})) \geq \varepsilon/2,$$

что противоречит непрерывности отображения  $F$  в точке  $x$ .

# Обобщенная теорема Арцела

Пусть  $X$  и  $Y$  – два метрических компакта и пусть  $C_{XY}$  – множество всех непрерывных отображений  $f$  компакта  $X$  в  $Y$ . Введем в  $C_{XY}$  расстояние при помощи формулы

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

Таким образом  $C_{XY}$  превращается в метрическое пространство.

*Теорема (обобщенная теорема Арцела).* Для предкомпактности множества  $D \subset C_{XY}$  необходимо и достаточно, чтобы входящие в  $D$  функции были равномерно непрерывны.

Последнее означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  должно существовать такое  $\delta > 0$ , что из

$$\rho(x', x'') < \delta$$

вытекает

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon,$$

каковы бы ни были  $f$  из  $D$  и  $x'$  и  $x''$  из  $X$ .

# Обобщенная теорема Арцела

## Доказательство.

Необходимость доказывается так же, как и в теореме Арцела.

Докажем достаточность. Для этого погрузим  $C_{XY}$  в пространство  $M_{XY}$  всех отображений компакта  $X$  в компакт  $Y$  с той же самой метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)),$$

которая была введена в  $C_{XY}$ , и докажем предкомпактность множества  $D$  в  $M_{XY}$ . Так как  $C_{XY}$  замкнуто в  $M_{XY}$ , то из предкомпактности множества  $D$  в  $M_{XY}$  следует его предкомпактность в  $C_{XY}$ .

Зададим  $\varepsilon > 0$  произвольно и выберем  $\delta$  так, чтобы из  $\rho(x', x'') < \delta$  вытекало  $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$  для всех  $f$  из  $D$  и всех  $x', x''$  из  $X$ . Легко видеть, что  $X$  можно представить как сумму конечного числа непересекающихся множеств  $E_i$  таких, что из  $x', x'' \in E_i$  следует  $\rho(x', x'') < \delta$ . Действительно, для этого достаточно выбрать точки  $x_1, \dots, x_n$  так, чтобы они образовали  $\delta/2$ -сеть в  $X$  и положить, например,

$$E_i = B(x_i, \delta/2) \setminus \bigcup_{j < i} B(x_j, \delta/2),$$

где  $B(x_i, \delta/2)$  – шар радиуса  $\delta/2$  с центром  $x_i$ .

# Обобщенная теорема Арцела

Рассмотрим теперь в компакте  $Y$  некоторую конечную  $\varepsilon$ -сеть  $y_1, \dots, y_m$  и пусть  $L$  – совокупность функций  $g(x)$ , принимающих на множестве  $E_i$  значения  $y_j$ . Число таких функций, очевидно, конечно. Покажем, что они образуют  $2\varepsilon$ -сеть по отношению к  $D$  в  $M_{XY}$ . Действительно, пусть  $f \in D$ . Для всякой точки  $x_i$  из  $x_1, \dots, x_n$  найдется такая точка  $y_j$  из  $y_1, \dots, y_m$  что  $\rho(f(x_i), y_j) < \varepsilon$ .

Пусть функция  $g \in L$  выбрана так, что  $g(x_i) = y_j$ . Тогда

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon,$$

если  $i$  выбрано так, что  $x \in E_i$ .

Отсюда вытекает, что конечное множество  $L$  действительно есть  $2\varepsilon$ -сеть для  $D$  и, таким образом,  $D$  предкомпактно в  $M_{XY}$ , а следовательно, и в  $C_{XY}$ .