Теорема Арцела. Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов. Обобщенная теорема Арцела.

Подготовил:
Студент группы АСПМ-10-1
Огородников Кирилл

Основные понятия

Метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества (пространства) X элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции ρ (x, y), определенных для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

- ρ (x, y) = 0 тогда и только тогда, когда x=y;
- ρ (x, y) = ρ (y, x);
- ρ (x, z) ≤ ρ (x, y) + ρ (y, z).

Пусть X – некоторое множество. Система T его подмножеств называется ***топологией*** на X, если выполнены следующие условия:

- Объединение произвольного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T;
- Пересечение конечного семейства множеств, принадлежащих T, принадлежит T;
- X, Ø Є T.

Пара (X, T) называется ***топологическим пространством***. Множества, принадлежащие T, называются ***открытыми множествами***.

Основные понятия

Дополнение до открытых множеств данного топологического пространства называется ***замкнутыми множествами***.

Замыкание множества — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество.

Топологическое пространство F называется ***компактом***, если любое покрытие F открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.

Функция f(x), определенная в некоторой окрестности точки a, называется ***непрерывной в этой точке***, если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Функция называется ***непрерывной на множестве X***, если она непрерывна в любой точке этого множества.

Функция f(x) называется ***равномерно непрерывной*** на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ что для любых x', x'' из условия $|x' - x''| < \delta$ вытекает условие $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Основные понятия

Семейство Ф функций ф, определенных на некотором отрезке [a, b], называется ***равномерно ограниченным***, если существует такое число K, что |ф(x)| < K для всех x Є [a, b] и всех ф Є Ф.

Семейство Ф = {ф} называется ***равностепенно непрерывным***, если для каждого ε > 0 найдется такое δ > 0, что |ф(x1)- ф(x2)| < ε для всех x1 и x2 из [a, b] таких, что ρ (x1, x2) < δ, и для всех ф Є Ф.

Множество X, лежащее в некотором топологическом пространстве T, называется ***предкомпактным*** (***или компактным относительно T***), если его замыкание в T компактно.

Пусть M – некоторое множество в метрическом пространстве R и ε - некоторое положительное число. Множество A из R называется ***ε-сетью*** для M, если для любой точки x Є M найдется хотя бы одна точка a Є A, такая, что ρ (x, a) ≤ ε.

Множество M называется ***вполне ограниченным***, если для него при любом ε > 0 существует конечная ε-сеть.

Основные понятия

Теорема (о предкомпактных подмножествах в метрических пространствах).
Для того, чтобы множество M, лежащее в метрическом пространстве R, было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y называется непрерывным, если для любого открытого множества пространства Y его полный прообраз является открытым в пространстве X.

Отображение F метрического пространства X в метрическое пространство Y называется ***равномерно непрерывным***, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_2(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$ как только $\rho_1(x_1, x_2) < \delta$ (здесь ρ_1 – расстояние в X, а ρ_2 – расстояние в Y), причем δ зависит только от ε, но не от x_1 и x_2.

Теорема Арцела

Теорема (Арцела). Для того чтобы семейство Φ непрерывных функций, определенных на отрезке [a, b], было предкомпактно в C[a, b], необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Чезаре Арцела

Доказательство.

Необходимость. Пусть семейство Φ предкомпактно в C[a, b]. Тогда по теореме о предкомпактных подмножествах в метрических пространствах, для каждого положительного ε в семействе Φ существует конечная ε/3-сеть $\phi_1,\ldots,\phi_k$. Каждая из функций ϕ_i, как непрерывная функция на отрезке, ограничена: $|\phi_i(x)| \leq K_i$.

Теорема Арцела

Положим $K = \max K_i + \varepsilon/3$. По определению $\varepsilon/3$-сети, для всякого $\phi \in \Phi$ имеем, хотя бы для одного ϕ_i,

$$\rho(\phi, \phi_i) = \max_x |\phi(x) - \phi_i(x)| \le \varepsilon/3.$$

Следовательно,

$$|\phi(x)| \le |\phi_i(x)| + \varepsilon/3 \le K_i + \varepsilon/3 \le K.$$

Итак, Φ равномерно ограничено.

Далее, так как каждая из функций ϕ_i, образующих $\varepsilon/3$-сеть, непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна на $[a, b]$, то для данного $\varepsilon/3$ существует такое δ_i, что

$$|\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| < \varepsilon/3,$$

если $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Положим $\delta = \min \delta_i$. Для произвольной функции $\phi \in \Phi$ выберем ϕ_i так, чтобы $\rho(\phi, \phi_i) < \varepsilon/3$; тогда при $|x_1 - x_2| < \delta$ будем иметь

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \le |\phi(x_1) - \phi_i(x_1)| + |\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| + |\phi_i(x_2) - \phi(x_2)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность Φ также доказана.

Теорема Арцела

Достаточность.
Пусть Ф – равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций. В силу теоремы о предкомпактных подмножествах в метрических пространствах для доказательства его предкомпактности в C[a, b] достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ для него в C[a,b] существует конечная ε-сеть.

Пусть $|\phi(x)| \le K$ для всех $\phi \in \Phi$ и пусть $\delta > 0$ выбрано так, что $|\phi(x_1)-\phi(x_2)| < \varepsilon/5$ при $|x_1 - x_2| < \delta$ для всех $\phi \in \Phi$. Разобьем отрезок [a, b] на оси x точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ на промежутки длины меньше δ и проведем через эти точки вертикальные прямые. Отрезок [-K, K] на оси y разобьем точками $y_0 = -K < y_1 < \ldots < y_m = K$ на промежутки длины меньше $\varepsilon/5$ и проведем через эти точки деления горизонтальные прямые. Таким образом, прямоугольник $a \le x \le b$, $-K \le y \le K$ разобьется на ячейки с горизонтальной стороной меньше δ и вертикальной стороной меньше $\varepsilon/5$. Сопоставим теперь каждой функции $\phi \in \Phi$ ломаную $\Psi(x)$ с вершинами в точках (x_k, y_l), т.е. в узлах построенной сетки и уклоняющуюся в точках x_k от функции $\phi(x)$ меньше, чем на $\varepsilon/5$ (существование такой ломаной очевидно).

Теорема Арцела

Поскольку по построению

$$|\phi(x_k)-\Psi(x_k)| < \varepsilon/5,\ |\phi(x_{k+1})-\Psi(x_{k+1})| < \varepsilon/5,\ |\phi(x_k)-\phi(x_{k+1})| < \varepsilon/5,$$

то

$$|\Psi(x_k)-\Psi(x_{k+1})| < 3\varepsilon/5.$$

Так как между точками x_k и x_{k+1} функция $\Psi(x)$ линейна, то $|\Psi(x_k)-\Psi(x)| < 3\varepsilon/5$ для всех $x \in [x_k, x_{k+1}]$.
Пусть теперь x – произвольная точка отрезка [a, b] и x_k – ближайшая к x слева из выбранных нами точек деления. Тогда

$$|\phi(x)-\Psi(x)| \le |\phi(x)-\phi(x_k)| + |\phi(x_k)-\Psi(x_k)| + |\Psi(x_k)-\Psi(x)| \le \varepsilon.$$

Следовательно, ломаные $\Psi(x)$ по отношению к Φ образуют ε-сеть.
Число их, очевидно, конечно; таким образом, Φ вполне ограничено.

Теорема полностью доказана.

Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов.

Теорема. Непрерывное отображение метрического компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.

Доказательство.
Пусть отображение F метрического компакта K в метрическое пространство M непрерывно, но не равномерно непрерывно. Это значит, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и каждого натурального n найдутся в K такие точки x_n и x'_n, что $\rho_1(x_n, x'_n) < 1/n$ и в то же время $\rho_2(F(x_n), F(x'_n)) \geq \varepsilon$ (ρ_1 – расстояние в K, ρ_2 – расстояние в M). Из последовательности $\{x_n\}$ в силу компактности K можно выбрать подпоследовательность $\{x_{nk}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x \in K$. Тогда и $\{x'_{nk}\}$ сходится к x; но при этом для каждого k должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\rho_2(F(x), F(x_{nk})) \geq \varepsilon/2; \quad \rho_2(F(x), F(x'_{nk})) \geq \varepsilon/2,$$

что противоречит непрерывности отображения F в точке x.

Обобщенная теорема Арцела

Пусть X и Y – два метрических компакта и пусть C_{XY} – множество всех непрерывных отображений f компакта X в Y. Введем в C_{XY} расстояние при помощи формулы

$$\rho\,(f,g) = \sup_{x \in X} \rho\,(f(x), g(x)).$$

Таким образом C_{XY} превращается в метрическое пространство.

Теорема (обобщенная теорема Арцела). Для предкомпактности множества $D \subset C_{XY}$ необходимо и достаточно, чтобы входящие в D функции были равностепенно непрерывны.

Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать такое $\delta > 0$, что из

$$\rho\,(x',x'') < \delta$$

вытекает

$$\rho\,(f(x'), f(x'')) < \varepsilon,$$

каковы бы ни были f из D и x′ и x′′ из X.

Обобщенная теорема Арцела

Доказательство.
Необходимость доказывается так же, как и в теореме Арцела.

Докажем достаточность. Для этого погрузим C_{XY} в пространство M_{XY} всех отображений компакта X в компакт Y с той же самой метрикой

$$\rho\,(f,g) = \sup_{x \in X} \rho\,(f(x), g(x)),$$

которая была введена в C_{XY}, и докажем предкомпактность множества D в M_{XY}. Так как C_{XY} замкнуто в M_{XY}, то из предкомпактности множества D в M_{XY} следует его предкомпактность в C_{XY}.

Зададим $\varepsilon > 0$ произвольно и выберем δ так, чтобы из $\rho\,(x',x'') < \delta$ вытекало $\rho\,(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ для всех f из D и всех x', x'' из X. Легко видеть, что X можно представить как сумму конечного числа непересекающихся множеств E_i таких, что из $x', x'' \in E_i$ следует $\rho\,(x',x'') < \delta$. Действительно, для этого достаточно выбрать точки $x_1,\ldots,x_n$ так, чтобы они образовали $\delta/2$-сеть в X и положить, например,

$$E_i = B(x_i, \delta/2) \setminus \bigcup_{j<i} B(x_j, \delta/2),$$

где $B(x_i, \delta/2)$ – шар радиуса $\delta/2$ с центром x_i.

Обобщенная теорема Арцела

Рассмотрим теперь в компакте Y некоторую конечную ε-сеть $y_1,\ldots,y_m$, и пусть L – совокупность функций g(x), принимающих на множестве E_i значения y_j. Число таких функций, очевидно, конечно. Покажем, что они образуют 2ε-сеть по отношению к D в M_{XY}. Действительно, пусть $f \in D$. Для всякой точки x_i из $x_1,\ldots,x_n$ найдется такая точка y_j из $y_1,\ldots,y_m$, что $\rho(f(x_i), y_j) < \varepsilon$.

Пусть функция $g \in L$ выбрана так, что $g(x_i) = y_j$. Тогда

$$\rho(f(x), g(x)) \le \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon,$$

если i выбрано так, что $x \in E_i$.

Отсюда вытекает, что конечное множество L действительно есть 2ε-сеть для D и, таким образом, D предкомпактно в M_{XY}, а следовательно, и в C_{XY}.