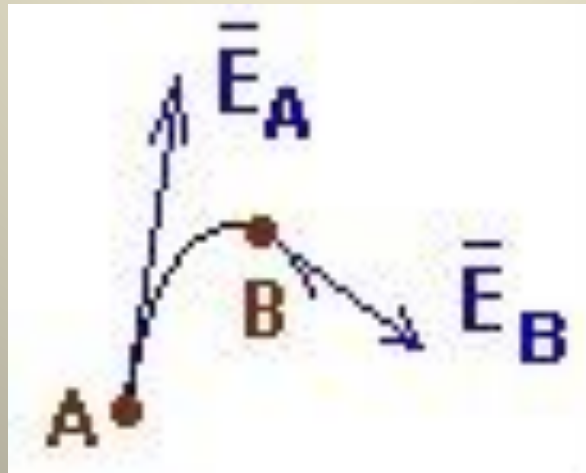


# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

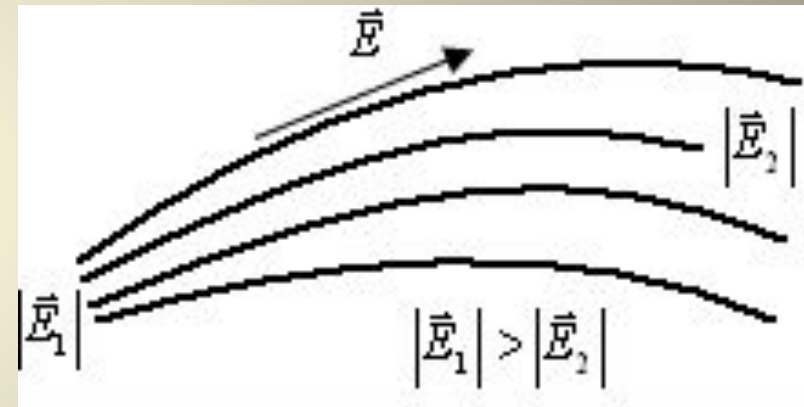
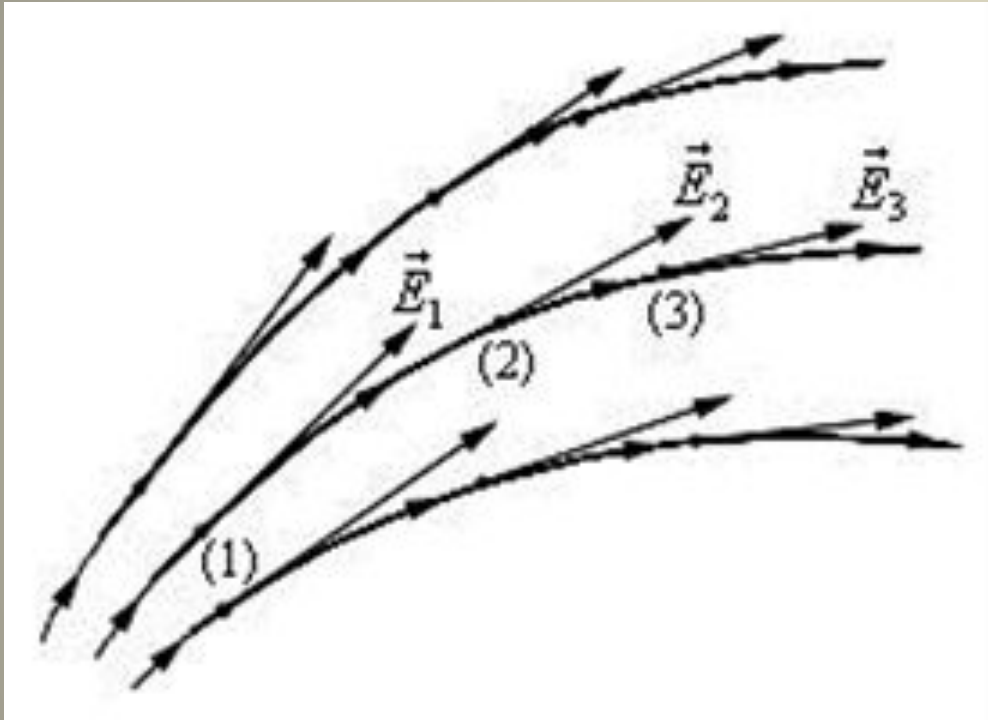
## Лекция 2

# Графическое изображение электростатических полей.

- Фарадей предложил изображать поле линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности электростатического поля в этой точке.
- Такие линии получили название **линий напряженности** или **СИЛОВЫХ ЛИНИЙ**



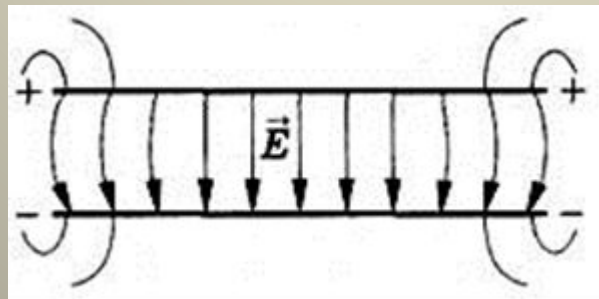
# Линии напряженности



- По густоте силовых линий можно судить о величине напряженности.

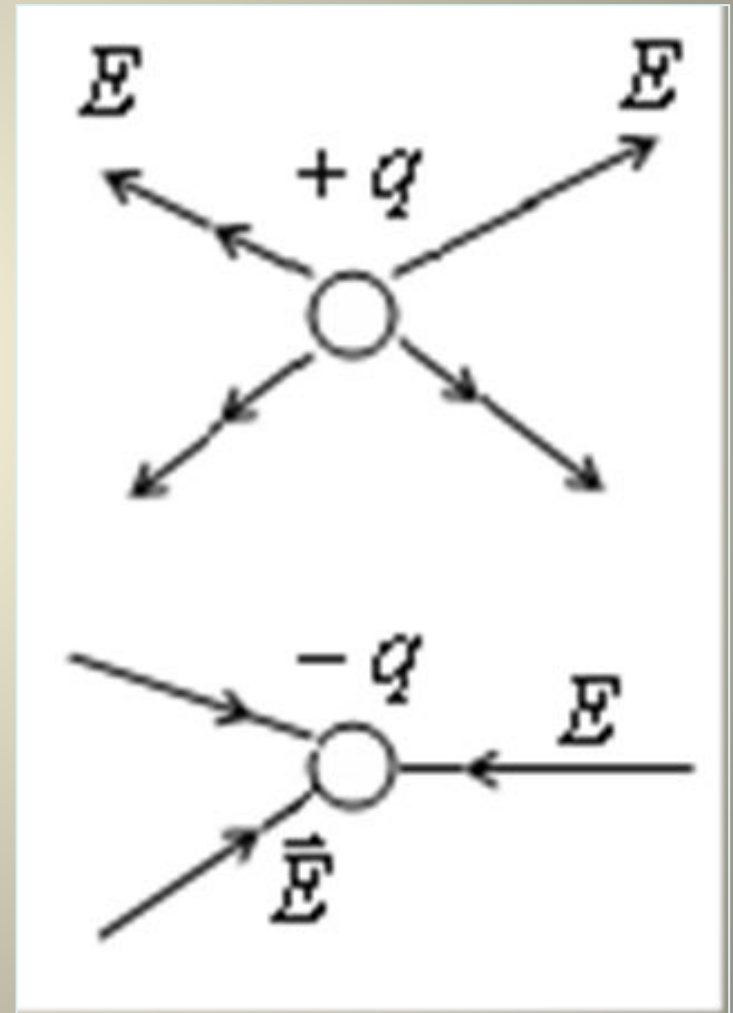
# Свойства силовых линий

- **силовые линии** — это незамкнутые линии: они начинаются на поверхности положительно заряженных тел (или в бесконечности) и оканчиваются на поверхности отрицательно заряженных тел (или в бесконечности);
- **силовые линии** не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор напряженности имеет лишь одно направление;
- между зарядами **силовые линии** нигде не прерываются.



# Линии напряженности

- Для точечных зарядов силовые линии представляют собой радиальные прямые.
- Для положительных зарядов – уходящие от заряда в бесконечность, для отрицательных – приходящие к заряду из бесконечности.



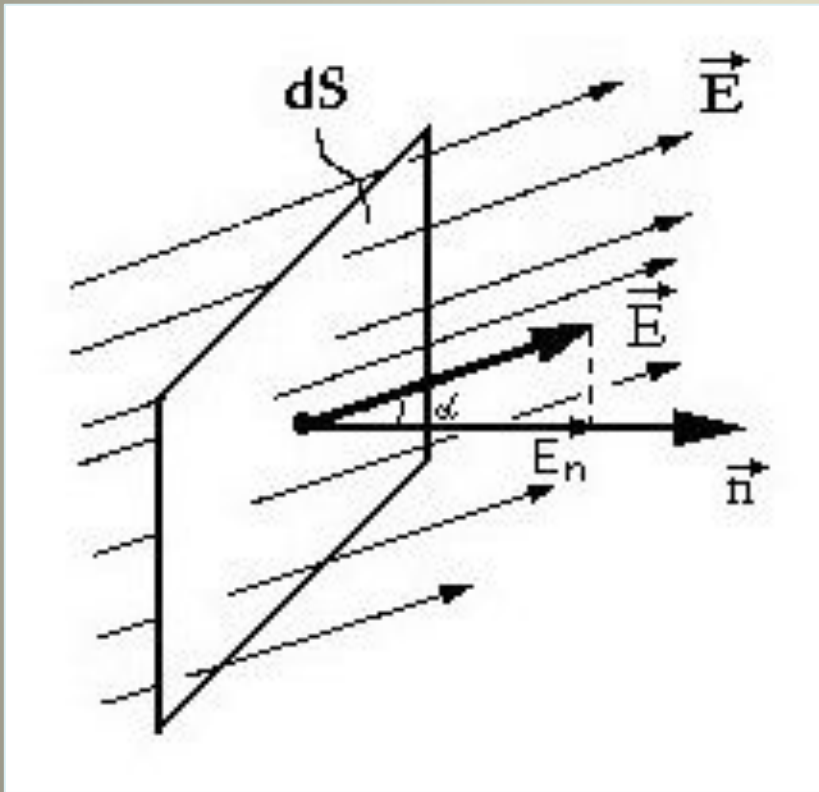
# Поток вектора напряженности электрического поля



рис. 13.4

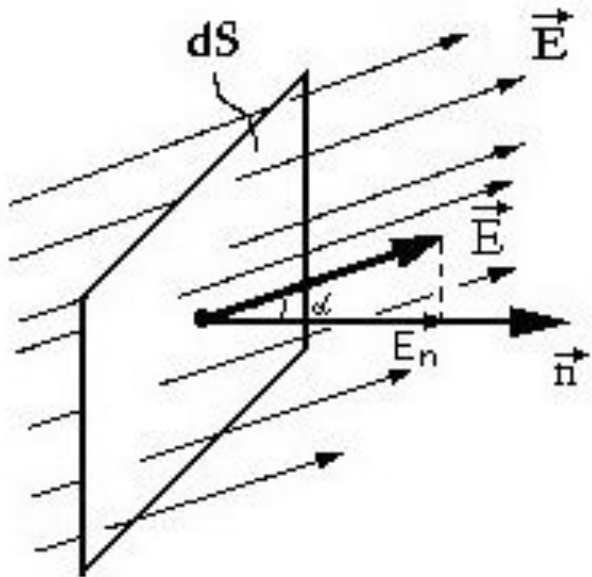
- Число линий вектора напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю  $\vec{E}$ .
- $dS$  – элементарная площадка, в пределах которой электрическое поле однородно.

# Поток вектора напряженности электрического поля



- Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку  $dS$ , нормаль которой образует угол  $\alpha$  с вектором  $\vec{E}$ , равно  $E dS \cos \alpha = E_n dS$ , где
- $E_n$  - проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль к площадке  $dS$ .

# Поток вектора напряженности электрического поля



- Поток вектора напряженности электрического поля через поверхность  $dS$  называется скалярное произведение векторов  $\vec{E}$  и  $d\vec{S}$ ,
- $d\vec{S} = \vec{n} dS$

$$d\Phi_E = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E_n \cdot dS$$



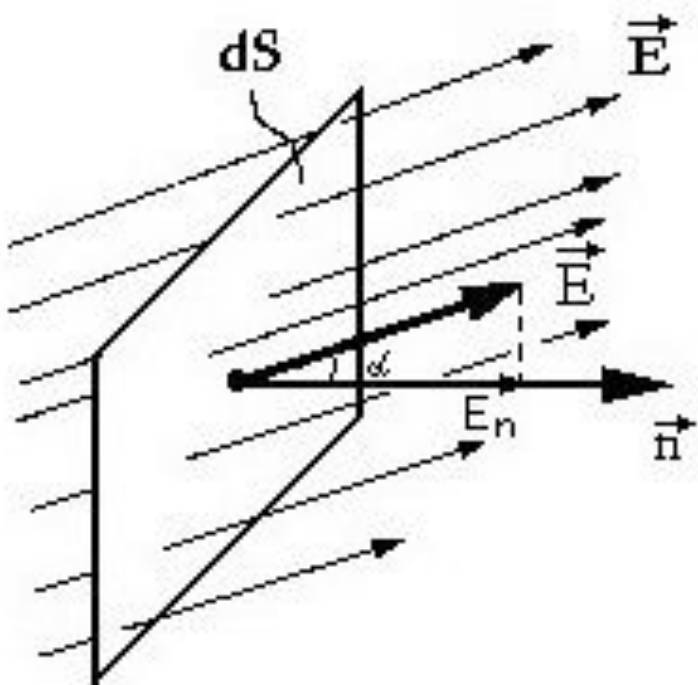
# Поток вектора напряженности электрического поля

- Поток вектора через произвольную поверхность

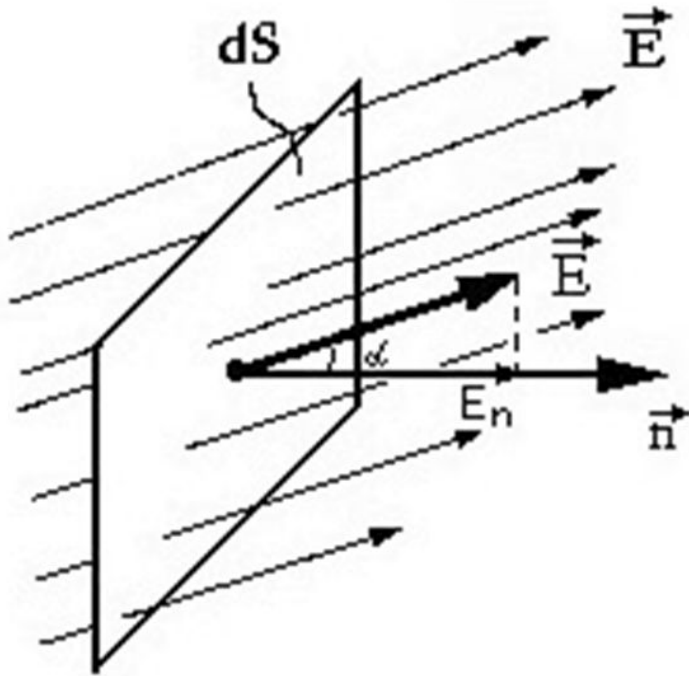
$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

Поток вектора через произвольную замкнутую поверхность

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

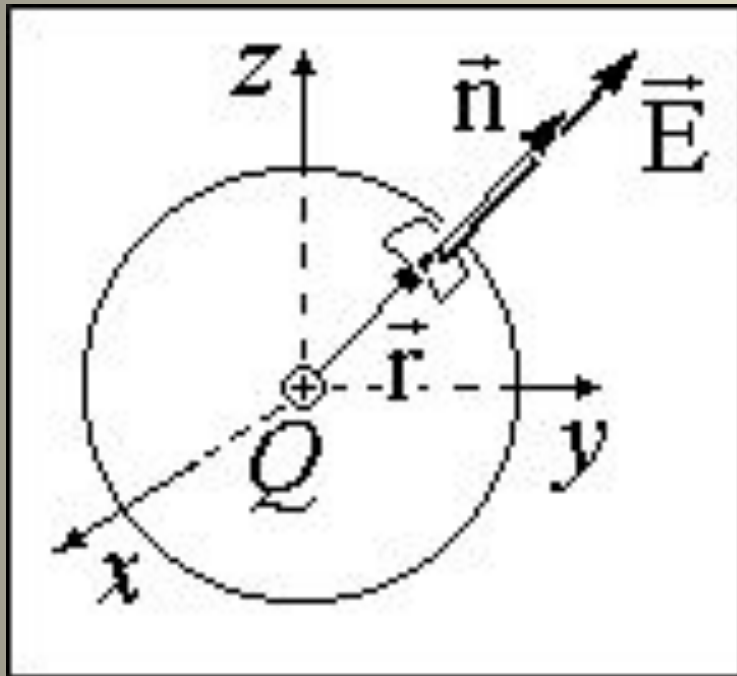


# Поток вектора напряженности электрического поля



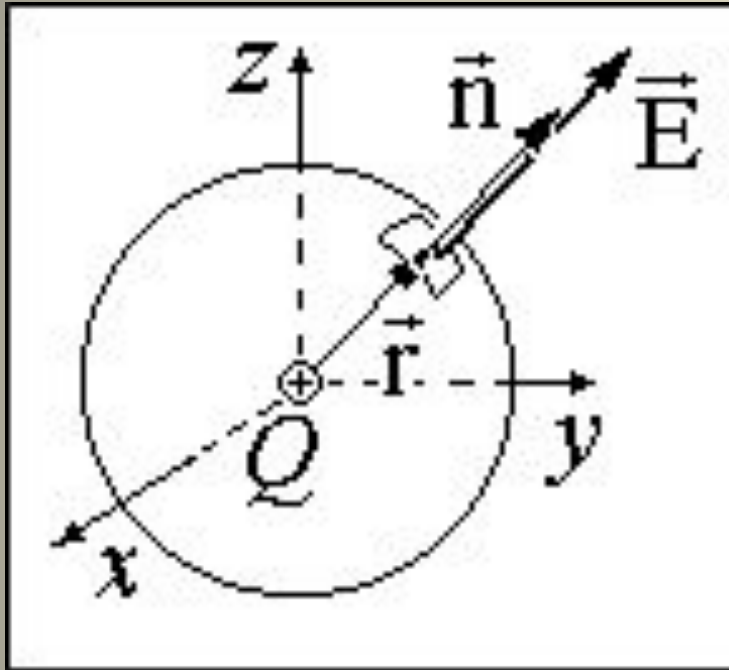
- Поток вектора напряженности является алгебраической величиной: если угол  $\alpha$  – острый ( $\alpha < 90^\circ$ ), то  $\cos \alpha > 0$  и  $\Phi_E > 0$ ,
- Если угол  $\alpha$  – тупой ( $\alpha > 90^\circ$ ), то  $\cos \alpha < 0$  и  $\Phi_E < 0$ .
- Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т.е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме



- К. Гауссом в 1844 доказана теорема (*теорема Гаусса в интегральной форме*), устанавливающая связь источников поля и потока напряженности через произвольную поверхность, окружающую источники

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме



- Поток от точечного заряда через произвольную окружающую его сферу.

$$\Phi_{\text{э}} = \oint E_n dS = \frac{kQ}{r^2} \oint_S dS = \frac{Q4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

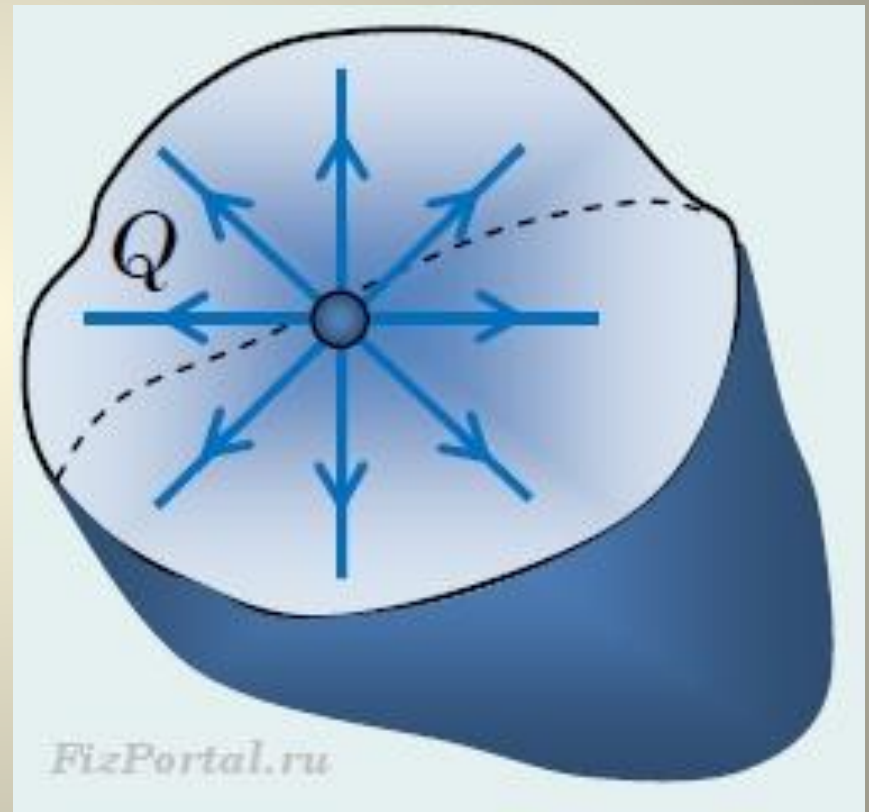
- Силовые линии поля точечного заряда перпендикулярны поверхности концентрической сферы.

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд  $Q$ , поток вектора  $\mathbf{E}$  будет равен  $Q/\epsilon_0$ , т. е.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = Q/\epsilon_0.$$

- Знак потока совпадает со знаком заряда  $Q$ .



# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

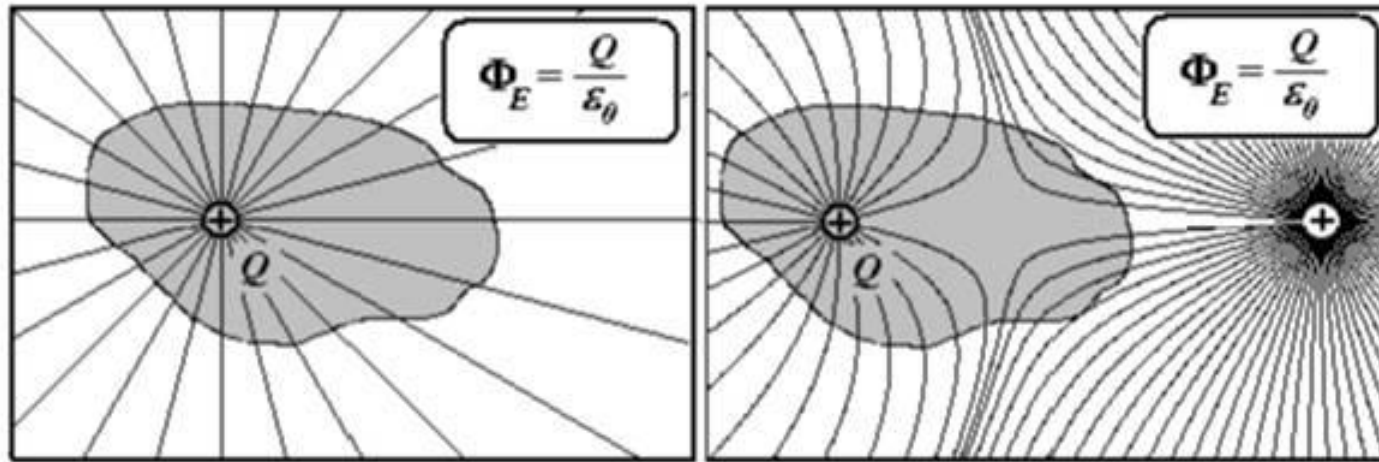


Рис. 164

- Заряды, находящиеся вне рассматриваемой замкнутой поверхности, создают электрическое поле, в том числе и внутри объема, ограниченного рассматриваемой поверхностью.
- Только суммарный поток поля созданного этими зарядами равен нулю («сколько втекает – столько вытекает»).
- Можно сказать, что заряды вне поверхности, перераспределяют поток поля, создаваемый зарядами внутри поверхности .

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Для произвольной поверхности, окружающей  $n$  зарядов
- Используя принцип суперпозиции: напряженность  $\mathbf{E}$  поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей  $\mathbf{E}_i$ , создаваемых каждым зарядом в отдельности

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S (\sum_i \mathbf{E}_i) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S}.$$

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i.$$

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i.$$

- Поток вектора напряженности электростатического поля *в вакууме* сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ .
- Данное выражение представляет собой теорему Гаусса в интегральной форме.



# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью
- $\rho = dQ/dV$ , различной в разных местах пространства.
- Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ , охватывающей некоторый объем  $V$ ,

$$\sum_i Q_i = \int_V \rho dV.$$

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- В дифференциальной форме теорема Гаусса соответствует одному из уравнений Максвелла и выражается следующим образом

в системе СИ: 
$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Здесь —  $\rho$  - объёмная плотность заряда (в случае присутствия среды — суммарная плотность свободных и связанных  $\nabla$  зарядов), а  $\nabla$  - оператор набла.

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Величина мощности источника поля в точке - **дивергенция векторного поля**, обозначается как  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  (от *divergentia* - расходимость).
- Дивергенция векторного поля вычисляется как

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} (\mathbf{A}, d\mathbf{S}) .$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

- это формула для вычисления дивергенции поля  $\mathbf{A}$  в декартовой системе координат.

# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Для трёхмерного декартового пространства оператор набла определяется следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

- Смысл дивергенции состоит в том, что она характеризует расходимость и сходимость линий поля в окрестности точки.
- Дивергенция характеризует интенсивность (обильность) источников и стоков поля.

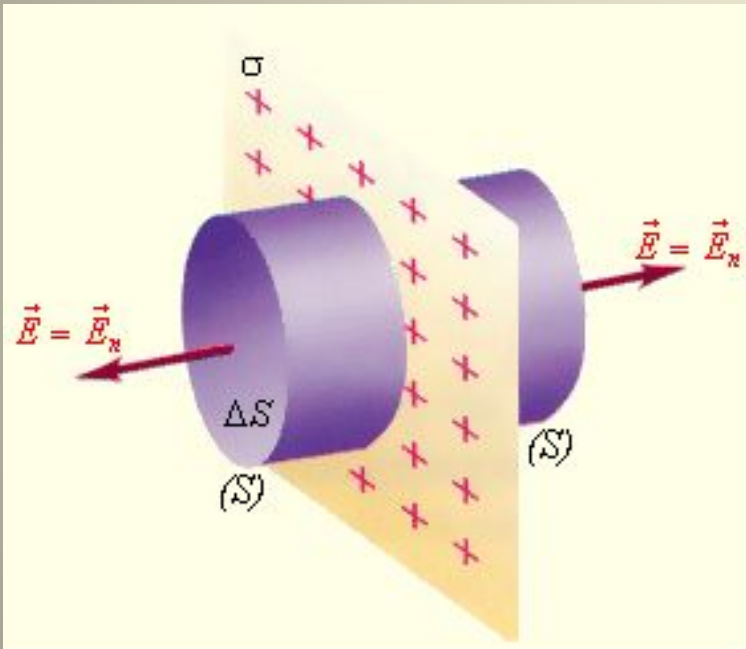
# Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- *Теорема Гаусса в дифференциальной форме:*

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Из тех областей пространства, в которых дивергенция  $\mathbf{E}$  положительна, силовые линии  $\mathbf{E}$  исходят ( $r > 0$ ), в тех областях, где  $\operatorname{div} \mathbf{E} < 0$  силовые линии заканчиваются ( $r < 0$ ), а через те области, где  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  силовые линии проходят, но не рождаются и не исчезают, так как в этих областях  $r = 0$  (зарядов нет).

# Применение теоремы Гаусса для расчета некоторых электростатических полей в вакууме



- **1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.**
- Бесконечная плоскость заряжена с постоянной **поверхностной плотностью  $+\sigma$**
- ( $\sigma = dQ/dS$  — заряд, приходящийся на единицу поверхности).

# Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

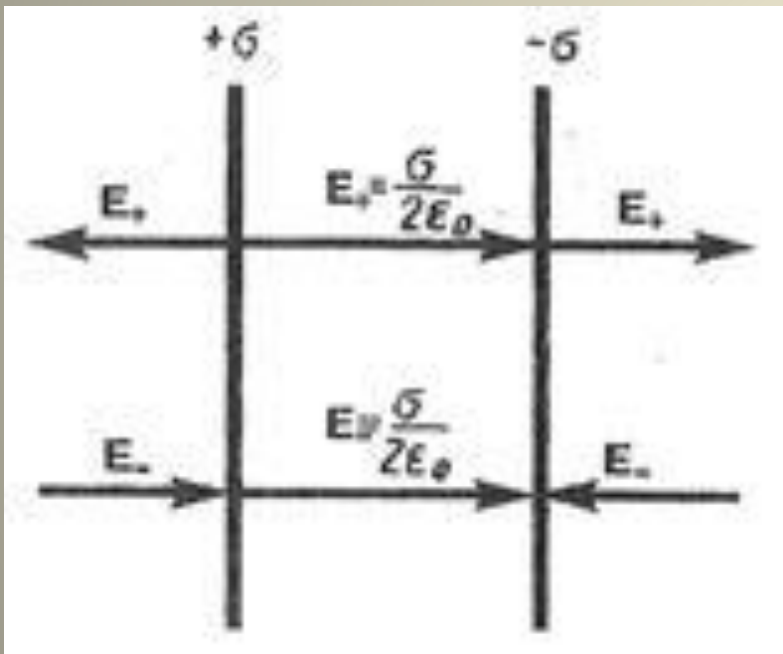
- Поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь боковую поверхность цилиндра = 0 ( $\cos\alpha=0$ )
- Полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания =  $E S$ .
- Заряд, заключенный внутри цилиндрической поверхности, равен  $\sigma S$ .

Согласно теореме Гаусса

$$2 E S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Тогда 
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

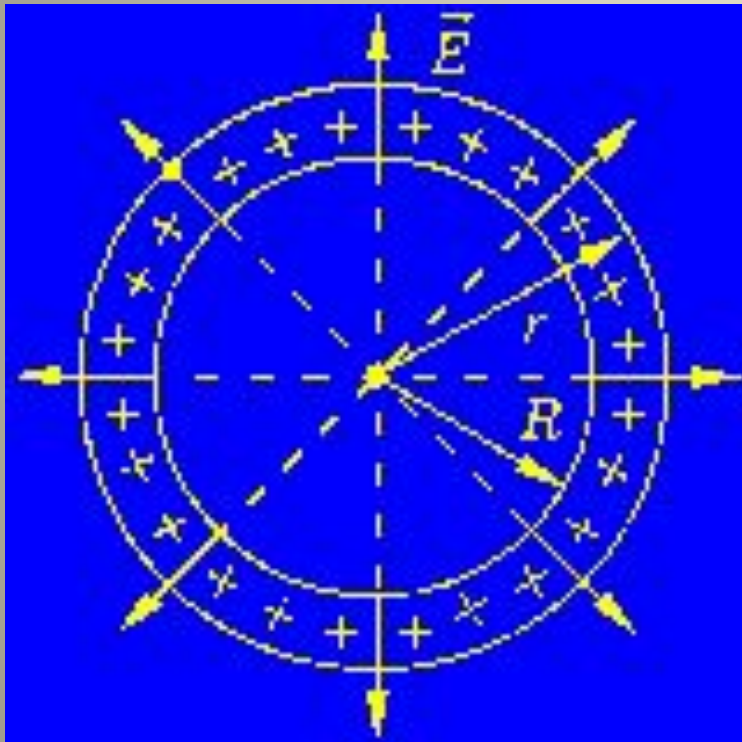
# Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей



- Пусть плоскости заряжены равномерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями  $+\sigma$  и  $-\sigma$ .
- На рисунке верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние — от отрицательной плоскости.
- Слева и справа от плоскостей поля вычитаются (линии напряженности направлены навстречу друг другу), поэтому здесь напряженность поля  $E=0$
- В области между плоскостями  $E = E_+ + E_-$
- Результирующую напряженность  $E = \sigma/\epsilon_0$



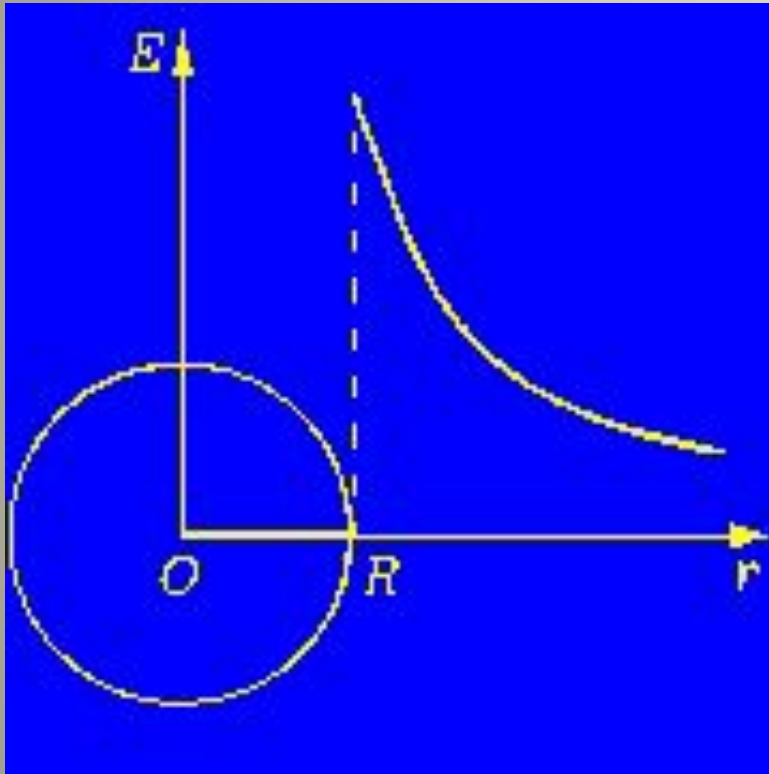
# Поле равномерно заряженной сферической поверхности



- Сферическая поверхность радиуса  $R$  с общим зарядом  $Q$  заряжена равномерно с **поверхностной плотностью  $+\sigma$** . Проведем мысленно сферу радиуса  $r$ , которая имеет общий центр с заряженной сферой. Если  $r > R$ , то внутрь поверхности попадает весь заряд  $Q$ , который создает рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса,

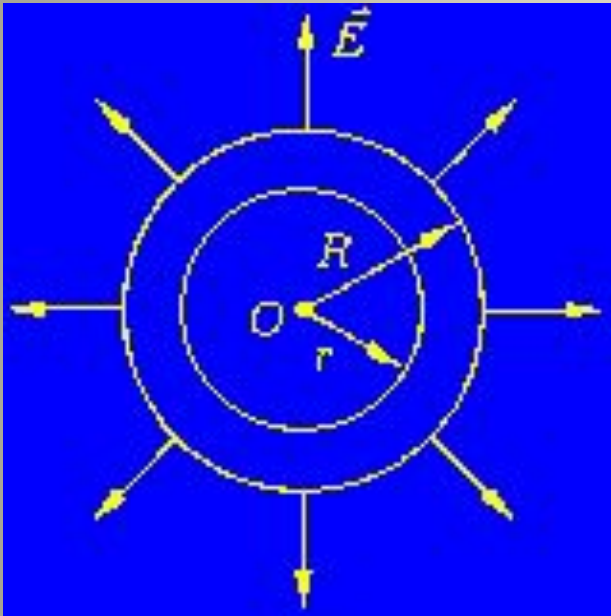
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} (r \geq R)$$

# Поле равномерно заряженной сферической поверхности



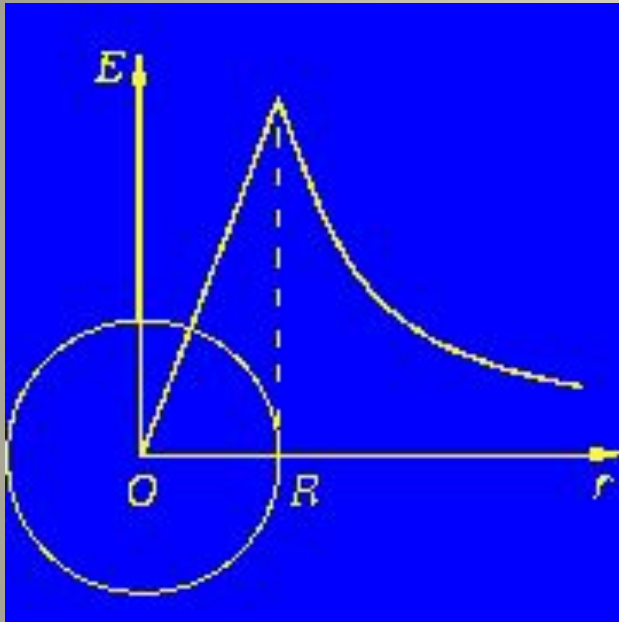
- При  $r > R$  поле убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как у точечного заряда.
- Если  $r' < R$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри себя зарядов, значит внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ( $E=0$ ).

# Поле равномерно заряженного шара



- Шар радиуса  $R$  с общим зарядом  $Q$  заряжен равномерно с **объемной плотностью**  $\rho$  ( $\rho = dQ/dV$  – заряд, который приходится на единицу объема). Для напряженности поля вне шара получится тот же результат, что и в случае (3).
- Внутри же шара напряженность поля будет иная. Сфера радиуса  $r' < R$  охватывает заряд  $Q' = (4/3)\pi r'^3 \rho$ . Поэтому, используя теорему Гаусса,  $4\pi r'^2 E = Q'/\epsilon_0 = (4/3)\pi r'^3 \rho/\epsilon_0$ . Т. к.  $\rho = Q/(4/3\pi R^3)$  получаем

# Поле равномерно заряженного шара



- Внутри же шара напряженность поля будет иная.
- Сфера радиуса  $r' < R$  охватывает заряд  $Q' = (4/3)\pi r'^3 \rho$ .
- Поэтому, используя теорему Гаусса,
- $4\pi r'^2 E = Q' / \epsilon_0 = (4/3)\pi r'^3 \rho / \epsilon_0$ .
- Т.к.  $\rho = Q / (4/3\pi R^3)$  получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r' (r' \leq R)$$