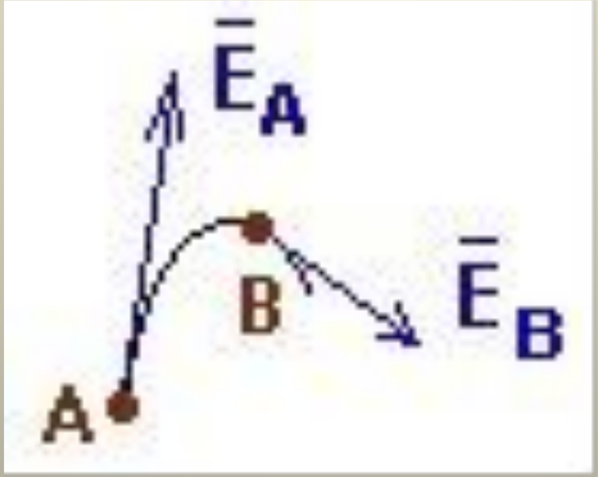
Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

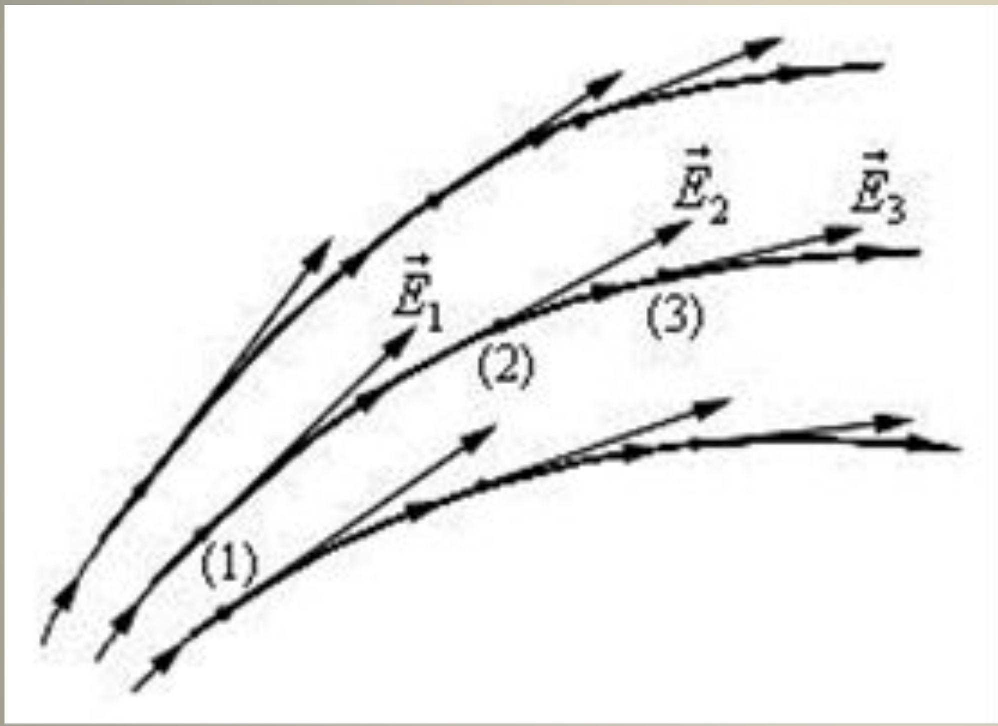
Лекция 2

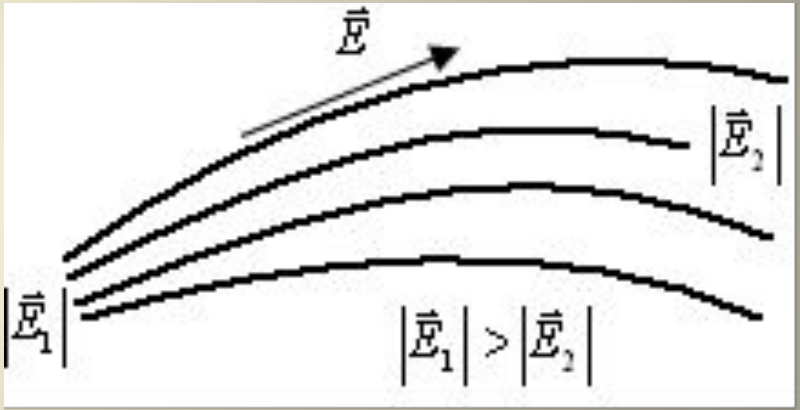
Графическое изображение электростатических полей.

- Фарадей предложил изображать поле линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности электростатического поля в этой точке.
- Такие линии получили название линий напряженности или силовых линий



Линии напряженности

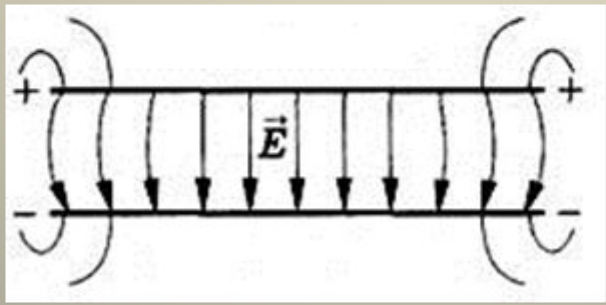




- По густоте силовых линий можно судить о величине напряженности.

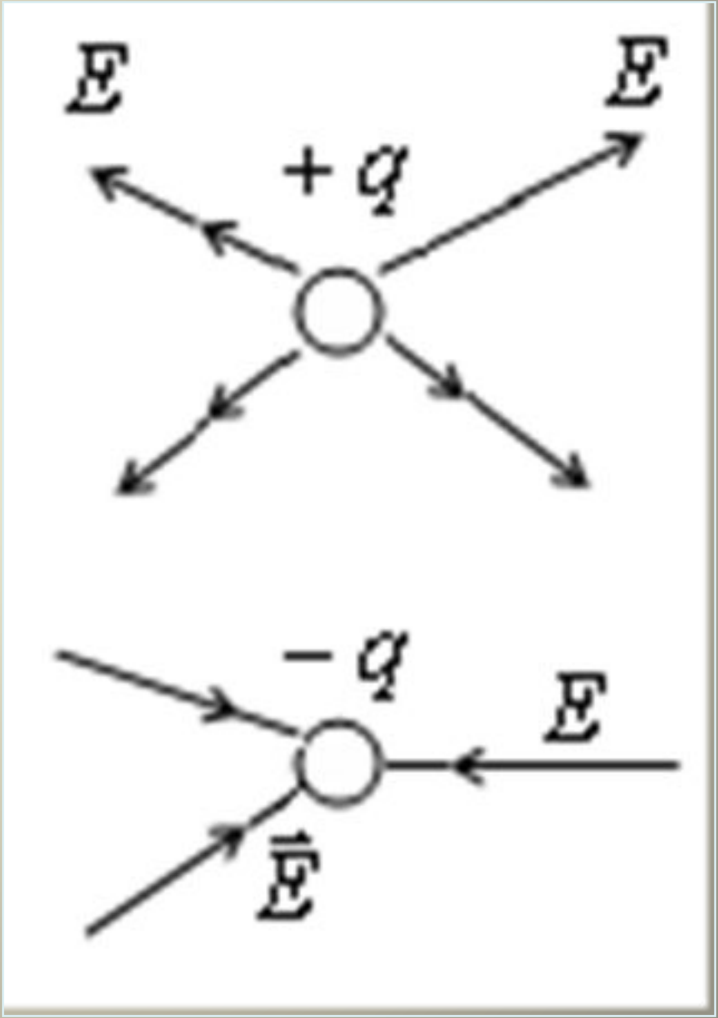
Свойства силовых линий

- силовые линии — это незамкнутые линии: они начинаются на поверхности положительно заряженных тел (или в бесконечности) и оканчиваются на поверхности отрицательно заряженных тел (или в бесконечности);
- силовые линии не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор напряженности имеет лишь одно направление;
- между зарядами силовые линии нигде не прерываются.



Линии напряженности

- Для точечных зарядов силовые линии представляют собой радиальные прямые.
- Для положительных зарядов – уходящие от заряда в бесконечность, для отрицательных – приходящие к заряду из бесконечности.



Поток вектора напряженности электрического поля

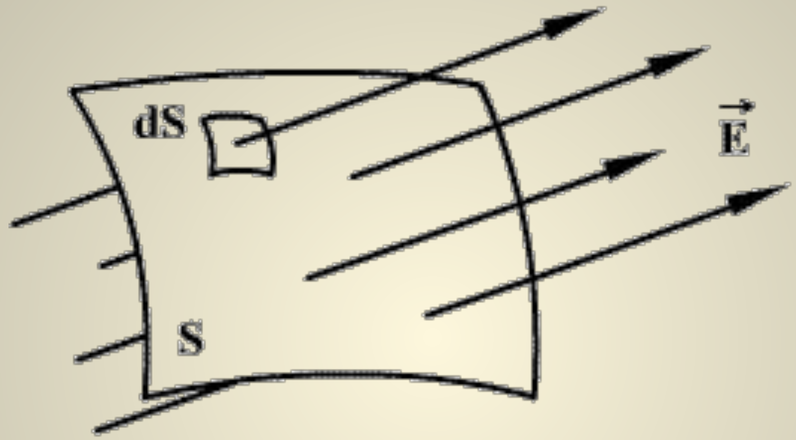
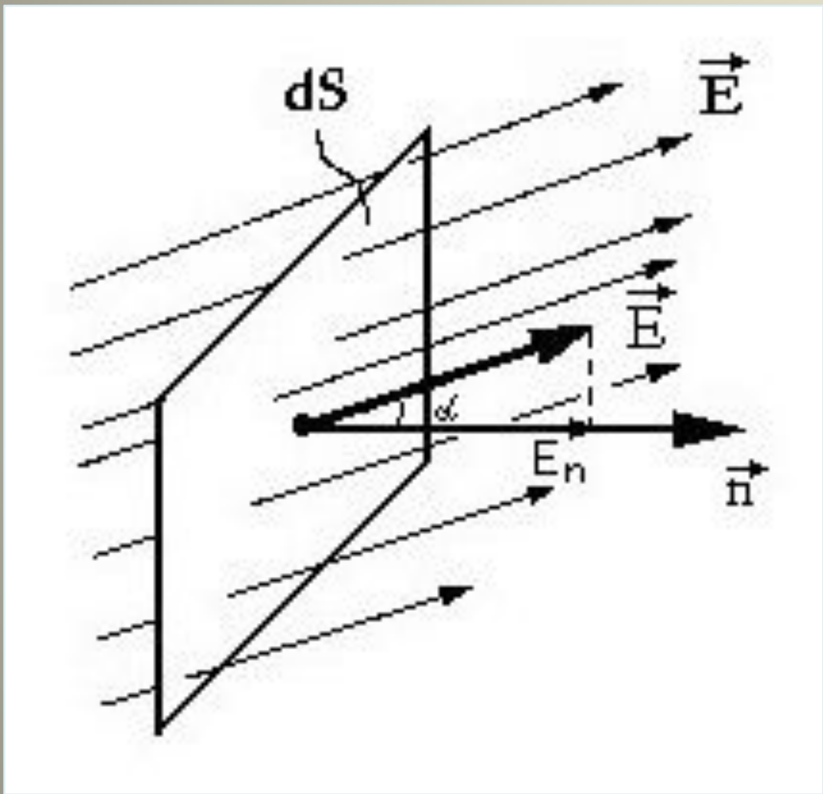


рис. 13.4

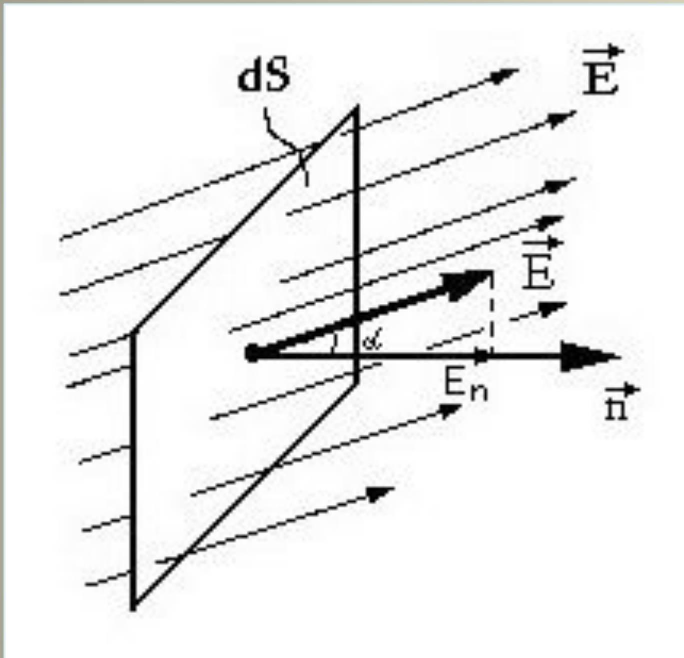
- Число линий вектора напряженности, пронизывающих единицу площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть равно модулю $\vec{E}$.
- dS – элементарная площадка, в пределах которой электрическое поле однородно.

Поток вектора напряженности электрического поля



- Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку dS, нормаль которой образует угол α с вектором $\vec{E}$, равно E dS cosα = E_n dS, где
- E_n - проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к площадке dS.

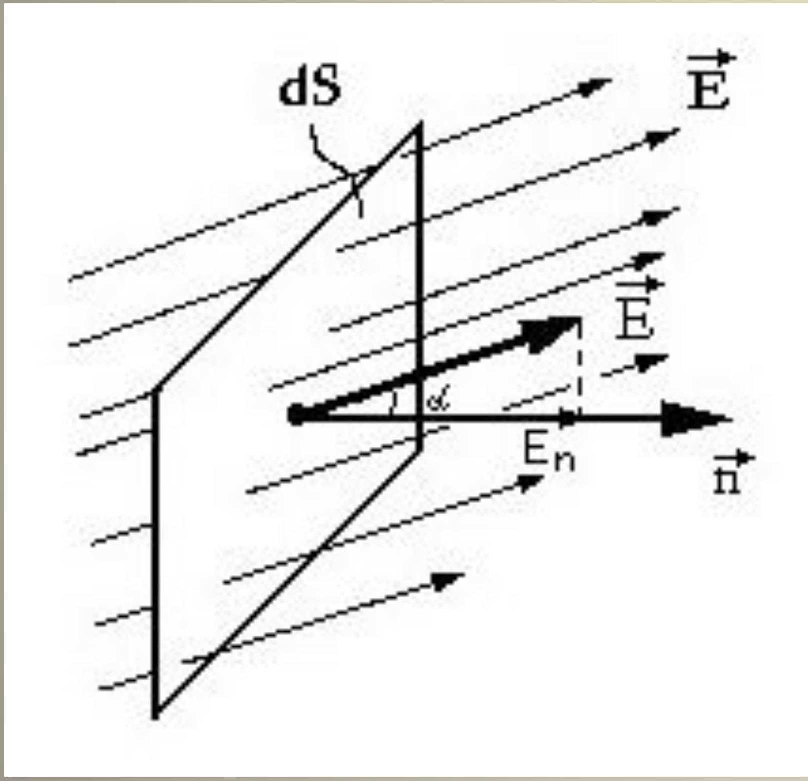
Поток вектора напряженности электрического поля



- **Потоком вектора напряженности** электрического поля через поверхность *dS* называется скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $d\vec{S}$,
- $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$

$$d\Phi_E = (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = E \cdot dS \cdot cos\alpha = E_n \cdot dS$$

Поток вектора напряженности электрического поля



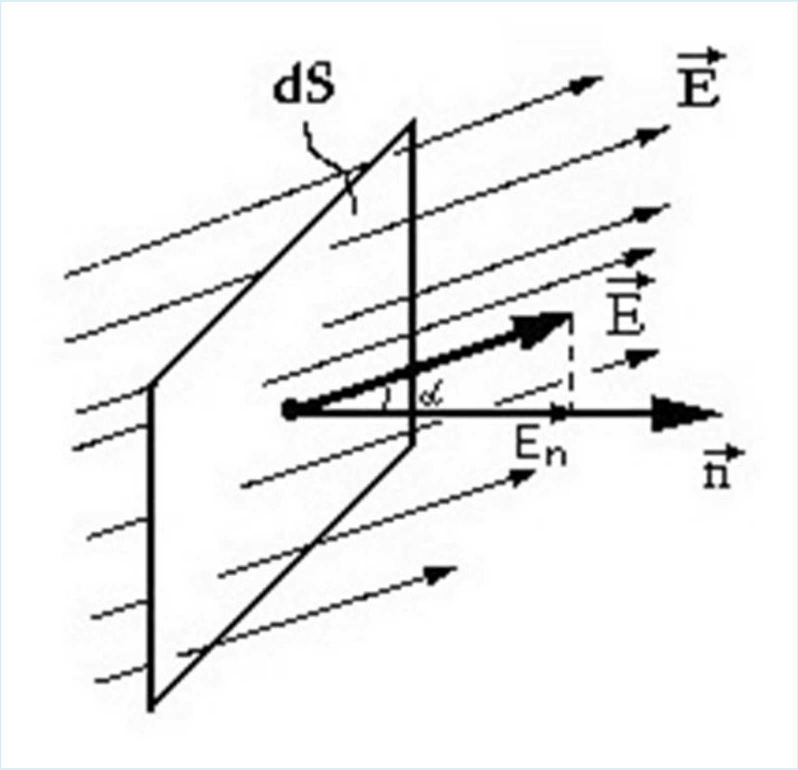
- Поток вектора через произвольную поверхность

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S})$$

Поток вектора через произвольную замкнутую поверхность

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

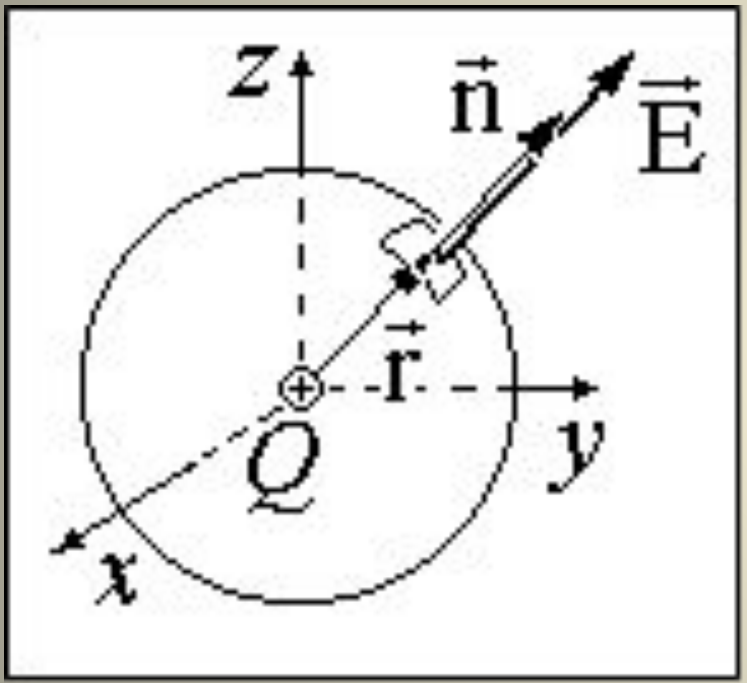
Поток вектора напряженности электрического поля



- Поток вектора напряженности является алгебраической величиной: если угол α – острый (α<90˚), то cos α>0

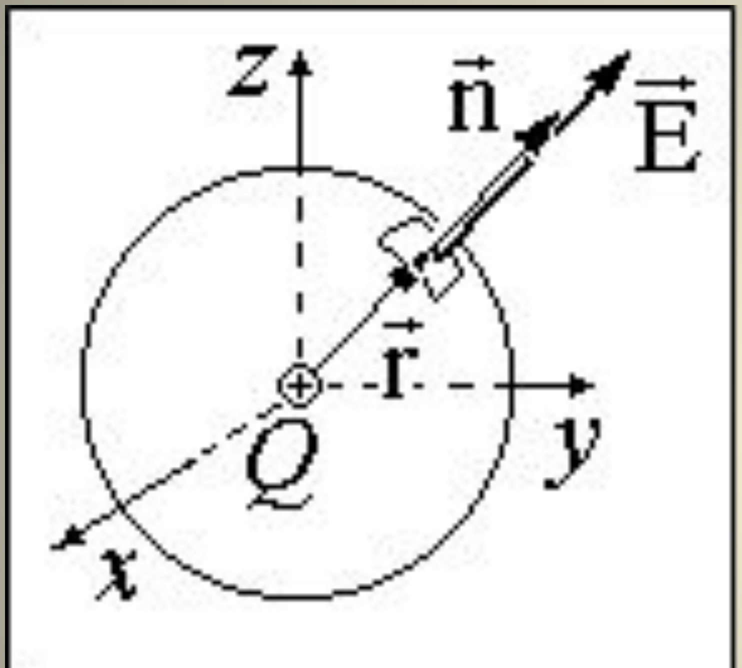
  и Φ_E > О,
- Если угол α – тупой (α>90˚), то cosα<О и Φ_E <О.
- Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т.е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхности.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме



- К. Гауссом в 1844 доказана теорема (*теорема Гаусса в интегральной форме*), устанавливающая связь источников поля и потока напряженности через произвольную поверхность, окружающую источники

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме



- *Поток от точечного заряда через произвольную окружающую его сферу.*

$$\Phi_э = \oint E_n dS = \frac{kQ}{r^2}\oint_S dS = \frac{Q4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

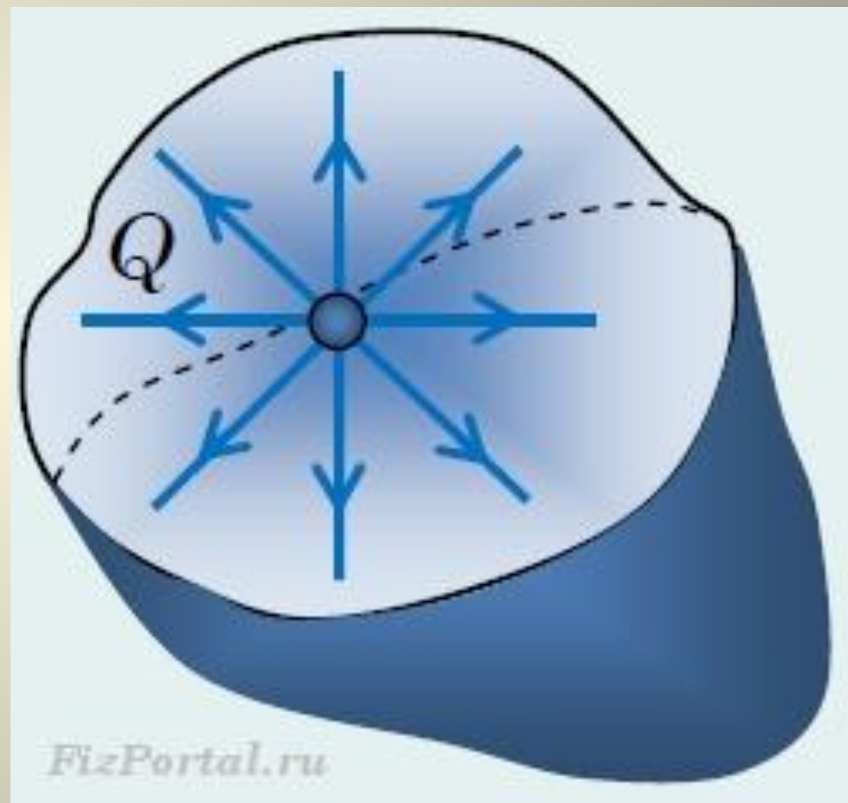
- Силовые линии поля точечного заряда перпендикулярны поверхности концентрической сферы.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд *Q*, поток вектора **E** будет равен Q/ε_0, т. е.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \oint_S E_n\,dS = Q/\varepsilon_0.$$

- Знак потока совпадает со знаком заряда *Q*.



Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

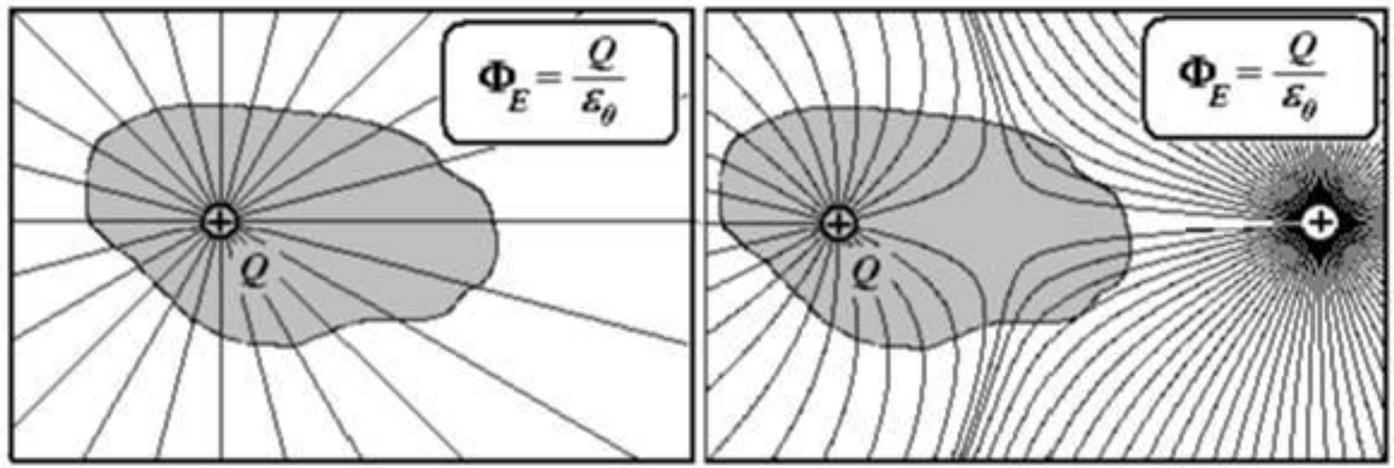


Рис. 164

- Заряды, находящиеся вне рассматриваемой замкнутой поверхности, создают электрическое поле, в том числе и внутри объема, ограниченного рассматриваемой поверхностью.
- Только суммарный поток поля созданного этими зарядами равен нулю («сколько втекает − столько вытекает»).
- Можно сказать, что заряды вне поверхности, перераспределяют поток поля, создаваемый зарядами внутри поверхности .

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Для произвольной поверхности, окружающей *n* зарядов
- Используя принцип суперпозиции: напряженность **E** поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей E_i пс … даваемых каждым зарядом в отдельнос…

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i.$$

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint_S \Big(\sum_i \mathbf{E}_i\Big) d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i\, d\mathbf{S}.$$

$$\oint_S \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = \oint_S E_n\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i.$$

- Поток вектора напряженности электростатического поля *в вакууме* сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0.
- Данное выражение представляет собой теорему Гаусса в интегральной форме.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью
- $\rho = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}V$, различной в разных местах пространства.
- Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности *S*, охватывающей некоторый объем *V*,

$$\sum_i Q_i = \int_V \rho \, \mathrm{d}V.$$

$$\oint_S \mathbf{E} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S E_n \, \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, \mathrm{d}V.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- В дифференциальной форме теорема Гаусса соответствует одному из уравнений Максвелла и выражается следующим образом

  в системе СИ: $$\operatorname{div}\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Здесь — ρ - объёмная плотность заряда (в случае присутствия среды — суммарная плотность свободных и связанн ∇ зарядов), а - оператор набла.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Величина мощности источника поля в точке - ***дивергенция векторного поля***, обозначается как divA (от *divergentia* - расходимость).
- Дивергенция векторного поля вычисляется как

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_{\Sigma}(\mathbf{A}, d\mathbf{S})\,.$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\,.$$

- это формула для вычисления дивергенции поля A в декартовой системе координат.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

- Для трёхмерного декартового пространства оператор набла определяется следующим образом:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- Смысл дивергенции состоит в том, что она характеризует расходимость и сходимость линий поля в окрестности точки.
- Дивергенция характеризует интенсивность (обильность) источников и стоков поля.

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

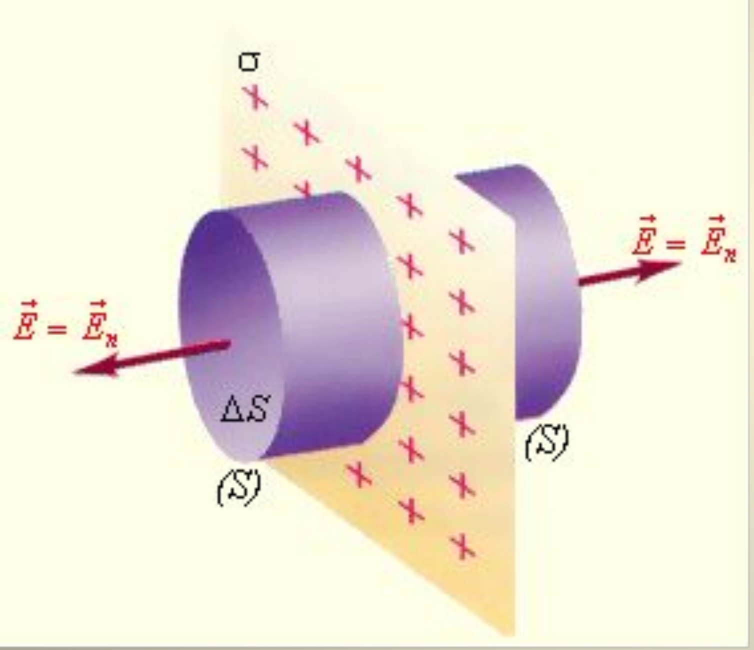
- *Теорема Гаусса в дифференциальной форме:*

$$\operatorname{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Из тех областей пространства, в которых дивергенция **E** положительна, силовые линии **E** исходят (r>0),

в тех областях, где div**E** < 0 силовые линии заканчиваются (r<0), а через те области, где div**E** = 0 силовые линии проходят, но не рождаются и не исчезают, так как в этих областях r=0 (зарядов нет).

Применение теоремы Гаусса для расчета некоторых электростатических полей в вакууме



- **1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.**
- Бесконечная плоскость заряжена с постоянной **поверхностной плотностью** +σ
- (σ=d*Q*/d*S* — заряд, приходящийся на единицу поверхности).

Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

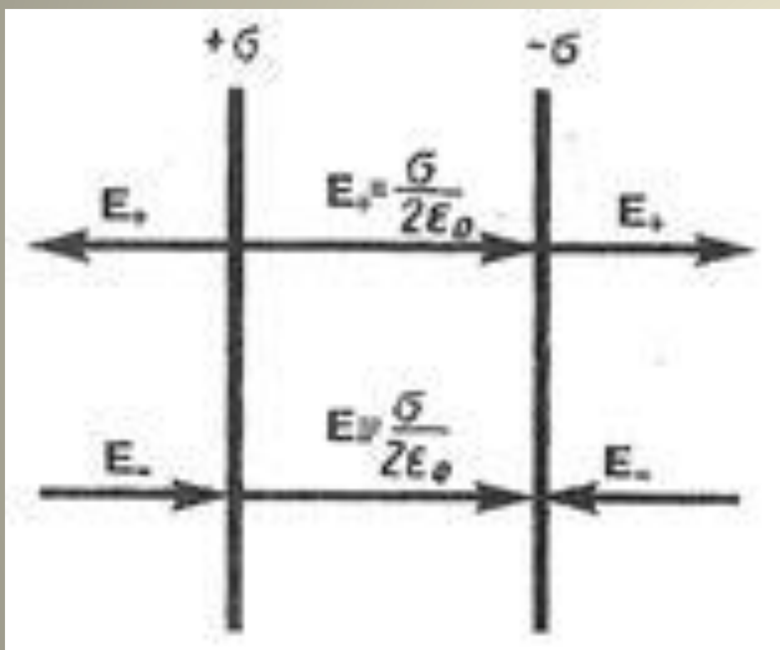
- Поток вектора сквозь боковую поверхность цилиндра = О (cosα=0)
- Полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания = Е S.
- Заряд, заключенный внутри цилиндрической поверхности, равен σ S.

- Согласно теореме Гаусса

$$2\,E\,S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

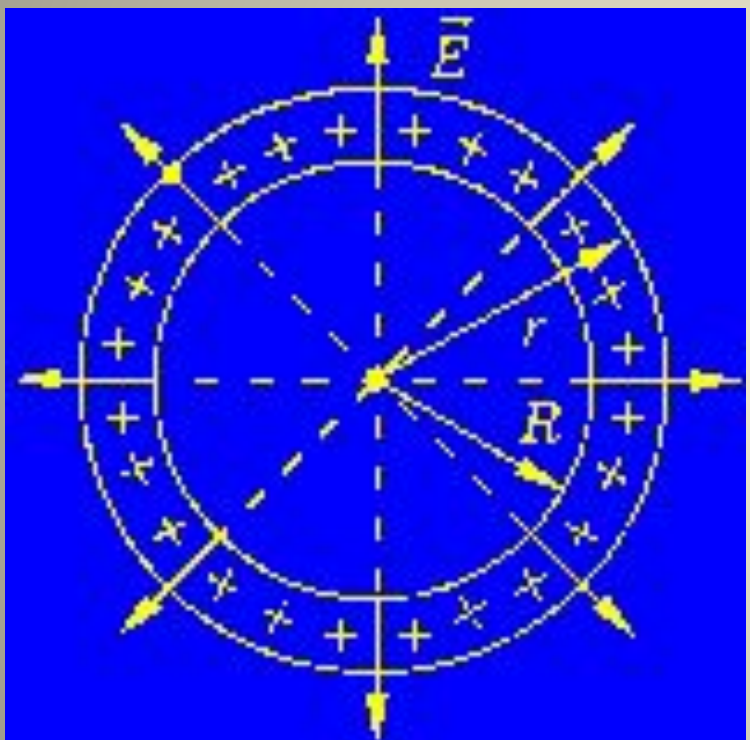
Тогда $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей



- Пусть плоскости заряжены равномерно разноименными зарядами с поверхностными плотностями + σ и – σ.
- На рисунке верхние стрелки соответствуют полю от положительно заряженной плоскости, нижние — от отрицательной плоскости.
- Слева и справа от плоскостей поля вычитаются (линии напряженности направлены навстречу друг другу), поэтому здесь напряженность поля E=0
- . В области между плоскостями $E = E_+ + E_-$
- Результиру $E = \sigma/\varepsilon_0$. женность

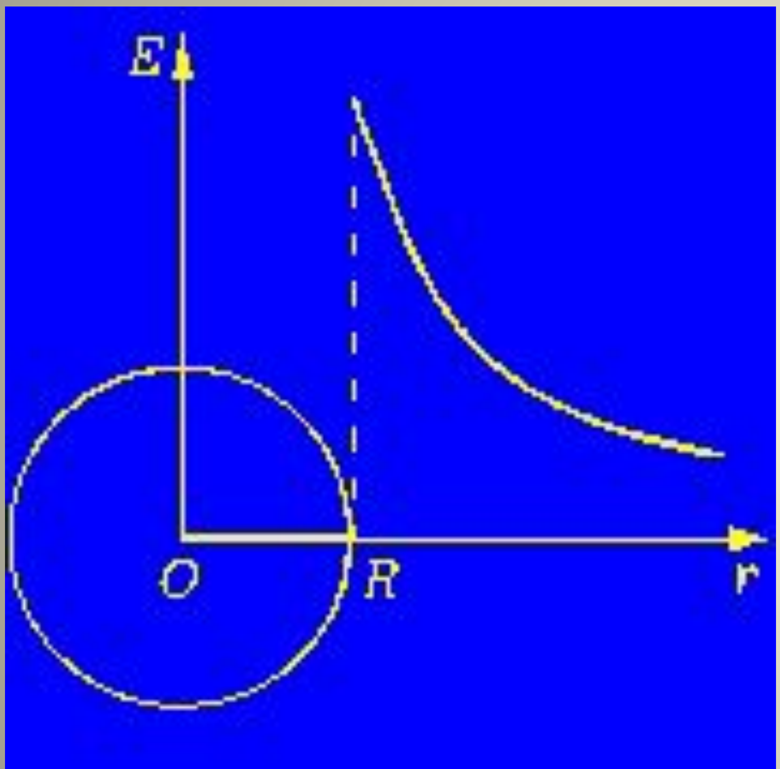
Поле равномерно заряженной сферической поверхности



- Сферическая поверхность радиуса R с общим зарядом Q заряжена равномерно с **поверхностной плотностью** +σ. Проведем мысленно сферу радиуса r, которая имеет общий центр с заряженной сферой. Если r>R,ro внутрь поверхности попадает весь заряд Q, который создает рассматриваемое поле, и, по теореме Гаусса, $4\pi r^2 E = Q/\varepsilon_0$, откуда

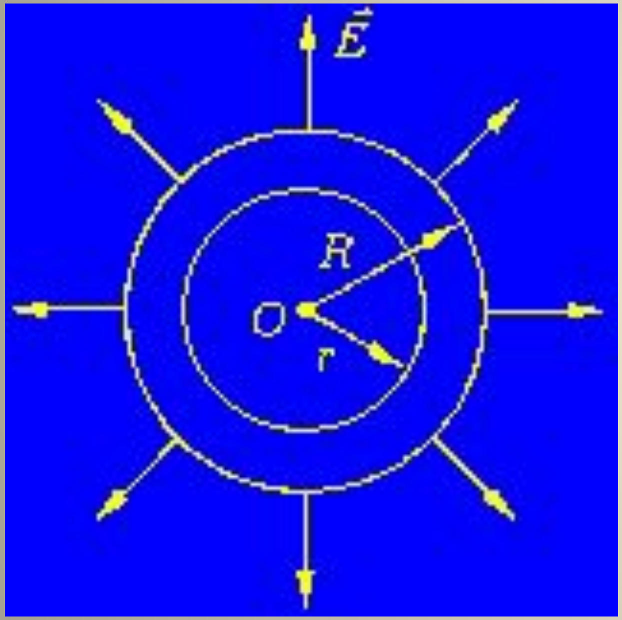
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,(r \geq R)$$

Поле равномерно заряженной сферической поверхности



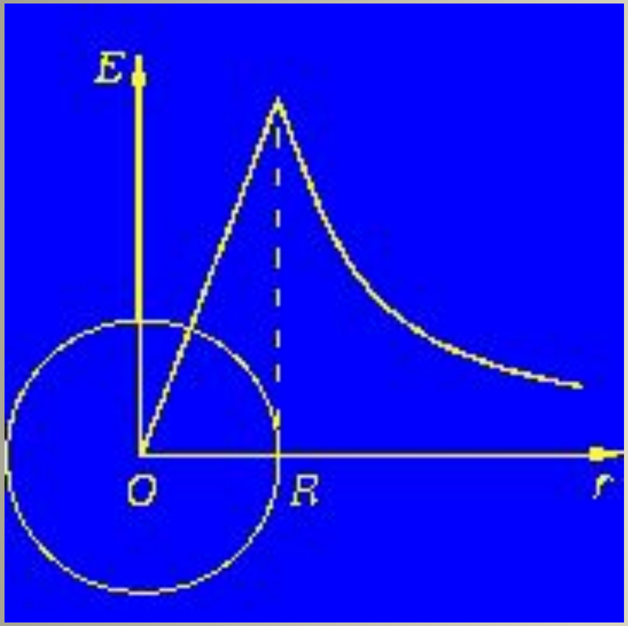
- При $r>R$ поле убывает с расстоянием r по такому же закону, как у точечного заряда.
- Если $r'<R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри себя зарядов, значит внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ($E=0$).

Поле равномерно заряженного шара



- Шар радиуса R с общим зарядом Q заряжен равномерно с **объемной плотностью** ρ (ρ = dQ/dV – заряд, который приходится на единицу объема). Для напряженности поля вне шара получится тот же результат, что и в случае (3).
- Внутри же шара напряженность поля будет иная. Сфера радиуса $r'<R$ охватывает заряд $Q'=(4/3)\pi r'^3\rho$. Поэтому, используя теорему Гаусса, $4\pi r'^2E=Q'/\varepsilon_0=(4/3)\pi r'^3\rho/\varepsilon_0$. Т. к. $\rho=Q/(4/3\pi R^3))$ получаем

Поле равномерно заряженного шара



- Внутри же шара напряженность поля будет иная.
- Сфера радиуса $r'<R$ охватывает заряд $Q'=(4/3)\pi r'^3\rho$.
- Поэтому, используя теорему Гаусса,
- $4\pi r'^2E=Q'/\varepsilon_0=(4/3)\pi r'^3\rho/\varepsilon_0$.
- Т.к. $\rho=Q/(4/3\pi R^3)$) получаем

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r'(r'\le R)$$