



Теорема Гаусса-Маркова

Эконометрика

Уравнение множественной регрессии

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} \dots + a_n x_{nt} + u_t = \sum_{i=0}^n a_i x_{it} + u_t \quad (1)$$

Наилучшая линейная процедура получения оценок параметров уравнения (1) и условия, при которых эта процедура дает несмещенные и эффективные оценки, сформулирована в теореме Гаусса-Маркова.

Сформируем вектора и матрицу коэффициентов на основе системы (2)

$$\begin{matrix} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix} & \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} & \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} & \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

\mathbf{Y} – вектор выборочных значений эндогенной переменной

\mathbf{U} – вектор выборочных значений случайного возмущения

\mathbf{A} - вектор неизвестных параметров модели

\mathbf{x} – вектор регрессоров

\mathbf{X} – матрица коэффициентов при неизвестных параметрах

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{U}$$

Теорема Гаусса-Маркова

Если матрица X неколлинеарна и вектор случайных возмущений удовлетворяет следующим требованиям:

1. $M(u_i) = 0$ Математическое ожидание всех случайных возмущений равно нулю
2. $\sigma^2(u_i) = \sigma_u^2$ Дисперсия случайных возмущений постоянна во всех наблюдениях (условие **ГОМОСКЕДАСТИЧНОСТИ**)
3. $Cov(u_i, u_j) = 0$
при $i \neq j$ Случайные возмущения в разных наблюдениях не зависимы
4. $Cov(x_i, u_i) = 0$ Случайные возмущения и регрессоры не зависимы

Тогда наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели (1) является:

$$\underline{\tilde{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \underline{Y} \quad (3)$$

Которая удовлетворяет методу наименьших квадратов

При этом:

$$\text{Cov}(\underline{\tilde{A}}, \underline{\tilde{A}}) = \tilde{\sigma}_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-k} \sum (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \frac{1}{n-k} \sum u_i^2$$

$$\tilde{Y}(\underline{z}) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z_1 + \dots + \tilde{a}_k z_k$$

$$\sigma^2(\tilde{y}(\underline{z})) = \tilde{\sigma}_u^2 (1 + q_0)$$

$$q_0 = \underline{z}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \underline{z}$$

Доказательство

Воспользуемся методом наименьших квадратов

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{u} \Rightarrow \min \quad (4)$$

Где

$$\mathbf{u} = \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}} \quad (5)$$

Подставив (5) в (4) получим

$$\begin{aligned} S = \mathbf{u}^T \mathbf{u} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}}) = (\mathbf{Y}^T - \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}}) = \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{a}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\tilde{\mathbf{a}} \quad (6) \end{aligned}$$

Для получения необходимого условия экстремума дифференцируем (6) по вектору параметров

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} = -2 \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2 \mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{a}} = 0$$

Откуда система нормальных уравнений для определения искомых параметров получает вид

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (7)$$

Решение системы (7) в матричном виде есть

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Выражение (3)
доказано

Докажем несмещенность оценок (3)

$$\begin{aligned} M(\tilde{\mathbf{a}}) &= M[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}] = M[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \mathbf{a} + \mathbf{u})] = \\ &= M[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{a} + \mathbf{u}] = \mathbf{a} \end{aligned}$$

Несмещенность оценки (3)
доказана

Вычислим ковариационную матрицу оценок (3)

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{a}}) = \text{Cov}[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}] = \sigma_u^2 (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

В результате получено выражение
(4)

Выводы

1. Теорема Гаусса-Маркова формулирует наилучшую линейную процедуру расчета оценок параметров линейной модели множественной регрессии
2. Линейная процедура соответствует методу наименьших квадратов
3. Предпосылки теоремы обеспечивают получение оценок, обладающих свойствами несмещенности и эффективности
4. При выполнении предпосылок свойства эффективности и несмещенности достигаются при любом законе распределения случайного возмущения