Теорема Гаусса-Маркова

Эконометрика

Уравнение множественной регрессии

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} \dots + a_n x_{nt} + u_t = \sum_{i=0}^{n} a_i x_{it} + u_t \qquad (1)$$

Наилучшая линейная процедура получения оценок параметров уравнения (1) и условия, при которых эта процедура дает несмещенные и эффективные оценки, сформулирована в теореме Гаусса-Маркова.

Постановка задачи

Имеем случайную выборку наблюдений за поведением экономического объекта объемом **n**

$$\begin{pmatrix} y_1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ y_2 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

Выборка наблюдений за переменными модели (1)
Первый индекс – номер регрессора
Второй индекс – номер наблюдения

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{21} \cdots + a_n x_{k1} + u_1 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_{12} + a_2 x_{22} \cdots + a_n x_{k2} + u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 = a_0 + a_1 x_{1n} + a_2 x_{2n} \cdots + a_n x_{kn} + u_n \end{cases} \qquad (2)$$

(2) - Система уравнений наблюдений, связывающая наблюдения в выборке

Сформируем вектора и матрицу коэффициентов на основе системы (2)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_k \end{pmatrix} \quad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

Y – вектор выборочных значений эндогенной переменной

U – вектор выборочных значений случайного возмущения

A - вектор неизвестных параметров модели

x – вектор регрессоров

X – матрица коэффициентов при неизвестных параметрах

$$\vec{Y} = \vec{A}\vec{x} + \vec{U}$$

Теорема Гаусса-Маркова

Если матрица X неколлинеарна и вектор случайных возмущений удовлетворяет следующим требованиям:

1. $M(u_i) = 0$ — Математическое ожидание всех случайных возмущений равно нулю

2. $\sigma^2(u_i) = \sigma_u^2$ — Дисперсия случайных возмущений постоянна во всех наблюдениях (условие **ГОМОСКЕДАСТИЧНОСТИ**)

3. $Cov(u_i, u_j) = 0$ при $i \neq j$ — Случайные возмущения в разных наблюдениях не зависимы

4. $Cov(x_i, u_i) = 0$ — Случайные возмущения и регрессоры не зависимы

Тогда наилучшей линейной процедурой оценки параметров модели (1) является:

$$\vec{\tilde{A}} = \left(X^{T} X\right)^{-1} X^{T} \vec{Y} \qquad (3)$$

Которая удовлетворяет методу наименьших квадратов

При этом:

$$\mathrm{Cov}(\vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{A}}) = \tilde{\sigma}_u^2 \left(X^{T} X\right)^{-1}$$

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n-k} \sum \left(y_i - \tilde{y}_i\right)^2 = \frac{1}{n-k} \sum u_i^2$$

$$\tilde{Y}(\vec{z}) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z_1 + \ldots + \tilde{a}_k z_k$$

$$\sigma^2\left(\tilde{y}(\vec{z})\right) = \tilde{\sigma}_u^2 \left(1 + q_0\right)$$

$$q_0 = \vec{z}^{T} \left(X^{T} X\right)^{-1} \vec{z}$$

Доказательство

Воспользуемся методом наименьших квадратов

$$S = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \vec{u}^T \vec{u} \Rightarrow \min \qquad (4)$$

Где

$$\vec{u} = \vec{Y} - \tilde{\vec{Y}} = \vec{Y} - X\tilde{\vec{a}} \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4) получим

$$S = \vec{u}^T \vec{u} = \left(\vec{Y} - X\tilde{\vec{a}}\right)^T \left(\vec{Y} - X\tilde{\vec{a}}\right) = \left(Y^T - \tilde{\vec{a}}^T X^T\right)\left(Y - X\tilde{\vec{a}}\right) =$$

$$= \vec{Y}^T \vec{Y} - 2\tilde{\vec{a}}^T X^T \vec{Y} + \tilde{a}^T X^T X\tilde{\vec{a}} \qquad (6)$$

Для получения необходимого условия экстремума дифференцируем (6) по вектору параметров

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{a}} = -2X^{T}Y + 2X^{T}X\tilde{a} = 0$$

Откуда система нормальных уравнений для определения искомых параметров получает вид

$$X^{T}X\tilde{a} = X^{T}Y \qquad (7)$$

Решение системы (7) в матричном виде есть

$$\tilde{A} = \left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}Y$$

Выражение (3) доказано

Докажем несмещенность оценок (3)

$$M\left(\tilde{\vec{a}}\right) = M\left[\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}\vec{Y}\right] = M\left[\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}\left(X\vec{a}+\vec{u}\right)\right] =$$

$$= M\left[\left(X^{T}X\right)^{-1}\left(X^{T}X\right)\vec{a}+\vec{u}\right] = \vec{a}$$

Несмещенность оценки (3)
доказана

Вычислим ковариационную матрицу оценок (3)

$$Cov\left(\tilde{\vec{a}},\tilde{\vec{a}}\right) = Cov\left[\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}\vec{Y},\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}\vec{Y}\right] = \sigma_{u}^{2}\left(X^{T}X\right)^{-1}$$

В результате получено выражение
(4)

Выводы

1. Теорема Гаусса-Маркова формулирует наилучшую линейную процедуру расчета оценок параметров линейной модели множественной регрессии

2. Линейная процедура соответствует методу наименьших квадратов

3. Предпосылки теоремы обеспечивают получение оценок, обладающих свойствами несмещенности и эффективности

4. При выполнении предпосылок свойства эффективности и несмещенности достигаются при любом законе распределения случайного возмущения