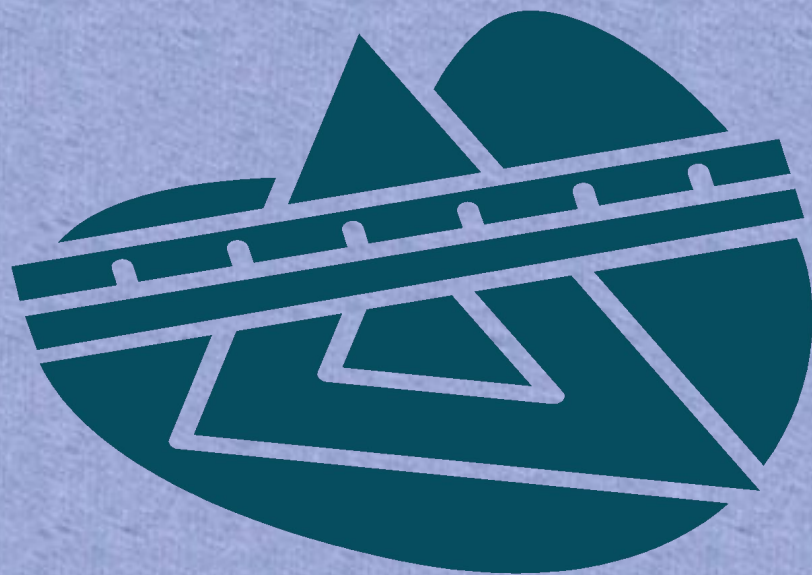
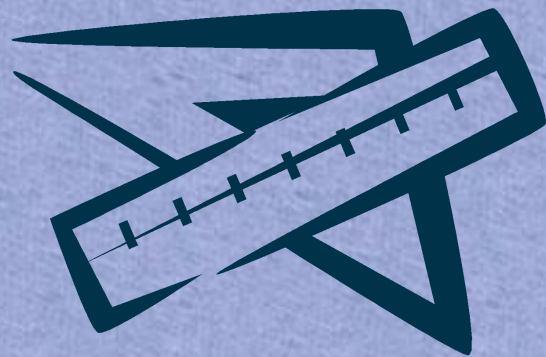


# Теорема Менелая



# Менелай

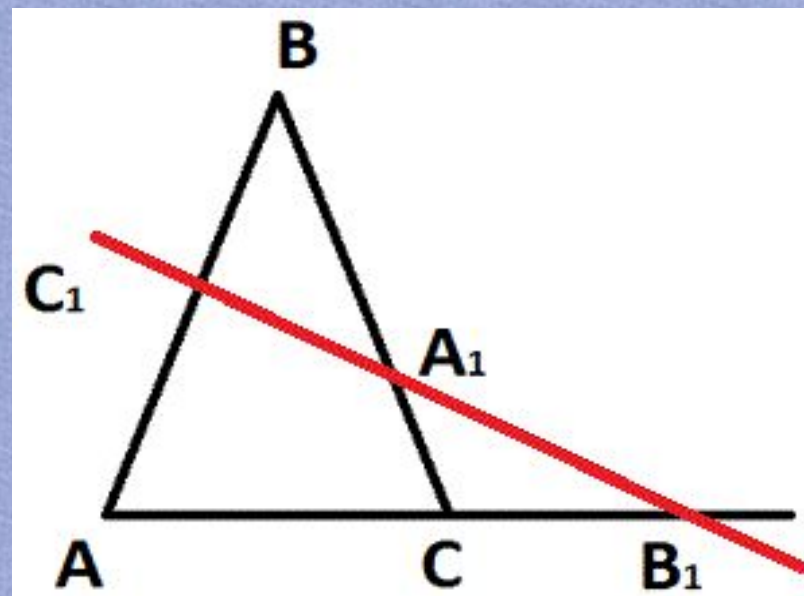
- ✓ **Менелай Александрийский** (ок. 100 н. э.) – древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии: написал 6 книг о вычислении хорд и 3 книги “Сферики”, сохранившиеся в арабском переводе. Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему, известную сегодня как *теорема Менелая*.

# Теорема Менелая

✓ Дан треугольник  $ABC$ .  
Точка  $C_1$  лежит на стороне  $AB$ , точка  $A_1$  – на стороне  $BC$ , а точка  $B_1$  – на продолжении стороны  $AC$ , причем выполняется

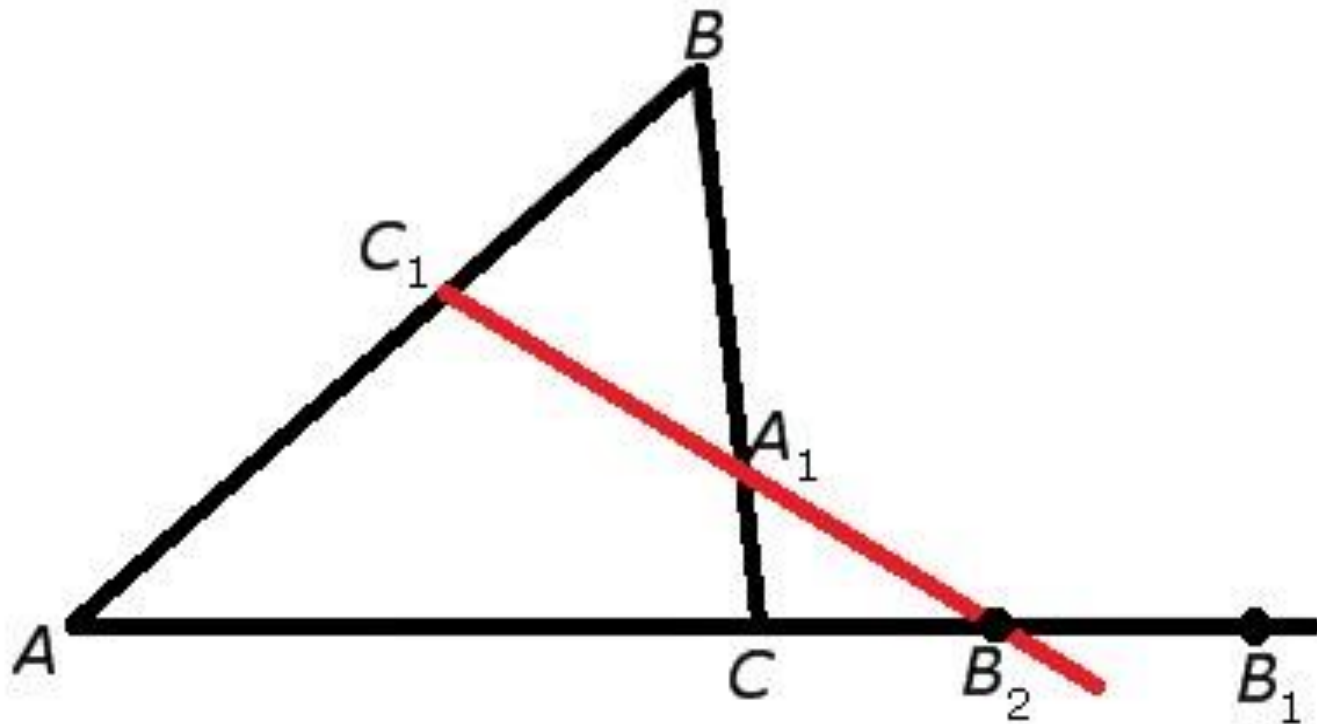
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

✓ Тогда точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.

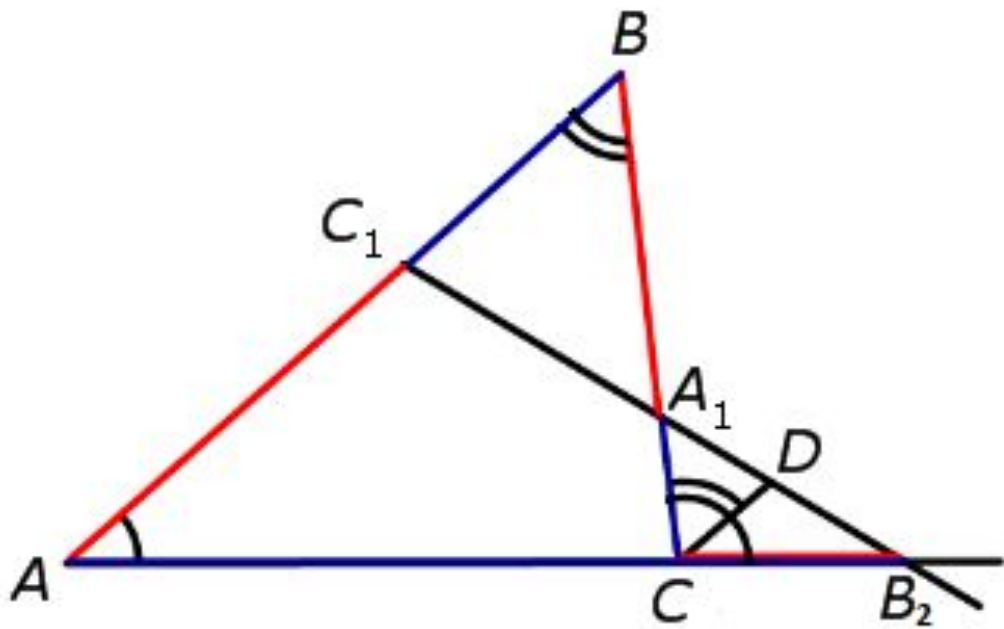


# Доказательство

Теорема доказывается методом «от противного». Допустим, точки  $C_1$  и  $A_1 \in$  прямой, а точка  $B_1 \notin$  прямой. Пусть прямая  $A_1C_1 \cap$  продолжение стороны  $AC$  в точке  $B_2$ .







$\triangle AC_1B_2 \sim \triangle CDB_2$   
 по двум углам  
 ( $\angle B_2$ -общий,  
 $\angle C_1AB_2 = \angle DCB_2$ ).  
 Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{B_2A}{B_2C}$$

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CDA_1$   
 по двум углам  
 ( $\angle C_1BA_1 = \angle DCA_1$

$\angle BA_1C_1 = \angle DA_1C$   
 $\left. \begin{array}{l} \text{и} \\ \text{и} \end{array} \right\} \frac{C_1B}{CD} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow$

Из каждого равенства выразим CD:

$$CD = \frac{AC_1 \cdot B_2C}{B_2A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$$

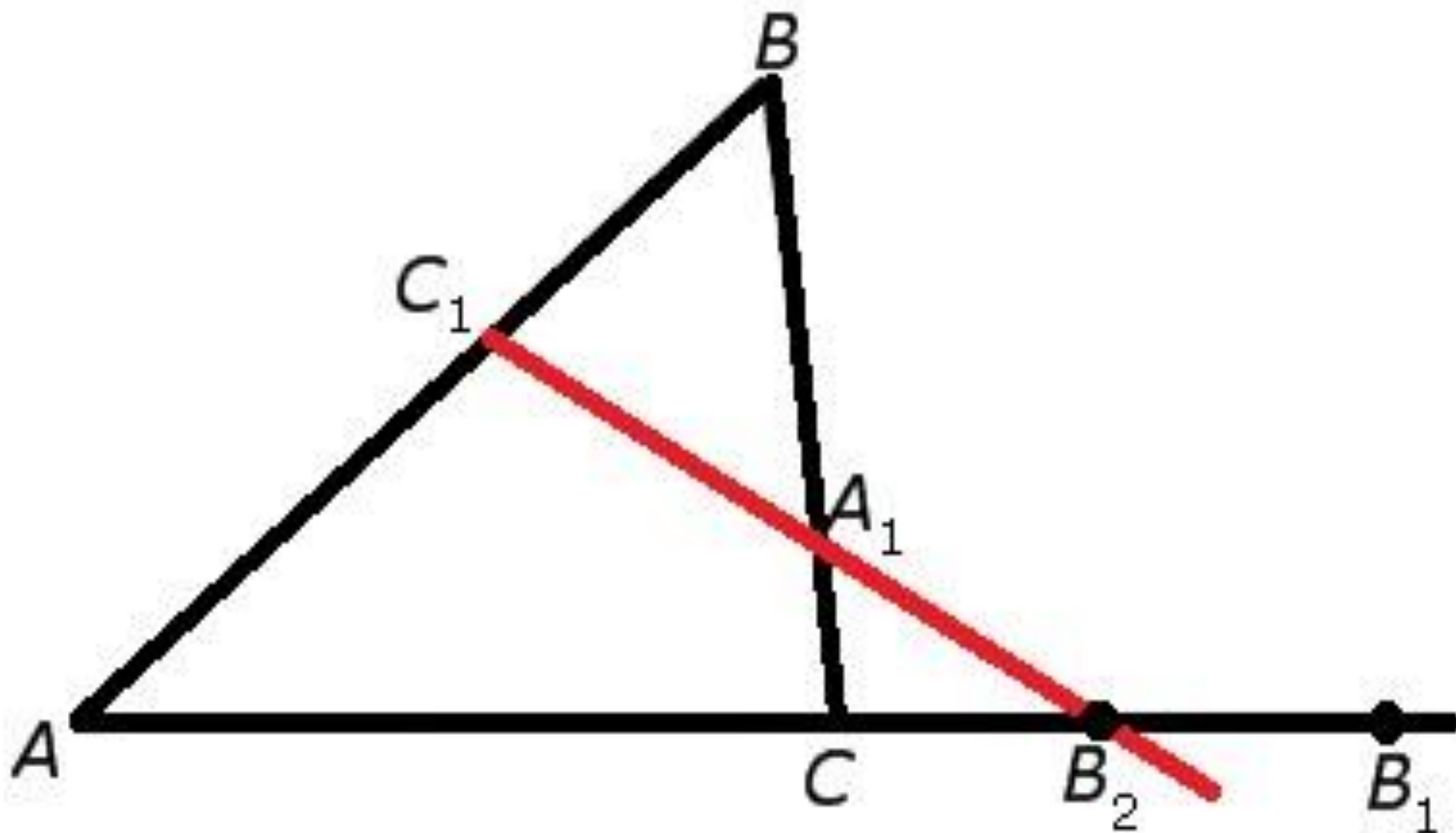
Откуда,

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$$

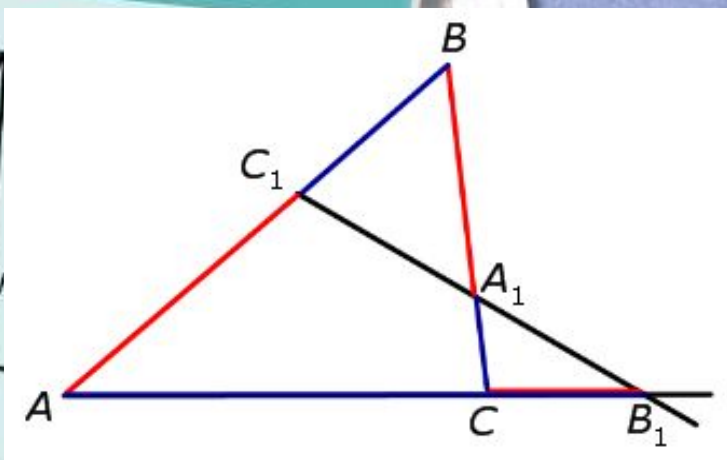
✓ Т.к.  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$   
(по усл.)

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

То точки  $B_1$  и  $B_2$  совпадают. Что и требовалось доказать.



# Обратная теорема



Прямая пересекает треугольник  $ABC$ , причем  $C_1$  – точка ее пересечения со стороной  $AB$ ,  $A_1$  – точка ее пересечения со стороной  $BC$ ,  $B_1$  – точка ее пересечения с продолжением стороны  $AC$ .

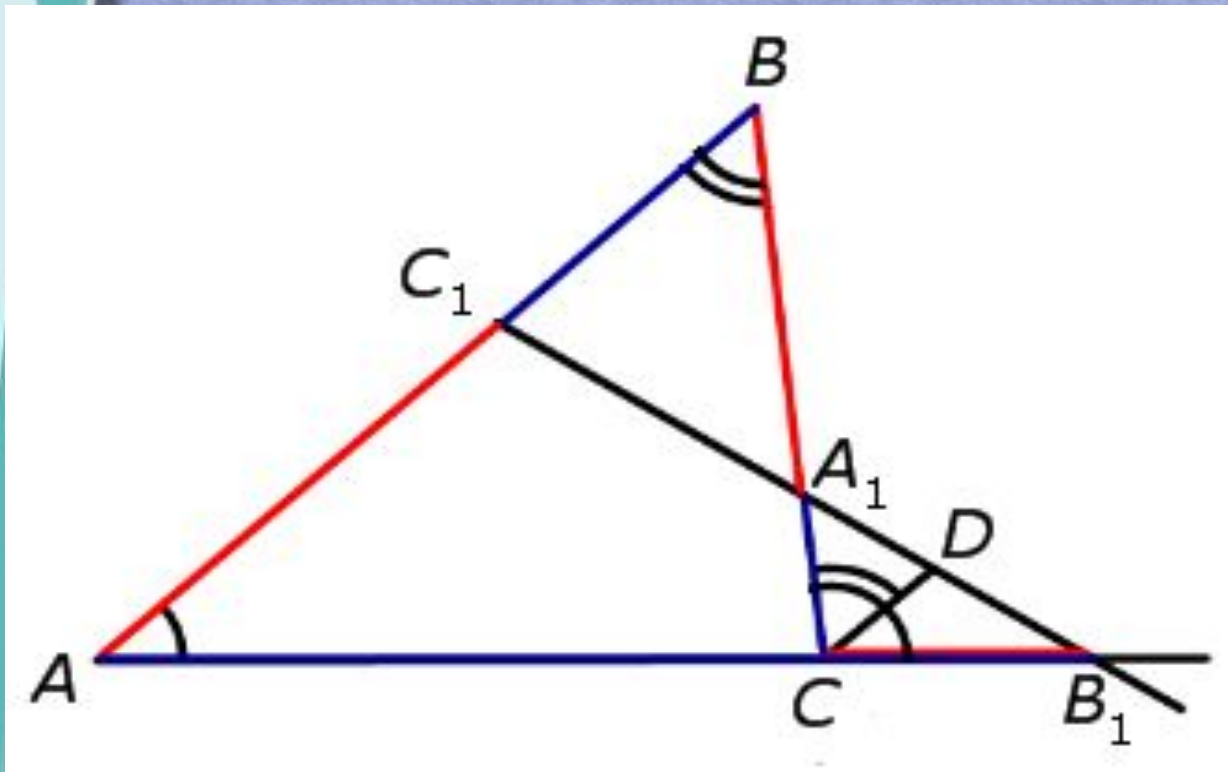
Тогда

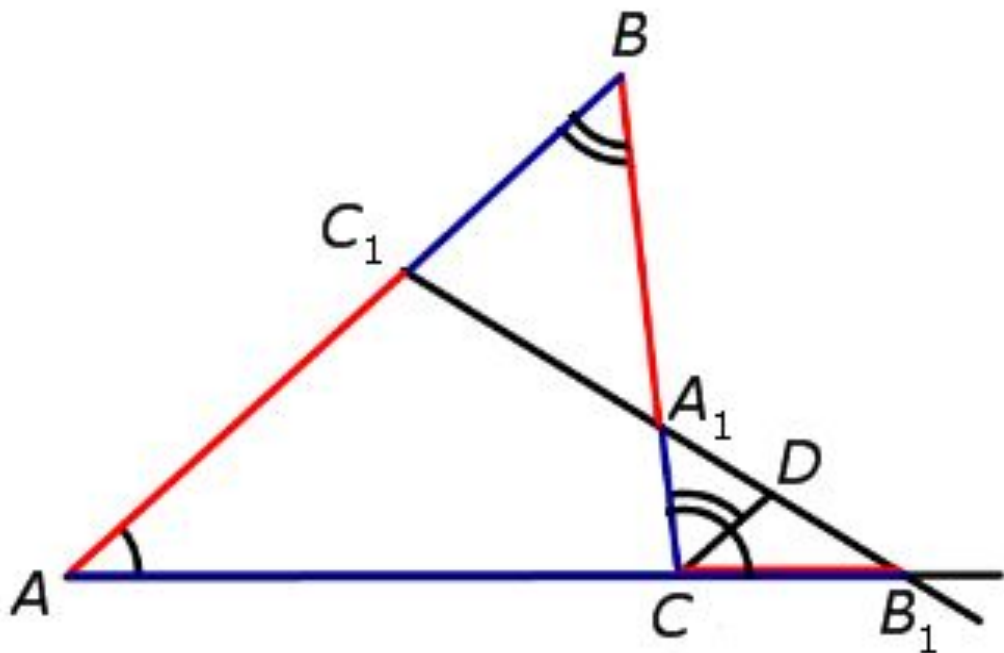
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



# Доказательство

- ✓ Проведем через точку  $C$  прямую, параллельную  $AB$ . Обозначим через  $D$  её точку пересечения с прямой  $B_1C_1$ .





$\triangle AC_1B_1 \sim \triangle CDB_1$   
 по двум углам  
 ( $\angle B_1$ -общий,  
 $\angle C_1AB_1 = \angle DCB_1$ ).  
 Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{B_1A}{B_1C}$$

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CDA_1$   
 по двум углам  
 ( $\angle C_1BA_1 = \angle DCA_1$

$\angle BA_1C_1 = \angle DA_1C$   
 $\left. \begin{aligned} & \cdot \frac{C_1B}{CD} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow \end{aligned} \right\}$

Из каждого равенства выразим CD:

$$CD = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$$

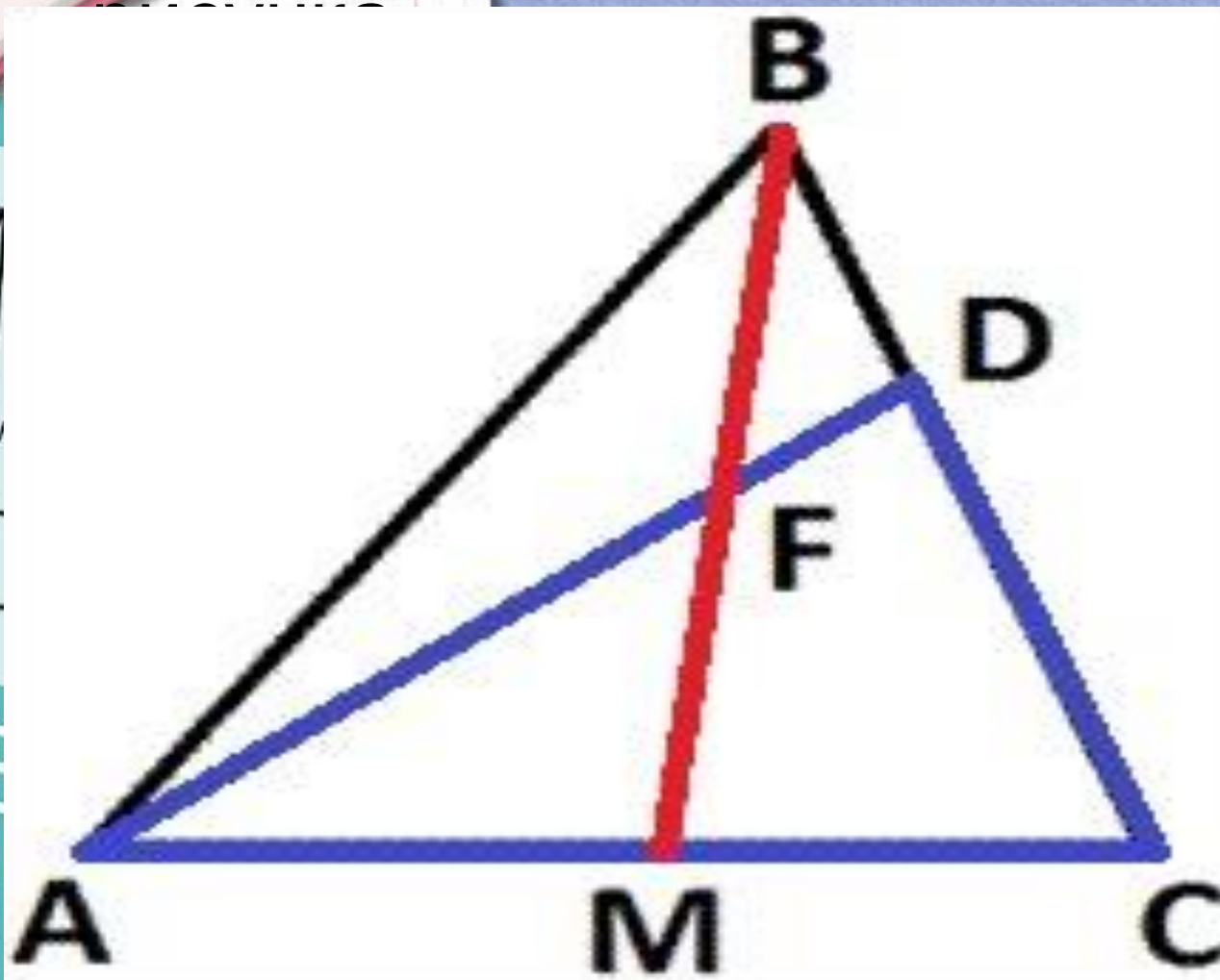
Откуда,

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Что и требовалось доказать.

# Задача №1

✓ Сформулируйте теорему для данного

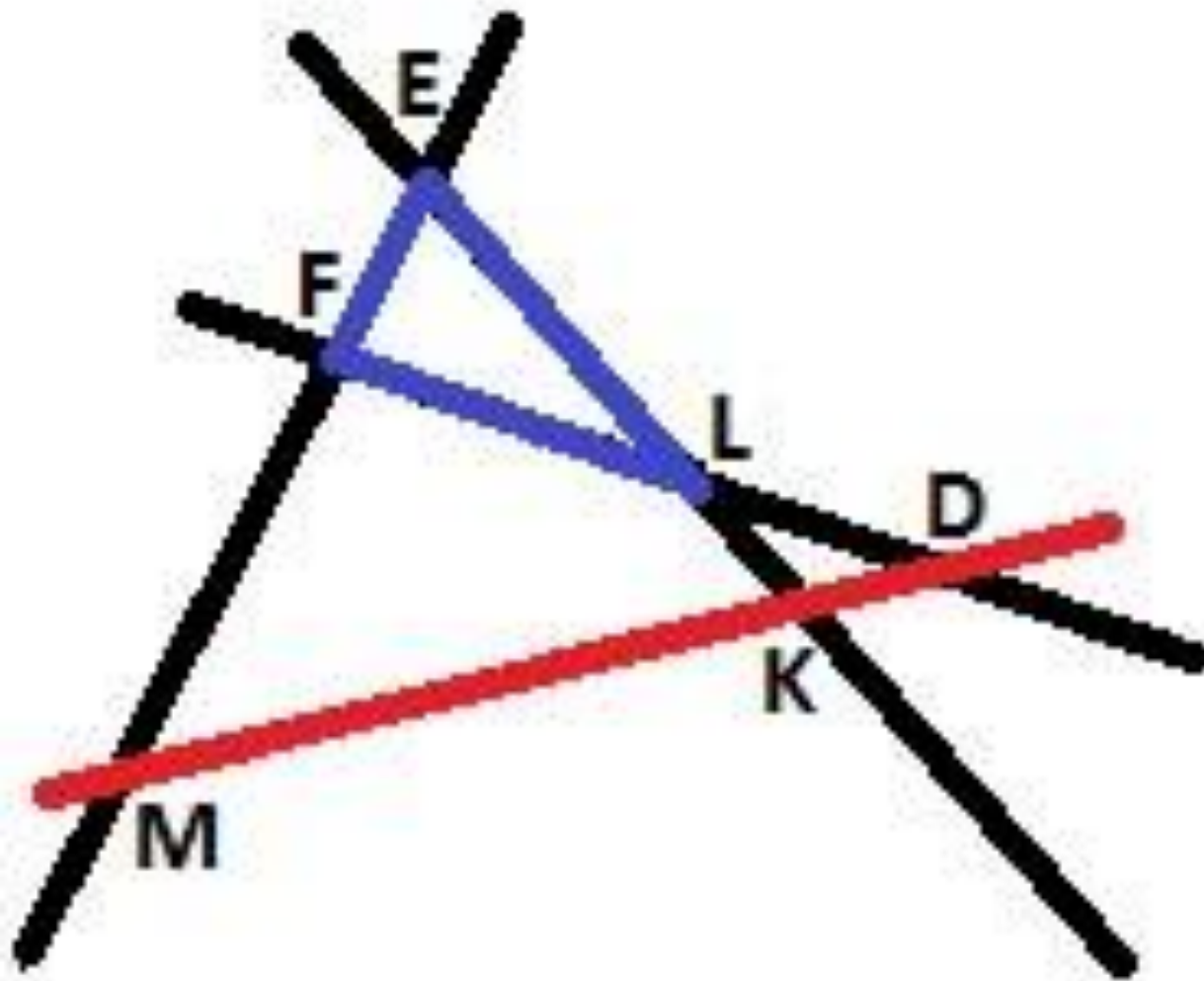


Прямая MB  
пересекает две  
стороны и  
продолжение  
третьей  
стороны  
треугольника

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$$

# Задача №2

✓ Сформулируйте теорему для данного

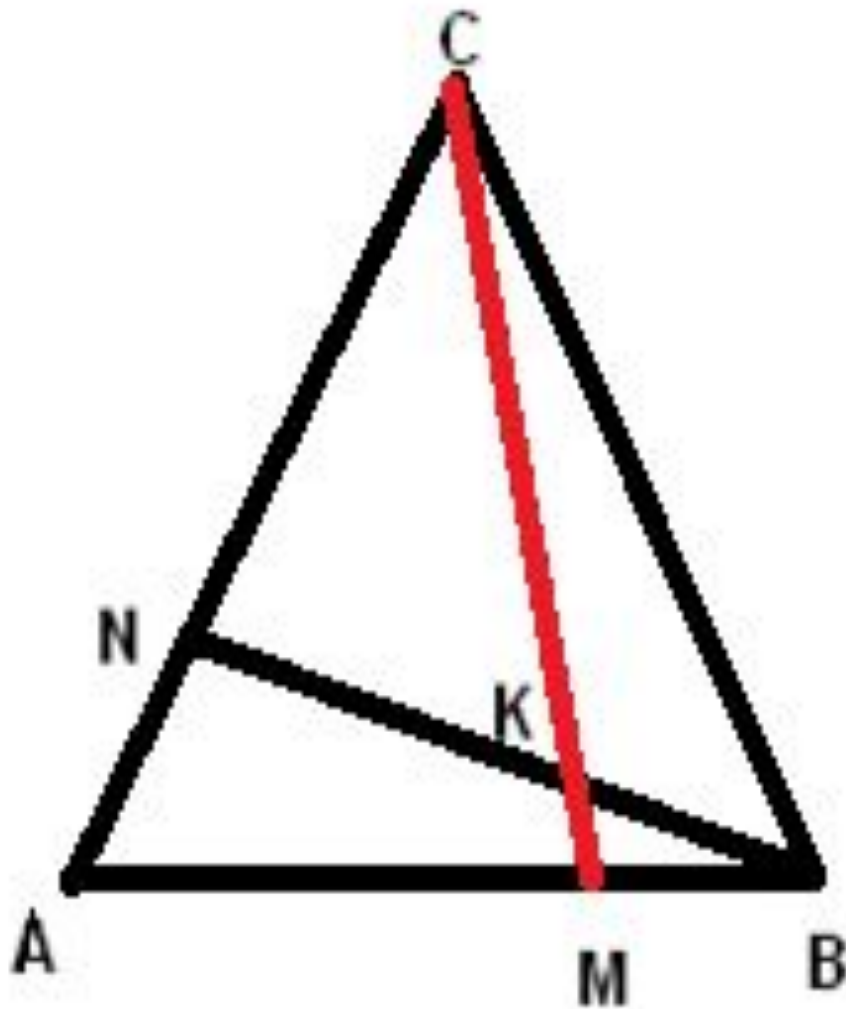


Прямая МК  
пересекает  
продолжения  
трёх сторон  
треугольника  
EFL.

$$\frac{EM}{MF} \cdot \frac{FD}{DL} \cdot \frac{LK}{KE} = 1$$

# Задача

## №3



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{AN} = 2$

$CM \cap BN = K$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in AC$

Найти:  $\frac{BK}{KN}$

Решение: Рассмотрим  $\triangle ABN$  и секущую  $CM$  (точки пересечения  $M$ ,  $K$ ,  $C$ ).

По теореме Менелая:

$$\frac{BK}{KN} * \frac{CN}{CA} * \frac{AM}{MB} = 1 \quad \frac{AM}{MB} = 2 = \frac{2}{1}$$

$$\frac{CN}{AN} = 2 = \frac{2}{1} \text{ тогда } \frac{CN}{CA} = \frac{2}{3}$$

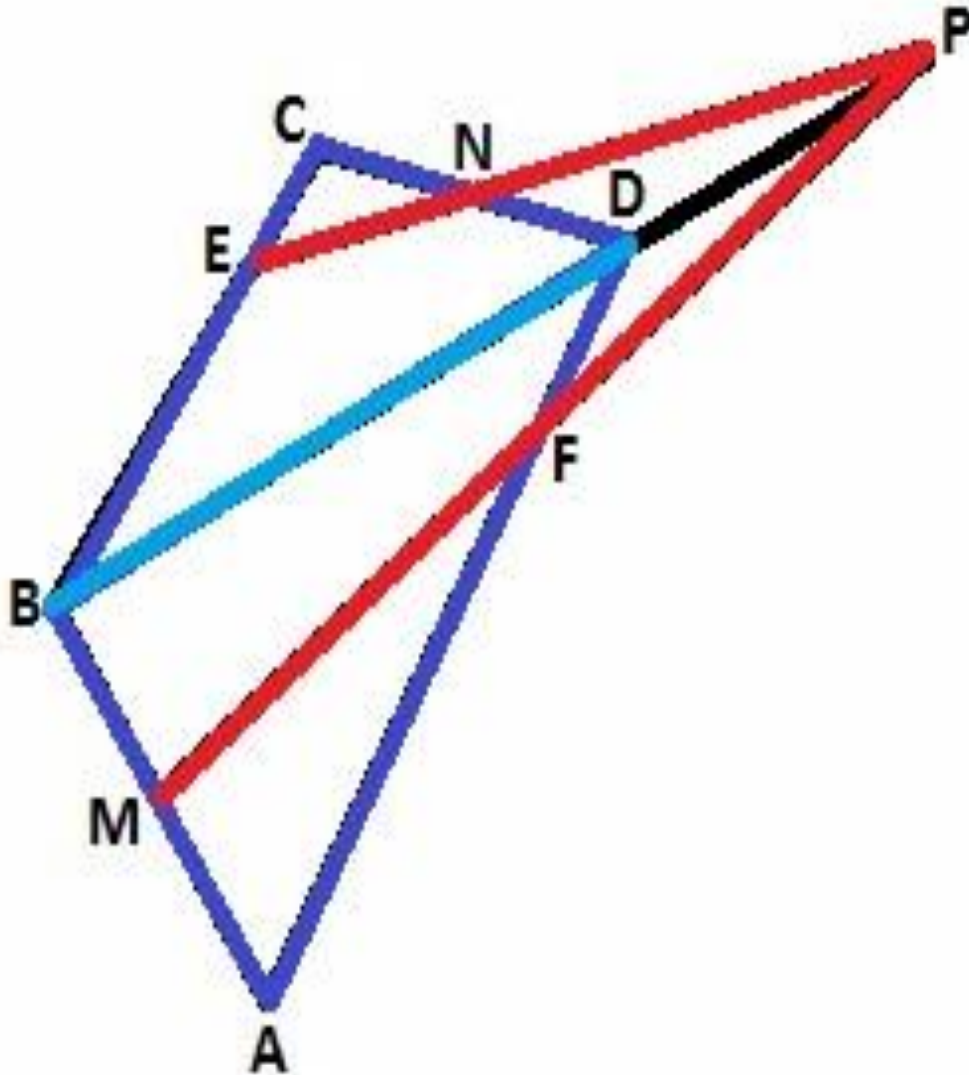
$$\frac{BK}{KN} * \frac{2}{3} * \frac{2}{1} = 1 \text{ следовательно}$$

$$\frac{BK}{KN} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$$

Ответ:  $\frac{BK}{KN} = \frac{3}{4}$

# Задача

## №1



Дано: 4<sup>уг.</sup> ABCD; P ∈ BD; N-  
середина CD; M-середина AB;  
PN ∩ BC = E; PM ∩ AD = F

Доказать:  $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$

Доказательство:

1) ΔBCD, секущая EP. По Теореме Менелая,  $\frac{BE}{EC} * \frac{CN}{ND} * \frac{DP}{PB} = 1$

$$CN = ND \rightarrow \frac{CN}{ND} = 1$$
$$\rightarrow \frac{BE}{EC} * 1 * \frac{DP}{PB} = 1$$

$$\rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{PB}{DP}$$

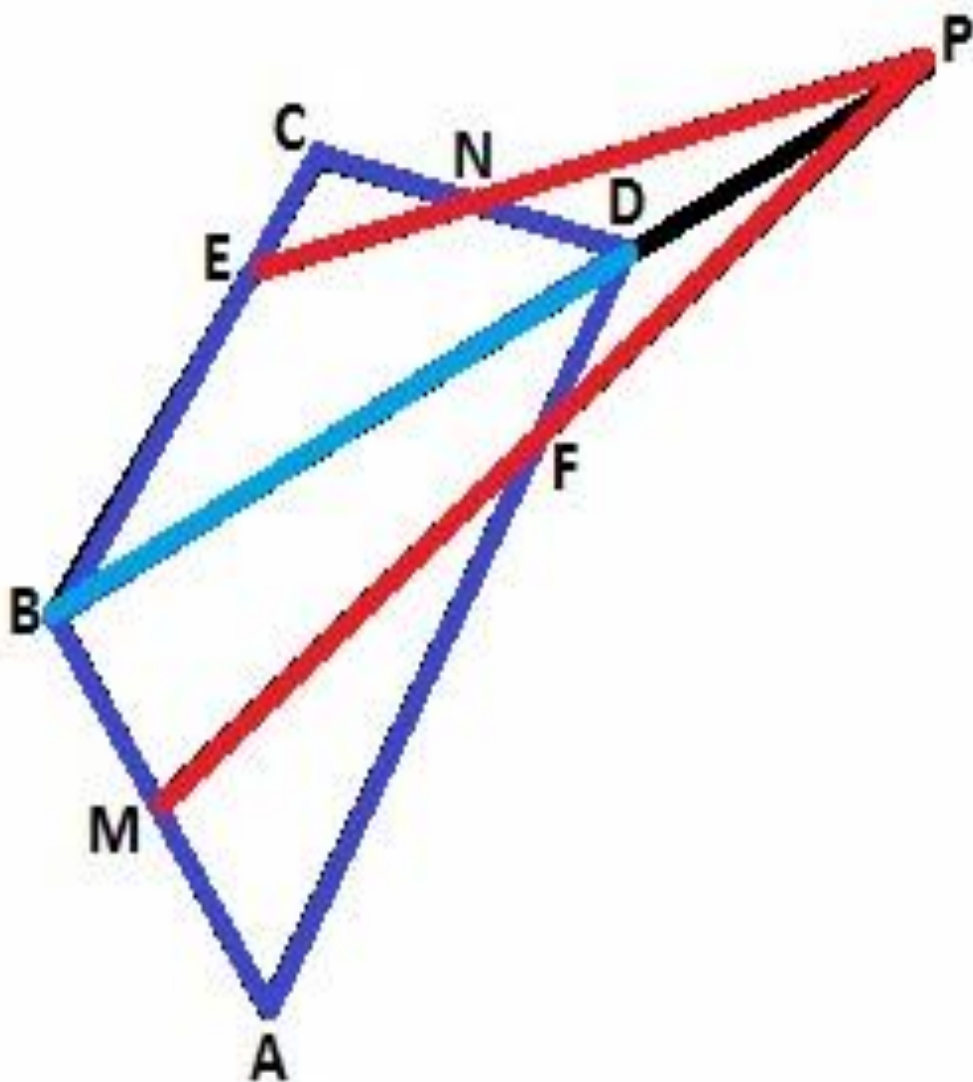
2) ΔABD, секущая MP. По Теореме Менелая,  $\frac{BM}{MA} * \frac{AF}{FD} * \frac{DP}{PB} = 1$

$$BM = MA \rightarrow \frac{BM}{MA} = 1$$
$$\rightarrow 1 * \frac{AF}{FD} * \frac{DP}{PB} = 1$$

$$\rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{PB}{DP}$$

# Задача

## №1



Дано: 4<sup>уг.</sup> ABCD;  $P \in BD$ ; N-  
середина CD; M-середина  
AB;  $PN \cap BC = E$ ;  $PM \cap AD = F$

Доказать:  $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$

Доказательство:

3) Из равенств **(1)**  $\frac{BE}{EC} = \frac{PB}{DP}$

и **(2)**  $\frac{AF}{FD} = \frac{PB}{DP}$  следует,

что  $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$

Что и требовалось  
доказать

# СВЕТЛОМАТ



Презентацию  
подготовил

Пейсахов Кирилл, 9-А

