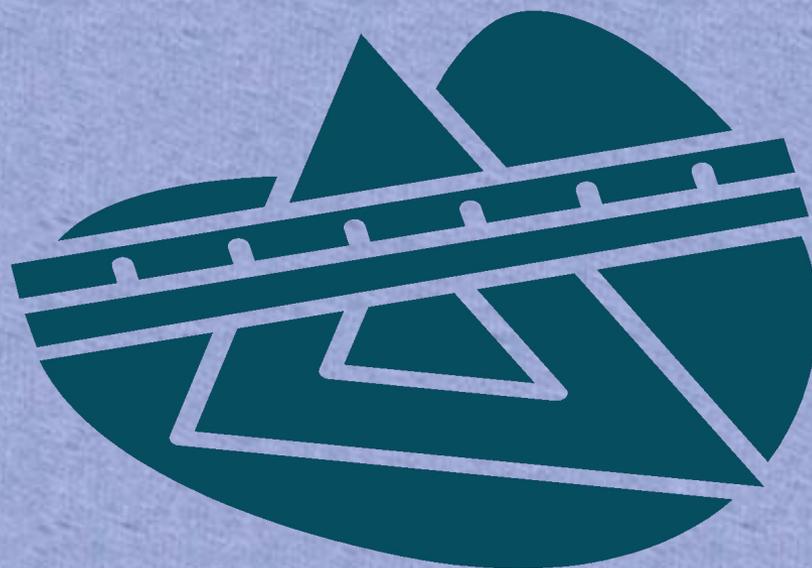


Теорема Менелая



ГЕОМЕТРИЯ

5



Менелай

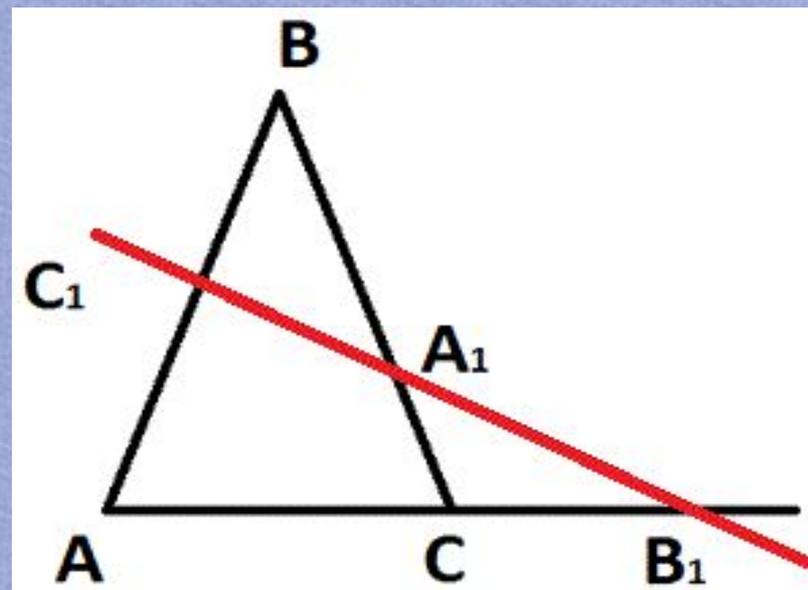
- ✓ **Менелай Александрийский** (ок. 100 н. э.) – древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии: написал 6 книг о вычислении хорд и 3 книги “Сферики”, сохранившиеся в арабском переводе. Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему, известную сегодня как *теорема Менелая*.

Теорема Менелая

✓ Дан треугольник ABC .
Точка C_1 лежит на стороне AB , точка A_1 – на стороне BC , а точка B_1 – на продолжении стороны AC , причем выполняется

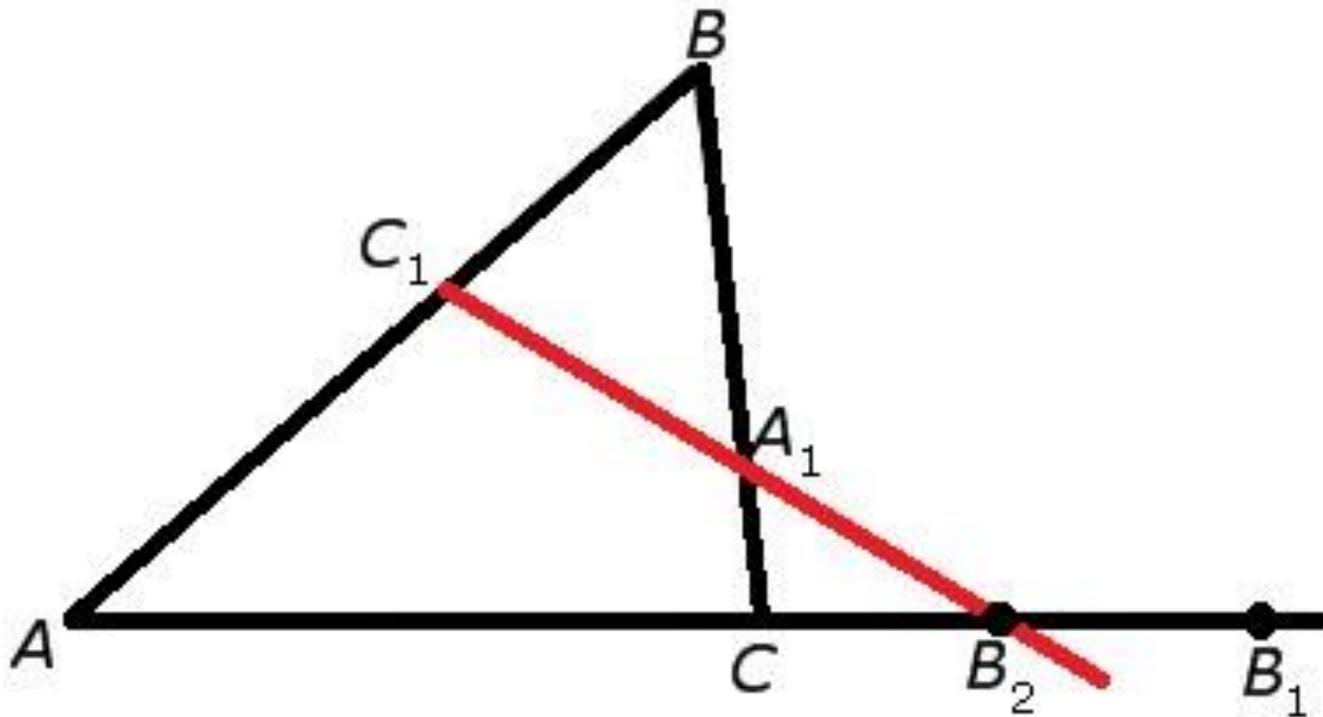
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

✓ Тогда точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

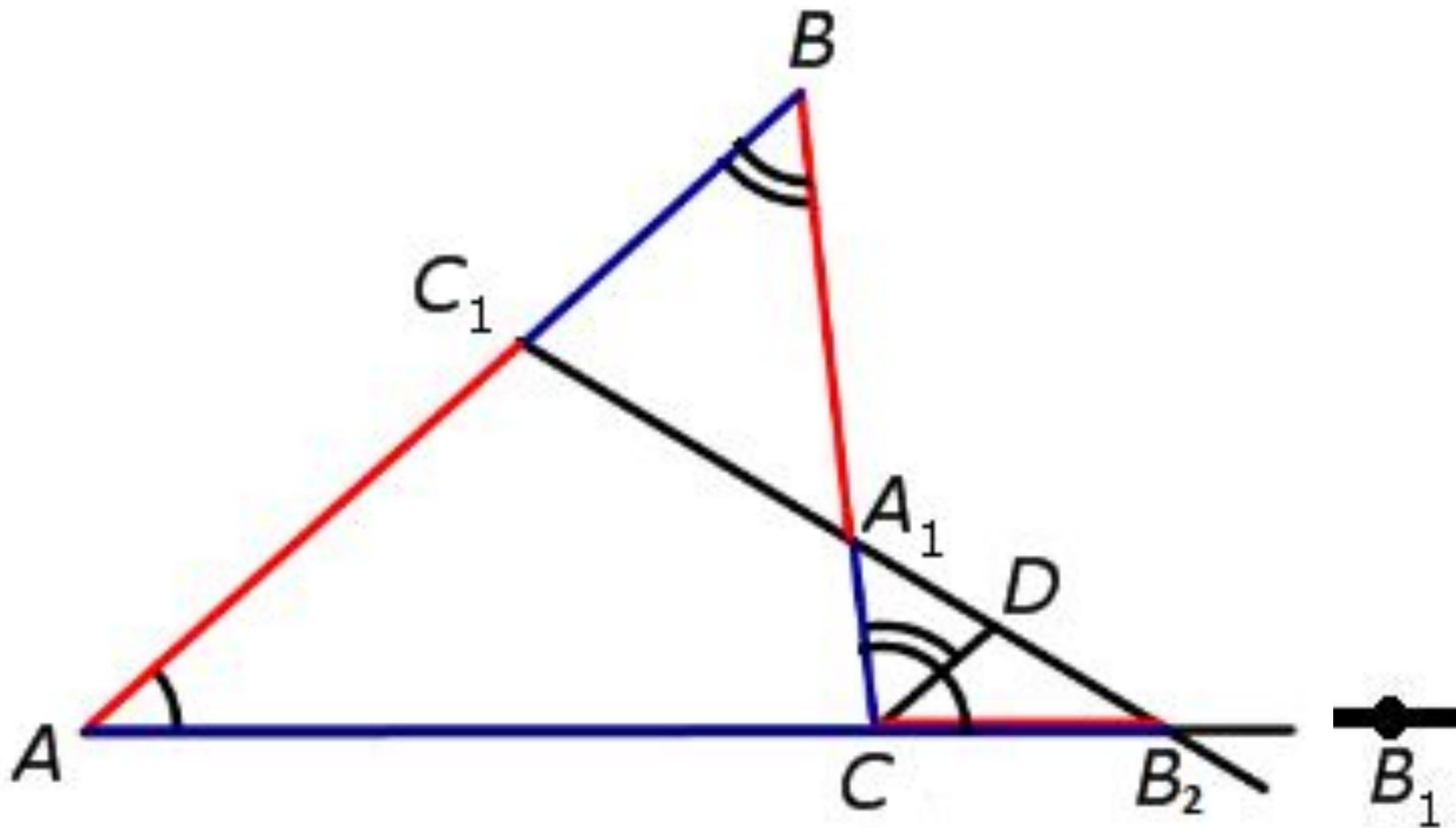


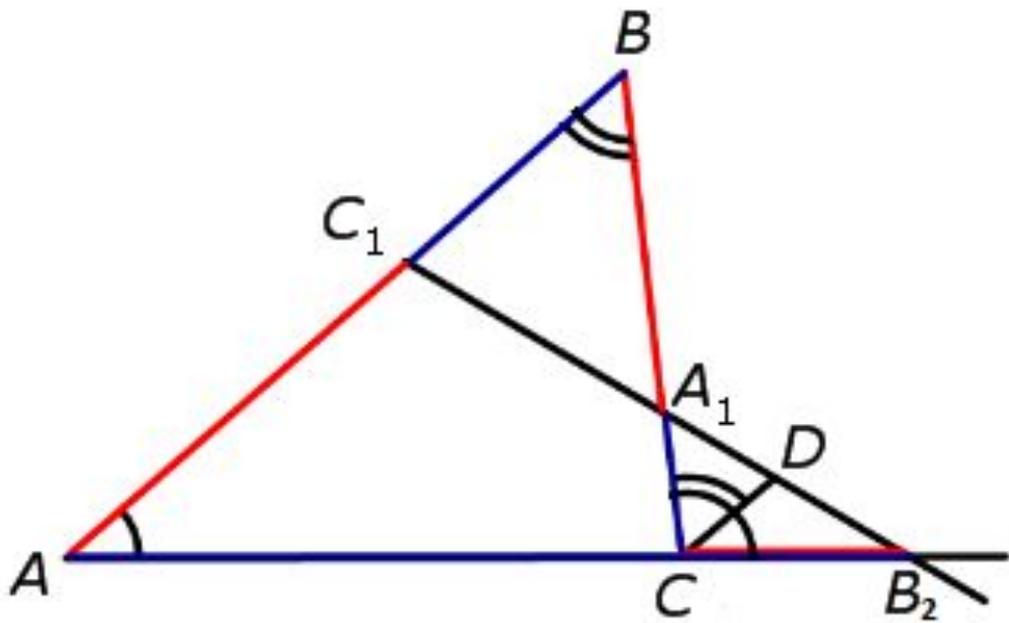
Доказательство

Теорема доказывается методом «от противного». Допустим, точки C_1 и $A_1 \in$ прямой, а точка $B_1 \notin$ прямой. Пусть прямая $A_1C_1 \cap$ продолжение стороны AC в точке B_2 .



- ✓ Проведем через точку C прямую, параллельную AB . Обозначим через D её точку пересечения с прямой B_2C_1 .





$\triangle AC_1B_2 \sim \triangle CDB_2$
 по двум углам
 ($\angle B_2$ -общий,
 $\angle C_1AB_2 = \angle DCB_2$).
 Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{B_2A}{B_2C}$$

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CDA_1$
 по двум углам
 ($\angle C_1BA_1 = \angle DCA_1$

$\angle BA_1C_1 = \angle DA_1C$
 $\left. \right\} \cdot \frac{C_1B}{CD} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow$

Из каждого равенства выразим CD:

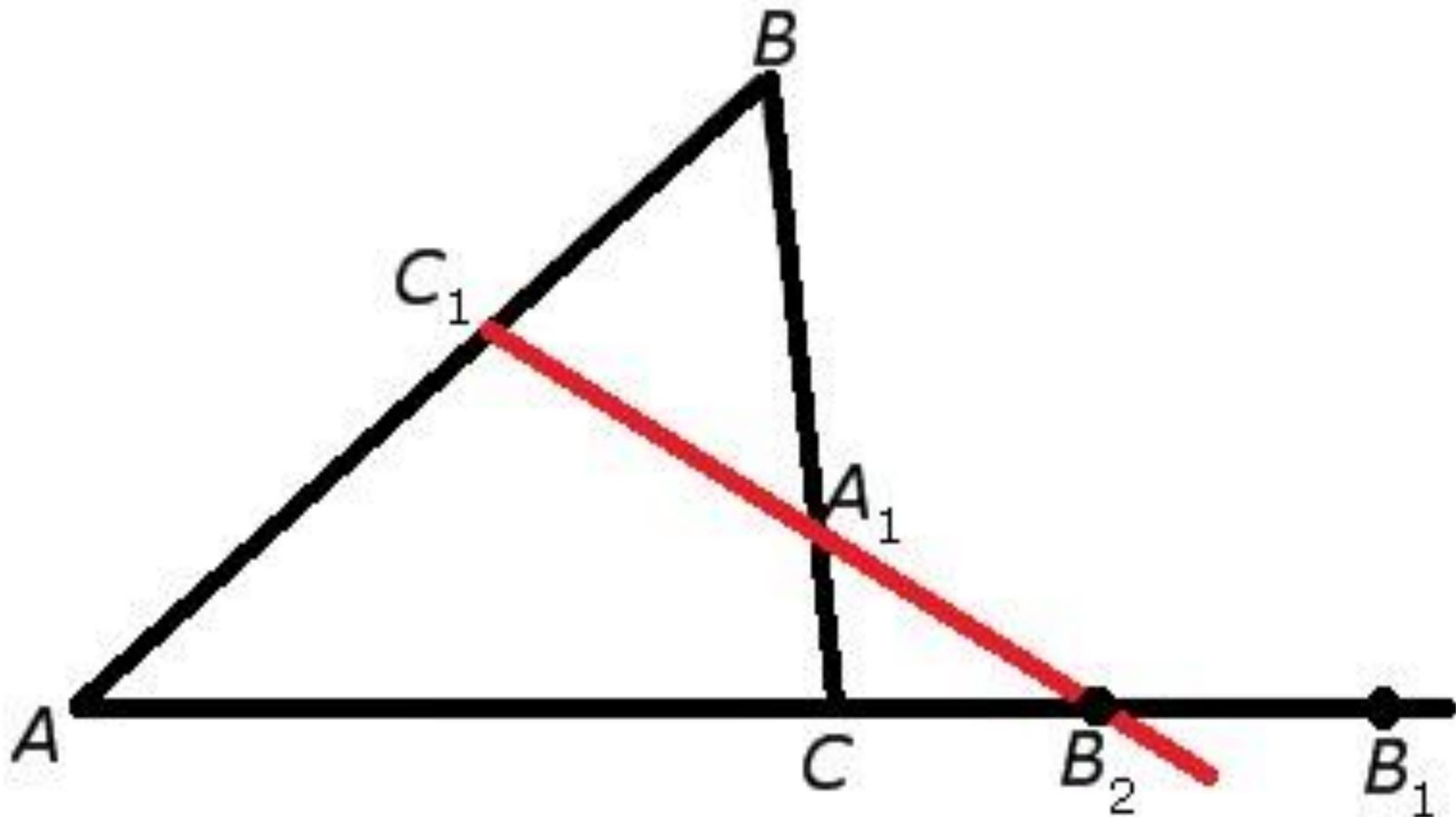
$$CD = \frac{AC_1 \cdot B_2C}{B_2A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$$

Откуда,

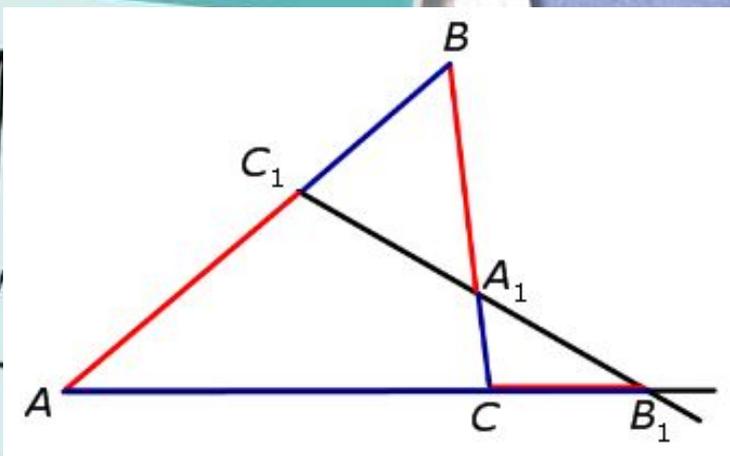
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$$

✓ Т.к. $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$ (по усл.) $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$

То точки B_1 и B_2 совпадают. Что и требовалось доказать.



Обратная теорема



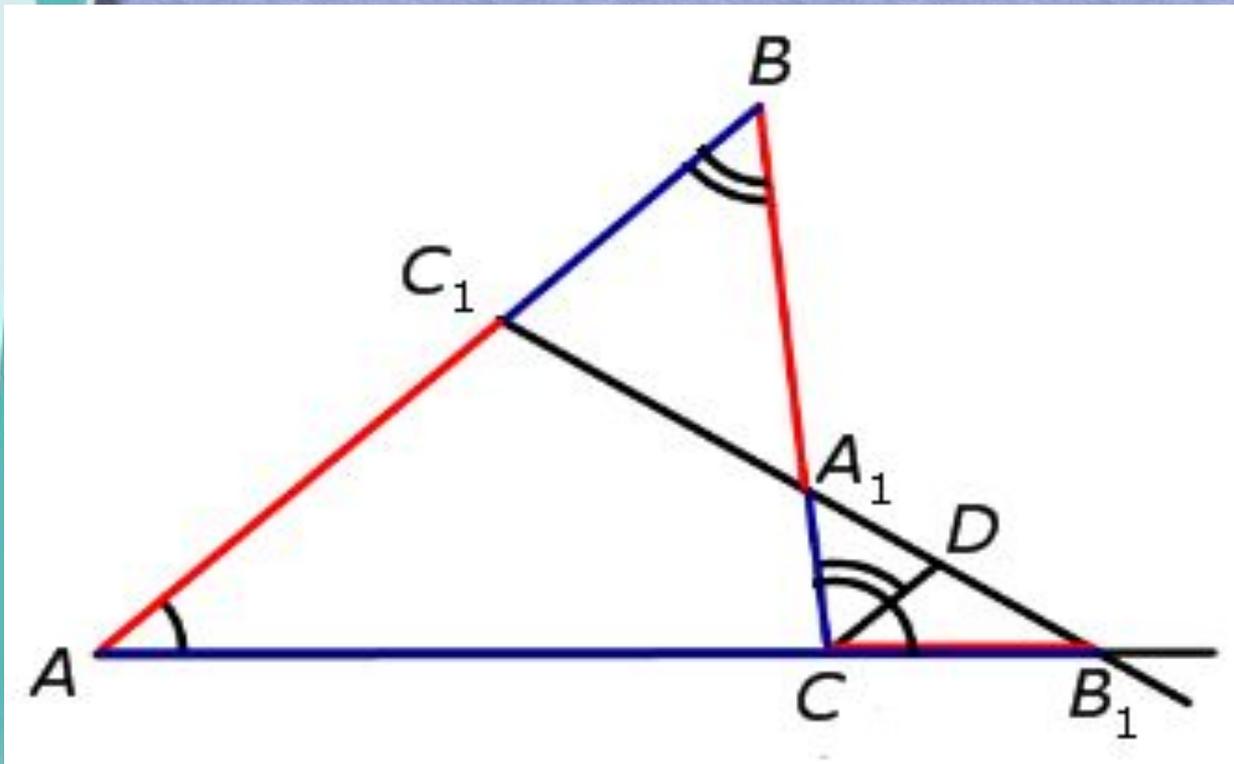
Прямая пересекает треугольник ABC , причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB , A_1 – точка ее пересечения со стороной BC , B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC .

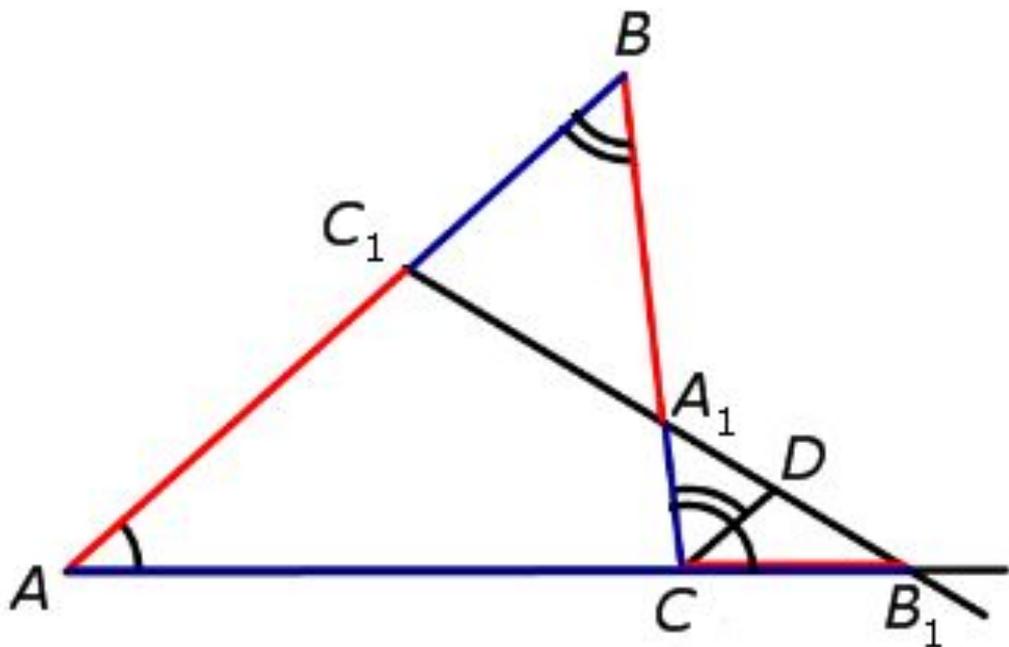
Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Доказательство

- ✓ Проведем через точку C прямую, параллельную AB . Обозначим через D её точку пересечения с прямой B_1C_1 .





$\triangle AC_1B_1 \sim \triangle CDB_1$
 по двум углам
 ($\angle B_1$ -общий,
 $\angle C_1AB_1 = \angle DCB_1$).
 Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{B_1A}{B_1C}$$

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CDA_1$
 по двум углам
 ($\angle C_1BA_1 = \angle DCA_1$

$\angle BA_1C_1 = \angle DA_1C$
 $\left. \right\} \cdot \frac{C_1B}{CD} = \frac{BA_1}{A_1C}$

Из каждого равенства выразим CD:

$$CD = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$$

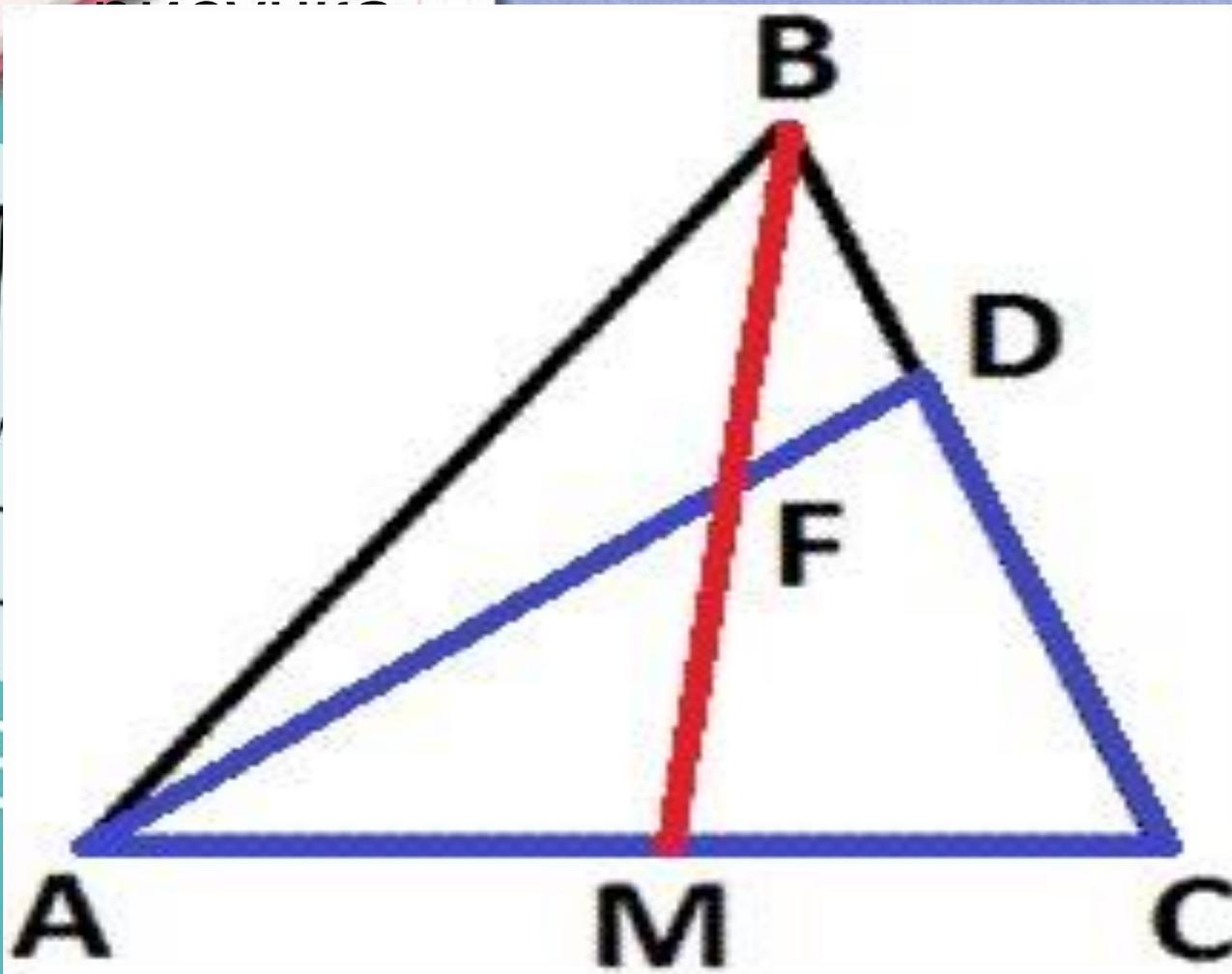
Откуда,

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Что и требовалось доказать.

Задача №1

✓ Сформулируйте теорему для данного

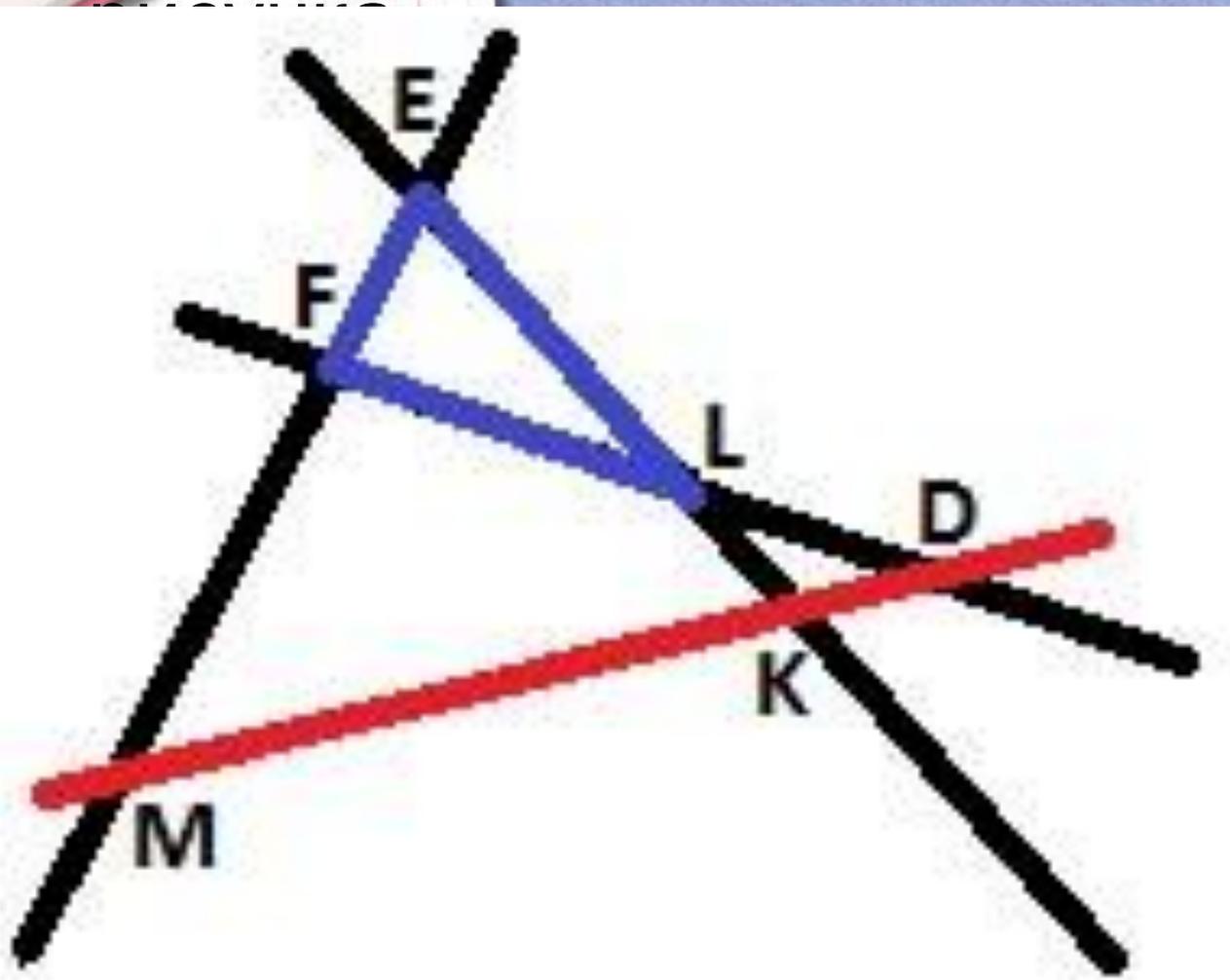


Прямая MB
пересекает две
стороны и
продолжение
третьей
стороны
треугольника

$$\frac{AM}{MC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$$

Задача №2

✓ Сформулируйте теорему для данного

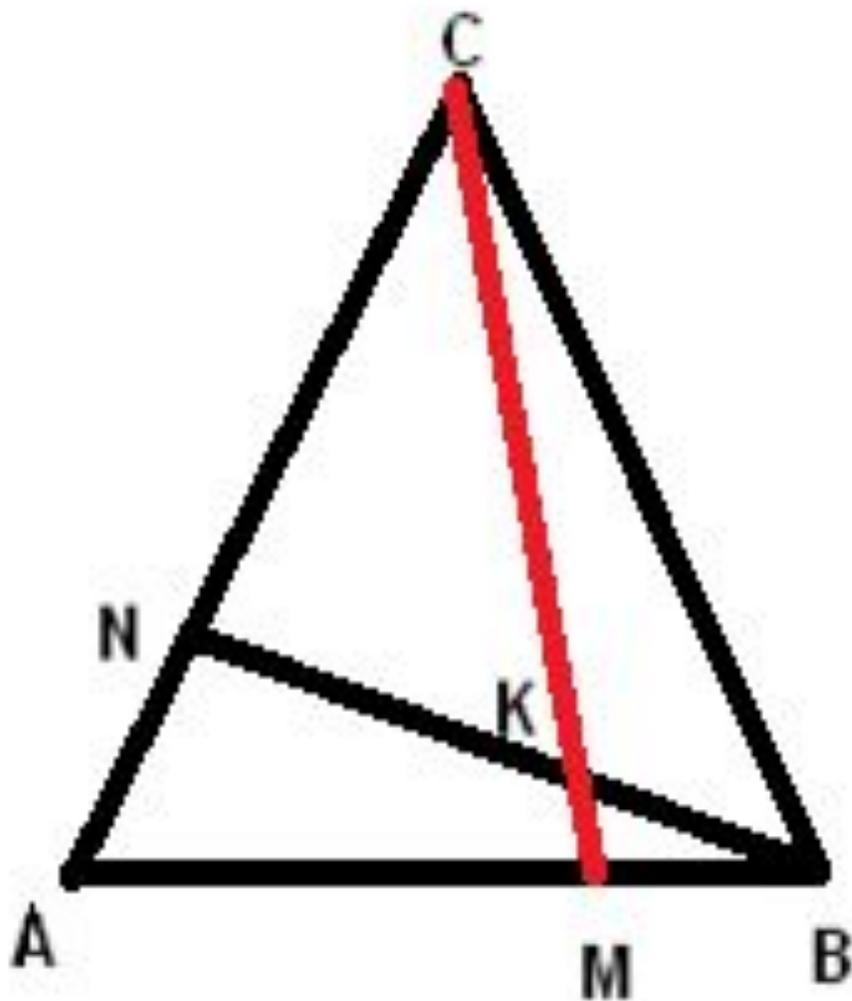


Прямая МК
пересекает
продолжения
трёх сторон
треугольника
EFL.

$$\frac{EM}{MF} \cdot \frac{FD}{DL} \cdot \frac{LK}{KE} = 1$$

Задача

№3



Дано: $\triangle ABC$; $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{AN} = 2$

$CM \cap BN = K$, $M \in AB$, $N \in AC$

Найти: $\frac{BK}{KN}$

Решение: Рассмотрим $\triangle ABN$ и секущую CM (точки пересечения M , K , C).

По теореме Менелая:

$$\frac{BK}{KN} * \frac{CN}{CA} * \frac{AM}{MB} = 1 \quad \frac{AM}{MB} = 2 = \frac{2}{1}$$

$$\frac{CN}{AN} = 2 = \frac{2}{1} \text{ тогда } \frac{CN}{CA} = \frac{2}{3}$$

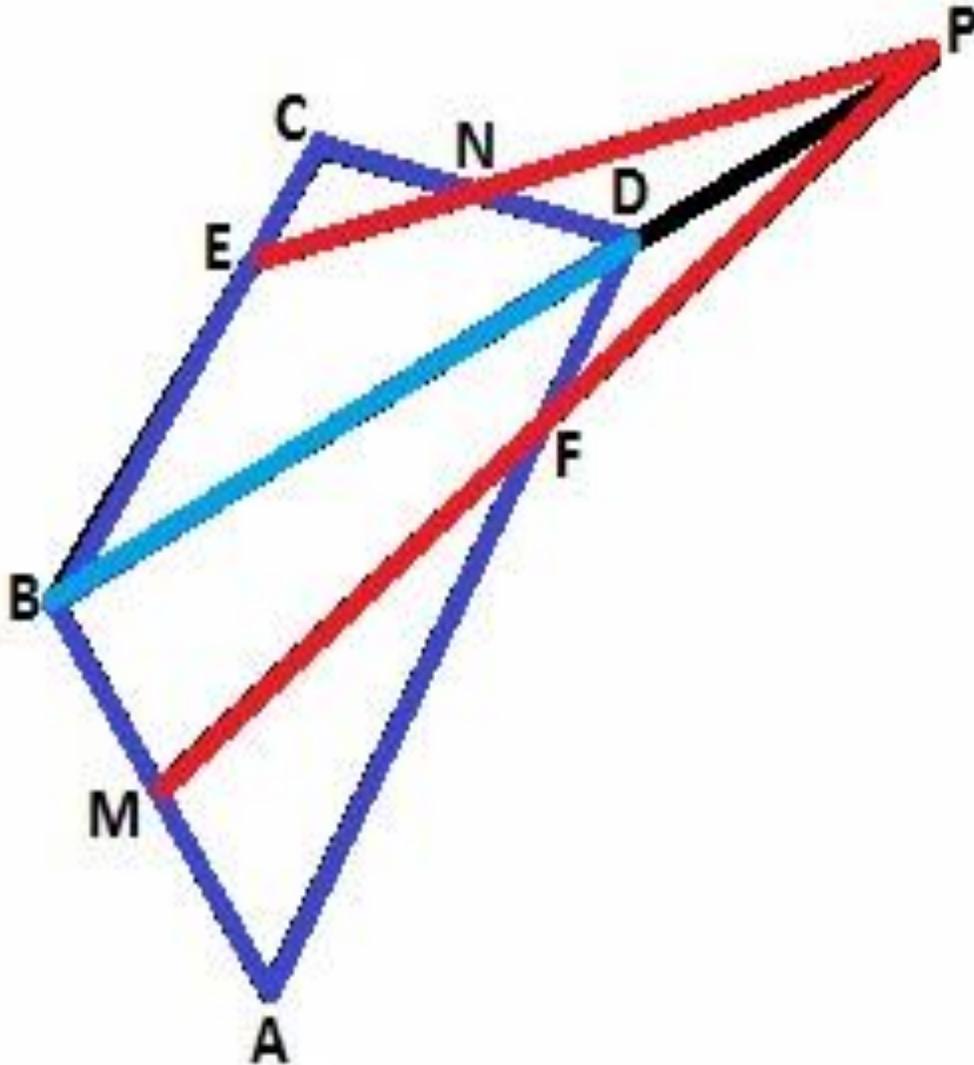
$$\frac{BK}{KN} * \frac{2}{3} * \frac{2}{1} = 1 \text{ следовательно}$$

$$\frac{BK}{KN} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{BK}{KN} = \frac{3}{4}$

Задача

№1



Дано: 4^{уг.} ABCD; P ∈ BD; N-
середина CD; M-середина AB;
PN ∩ BC = E; PM ∩ AD = F

Доказать: $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$

Доказательство:

1) ΔBCD, секущая EP. По Теореме Менелая, $\frac{BE}{EC} * \frac{CN}{ND} * \frac{DP}{PB} = 1$

$$CN = ND \rightarrow \frac{CN}{ND} = 1$$
$$\rightarrow \frac{BE}{EC} * 1 * \frac{DP}{PB} = 1$$

$$\rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{PB}{DP}$$

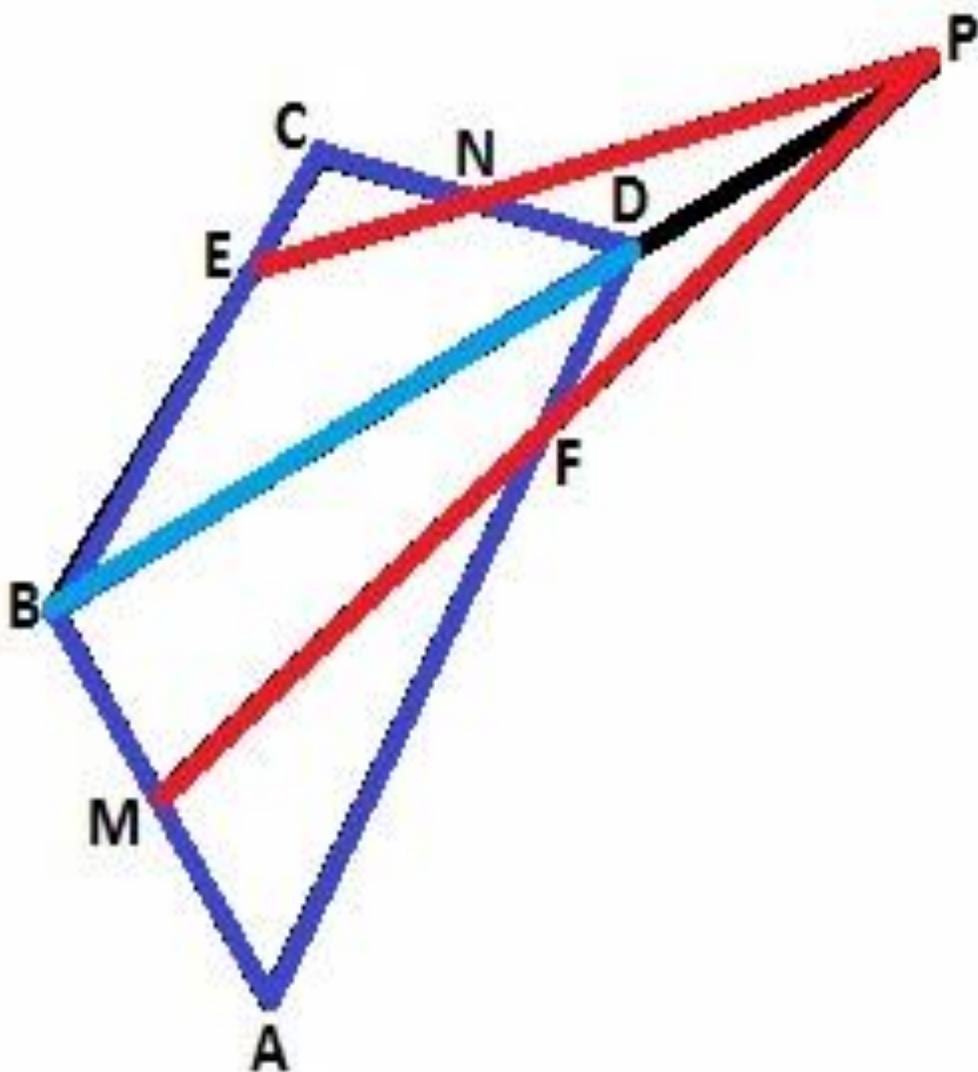
2) ΔABD, секущая MP. По Теореме Менелая, $\frac{BM}{MA} * \frac{AF}{FD} * \frac{DP}{PB} = 1$

$$BM = MA \rightarrow \frac{BM}{MA} = 1$$
$$\rightarrow 1 * \frac{AF}{FD} * \frac{DP}{PB} = 1$$

$$\rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{PB}{DP}$$

Задача

№1



Дано: 4^{уг.} ABCD; $P \in BD$; N-
середина CD; M-середина
AB; $PN \cap BC = E$; $PM \cap AD = F$

Доказать: $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$

Доказательство:

3) Из равенств **(1)** $\frac{BE}{EC} = \frac{PB}{DP}$

и **(2)** $\frac{AF}{FD} = \frac{PB}{DP}$ следует,

что $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$

Что и требовалось
доказать

СВІТАСЛОВА



Презентацию
подготовил

Пейсахов Кирилл, 9-А

