Теорема Менелая

Менелай

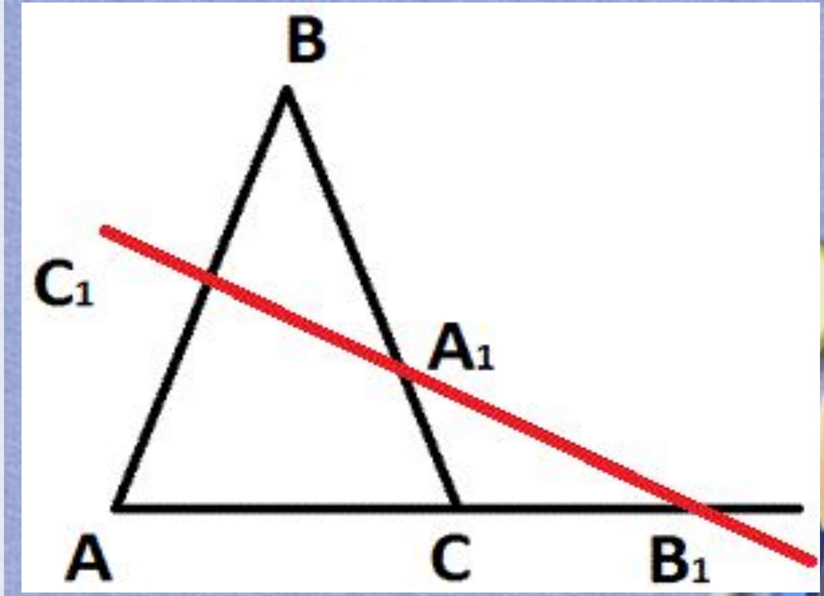
- **Менелай Александрийский** (ок. 100 н. э.) – древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферической тригонометрии: написал 6 книг о вычислении хорд и 3 книги "Сферики", сохранившиеся в арабском переводе. Для получения формул сферической тригонометрии использовал теорему, известную сегодня как *теорема Менелая*.

Теорема Менелая

- Дан треугольник ABC. Точка C_1 лежит на стороне AB, точка A_1 – на стороне BC, а точка B_1 – на продолжении стороны AC, причем выполняется со

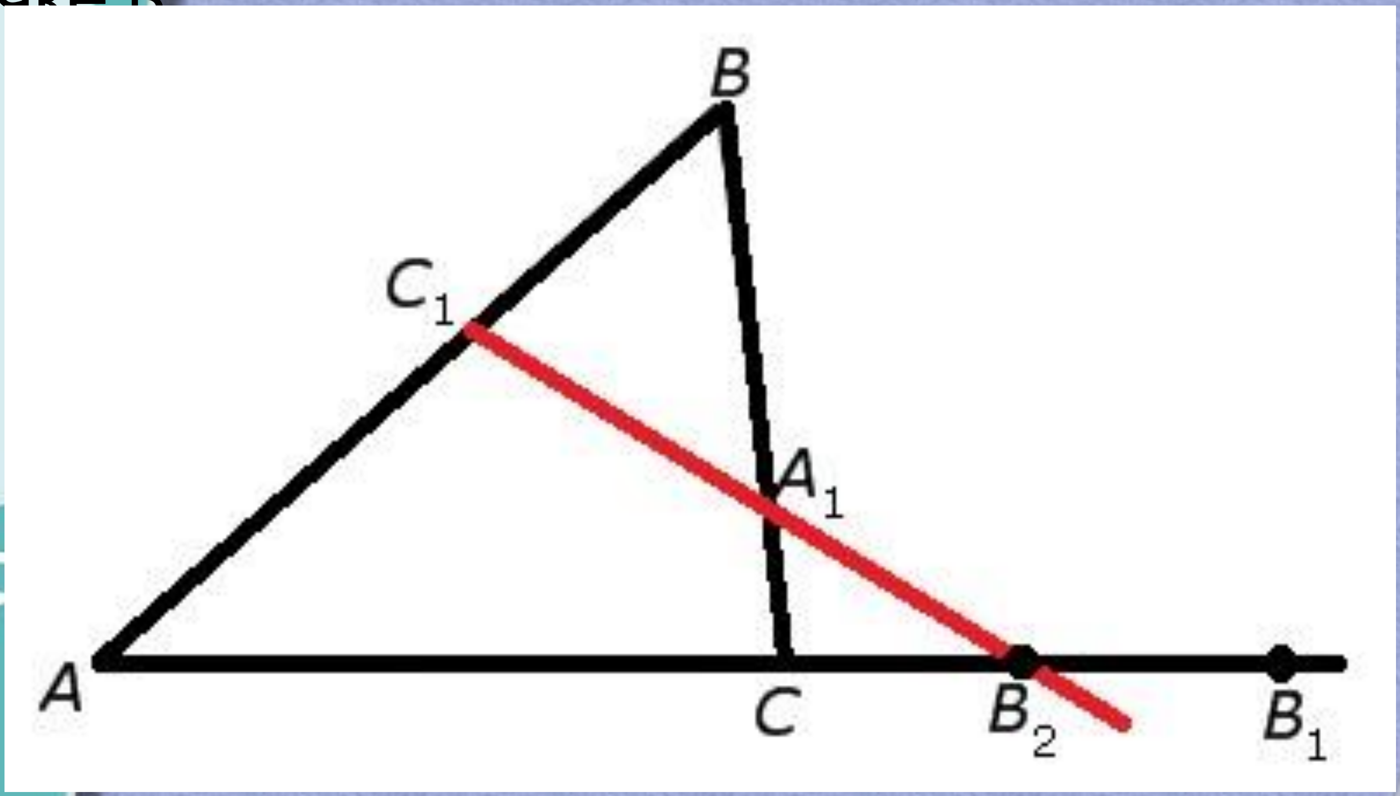
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

- Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

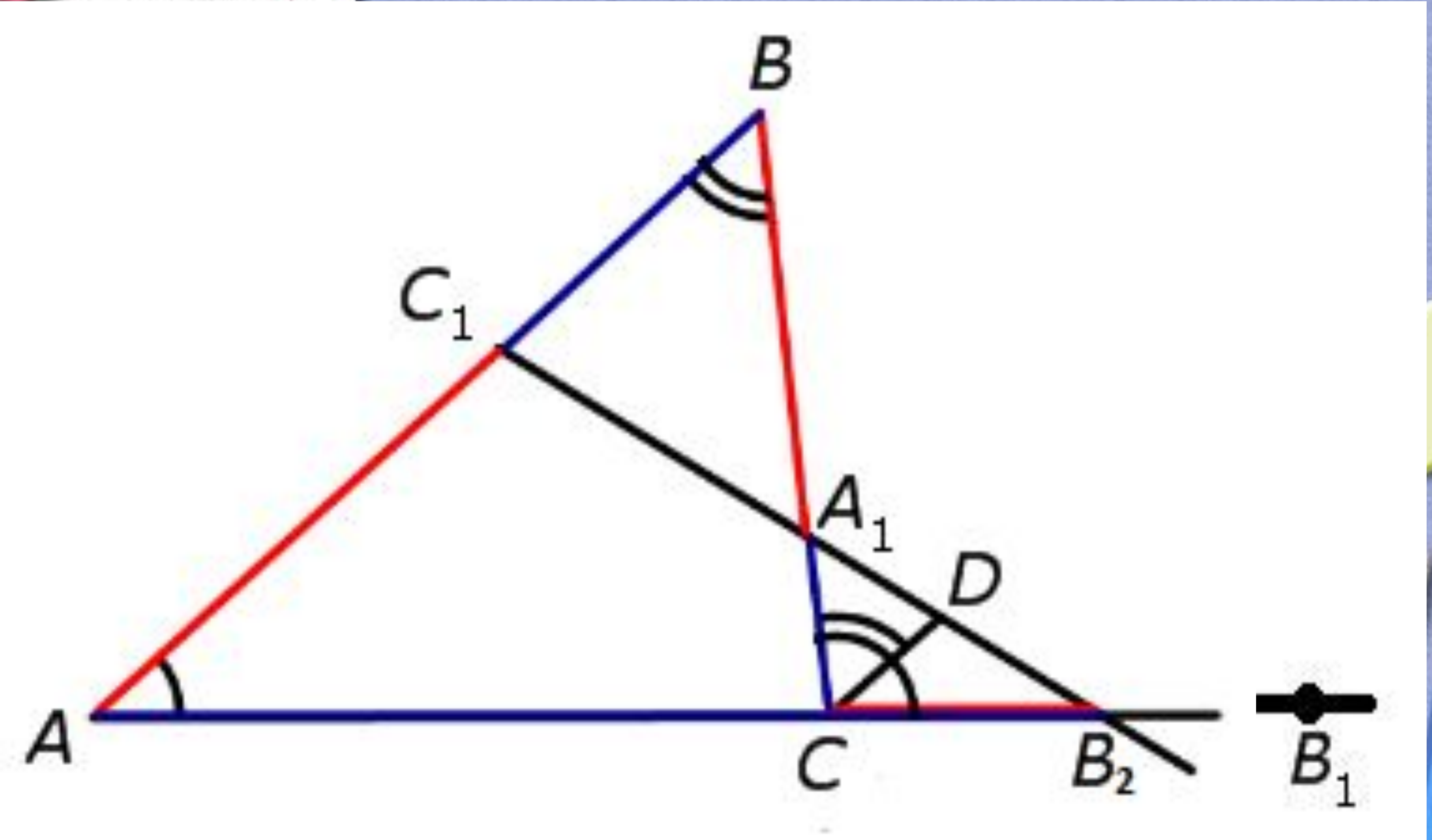


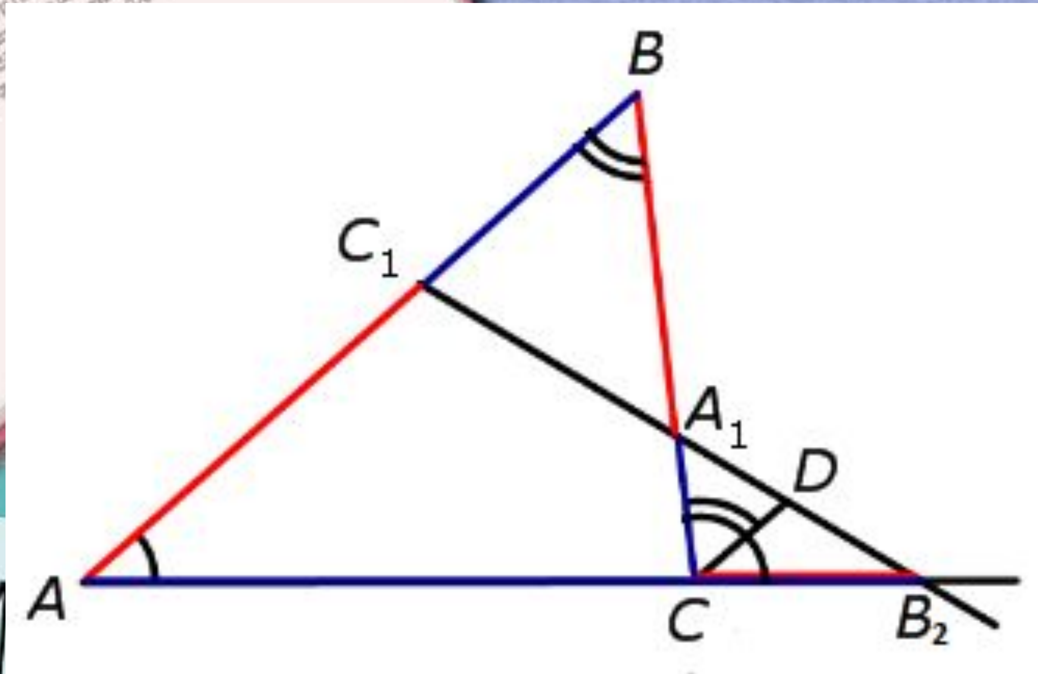
Доказательство

Теорема доказывается методом *«от противного»*. Допустим, точки C_1 и A_1 $\in$ прямой, а точка B_1 $\notin$ прямой. Пусть прямая A_1C_1 $\cap$ продолжение стороны AC в точке B



- Проведем через точку C прямую, параллельную AB. Обозначим через D её точку пересечения с прямой B_2C_1.





$\triangle AC_1B_2 \sim \triangle CDB_2$ по двум углам ($\angle B_2$-общий, $\angle C_1AB_2 = \angle DCB_2$). Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{B_2A}{B_2C}$$

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CDA_1$ по двум углам ($\angle C_1BA_1 = \angle DCA_1$, $\angle BA_1C_1 = \angle DA_1C$). С…но.

$$\frac{C_1B}{CD} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

Из каждого равенства выразим CD:

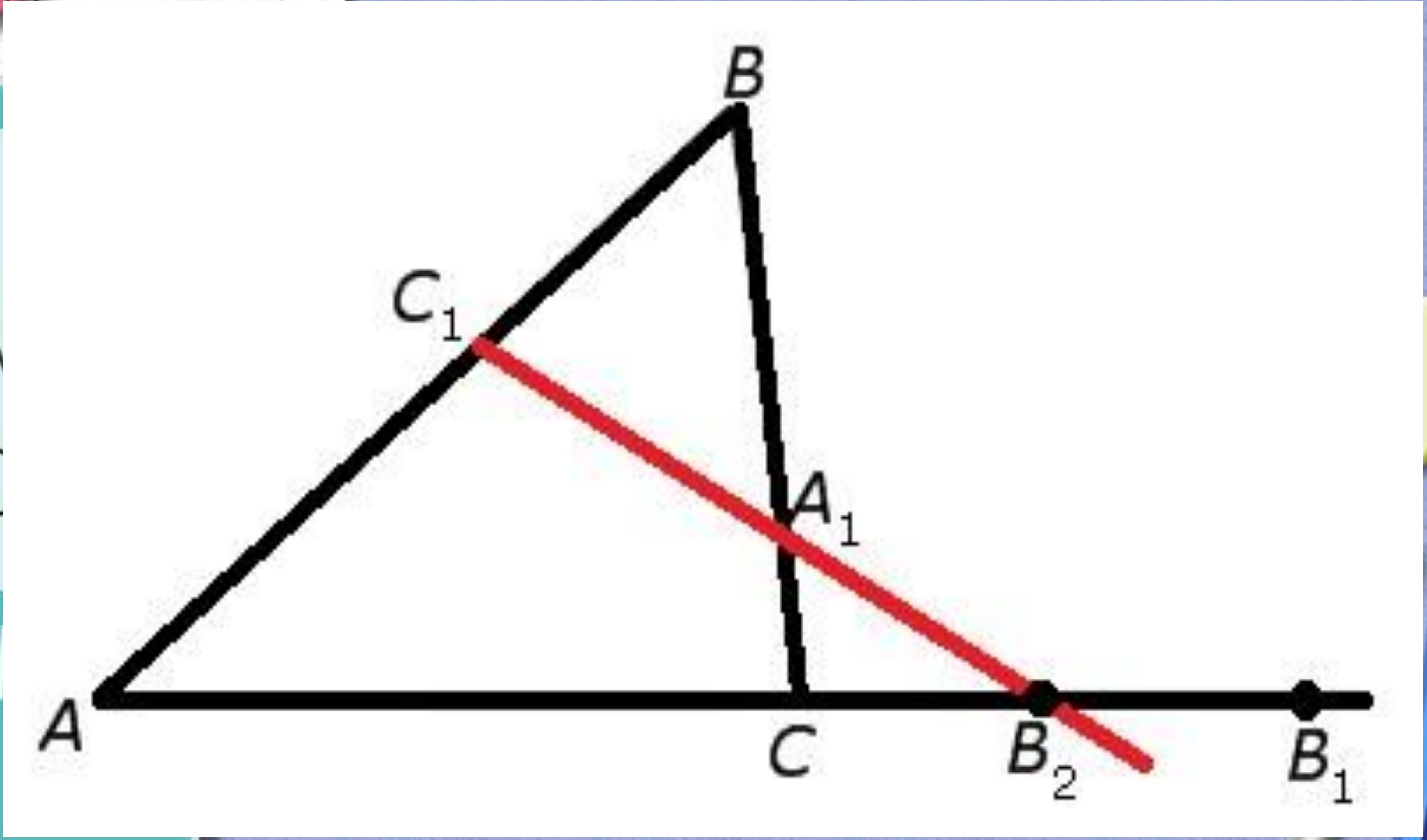
$$CD = \frac{AC_1 \cdot B_2C}{B_2A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$$

Откуда,

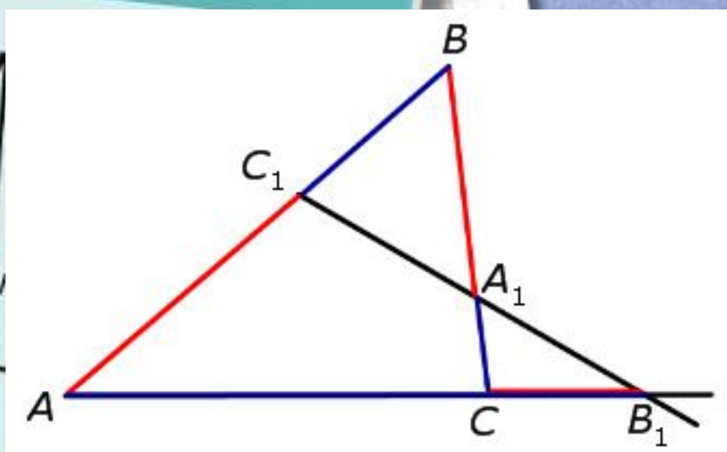
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1$$

✔ Т.к. $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1$ (по усл.) и $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$

То точки B_1 и B_2 совпадают. Что и требовалось доказать.



Обратная теорема

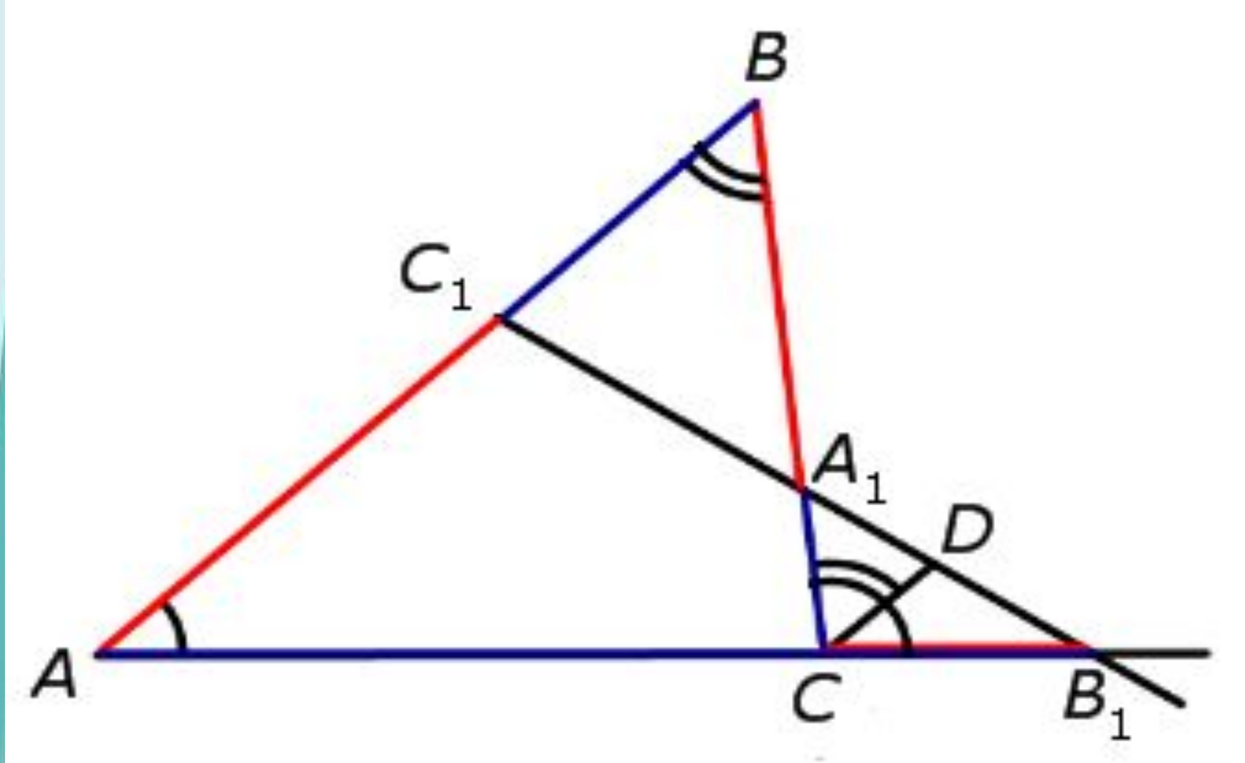


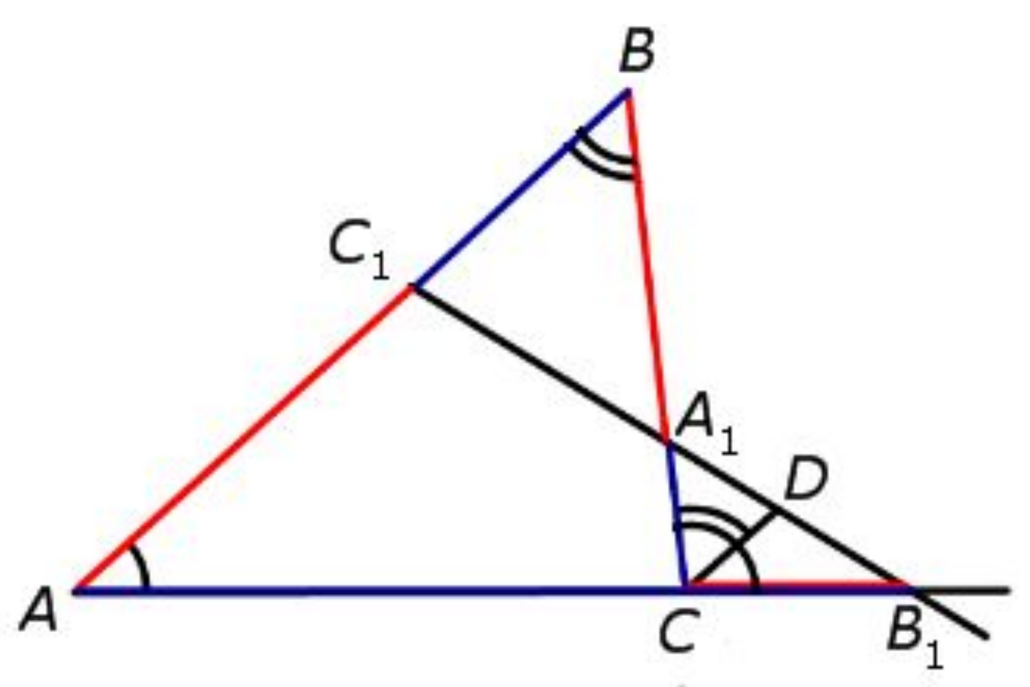
Прямая пересекает треугольник ABC, причем C_1 – точка ее пересечения со стороной AB, A_1 – точка ее пересечения со стороной BC, B_1 – точка ее пересечения с продолжением стороны AC. То

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Доказательство

- Проведем через точку C прямую, параллельную AB. Обозначим через D её точку пересечения с прямой B_1C_1.





$\triangle AC_1B_1 \sim \triangle CDB_1$ по двум углам ($\angle B_1$-общий, $\angle C_1AB_1 = \angle DCB_1$). Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CD} = \frac{B_1A}{B_1C}$$

$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CDA_1$ по двум углам ($\angle C_1BA_1 = \angle DCA_1$, $\angle BA_1C_1 = \angle DA_1C$). С…ьно.

$$\frac{C_1B}{CD} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

Из каждого равенства выразим CD:

$$CD = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1}$$

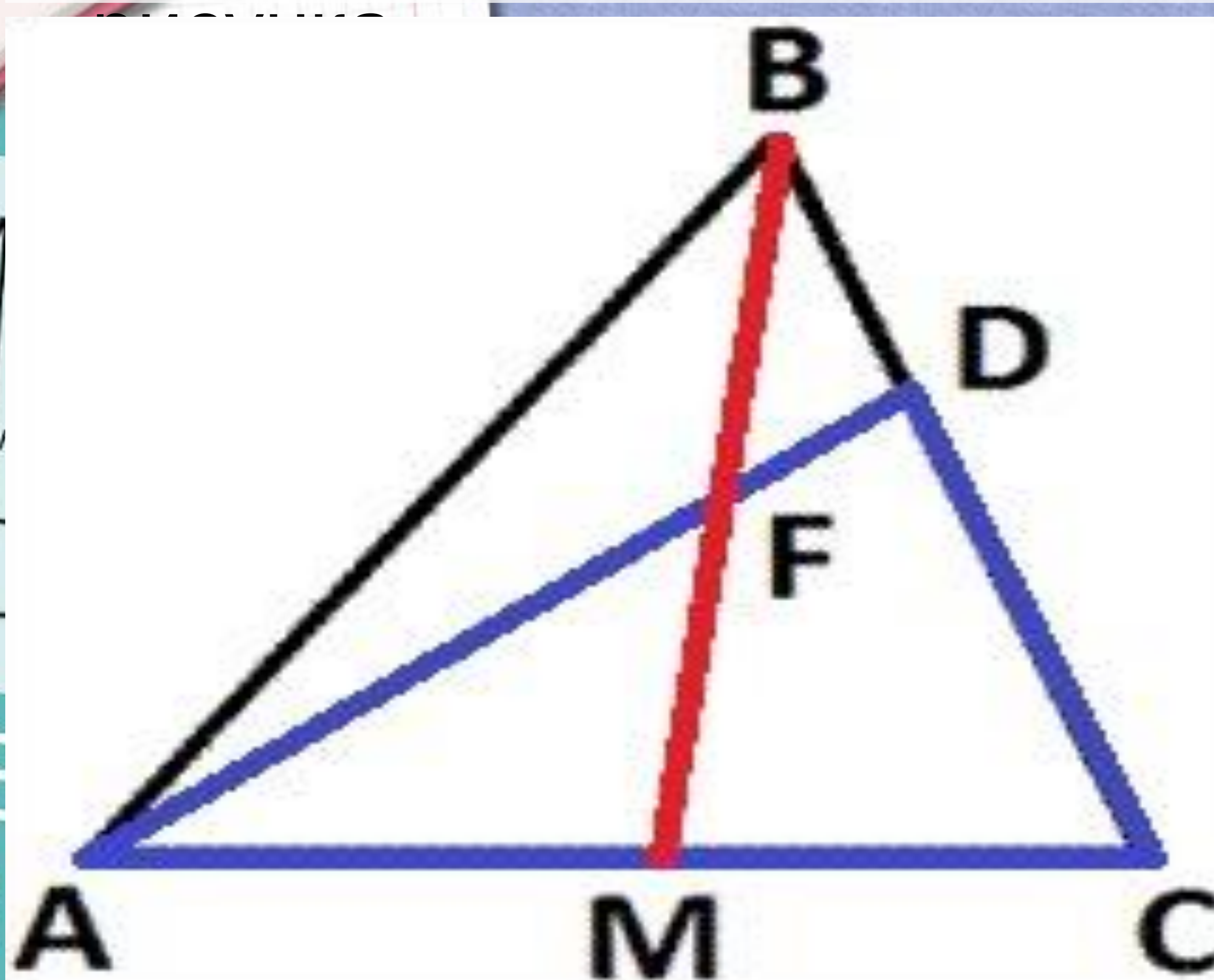
Откуда,

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Что и требовалось доказать.

Задача №1

- Сформулируйте теорему для данного рисунка

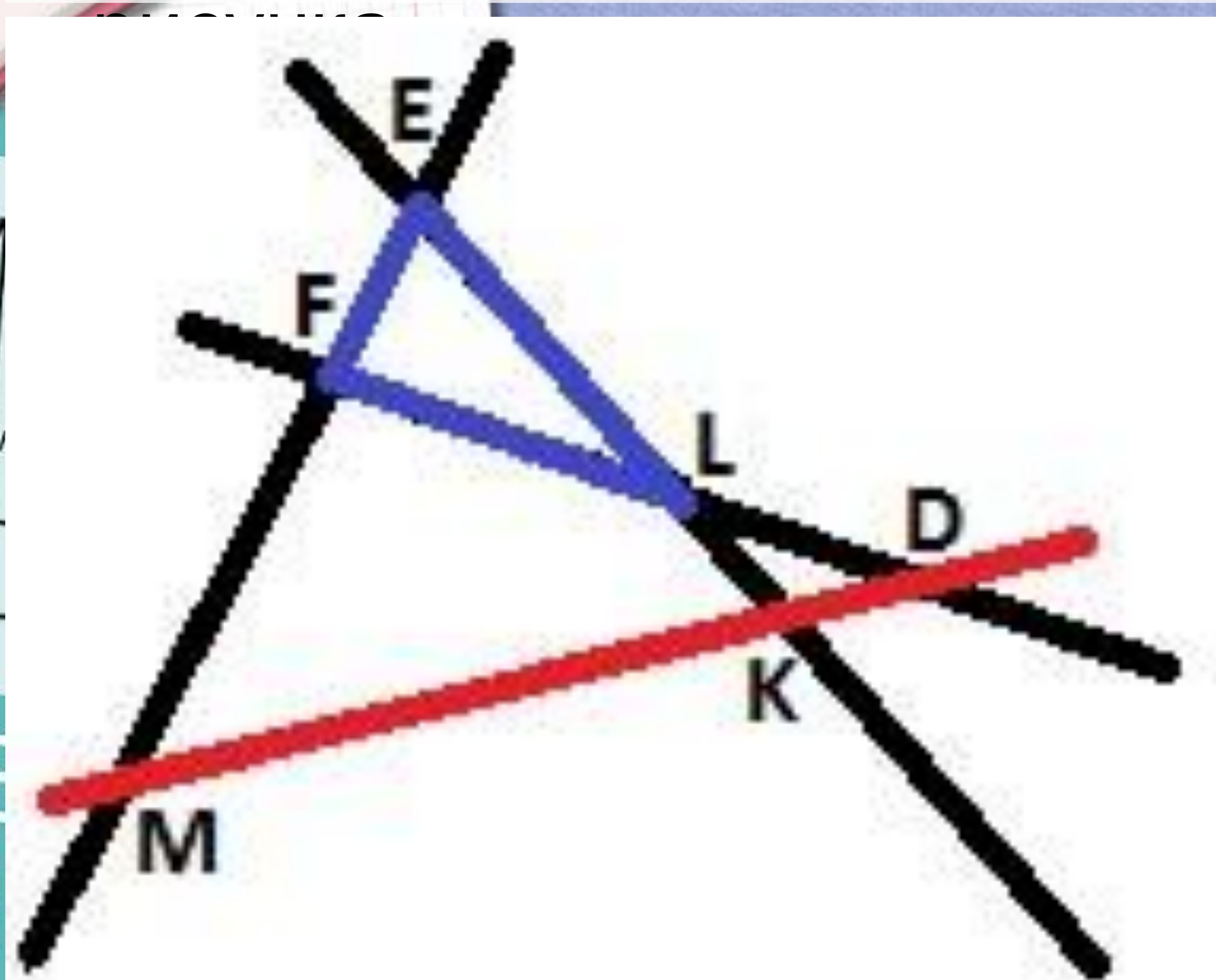


Прямая MB пересекает две стороны и продолжение третьей стороны треугольника

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DF}{FA}=1$$

Задача №2

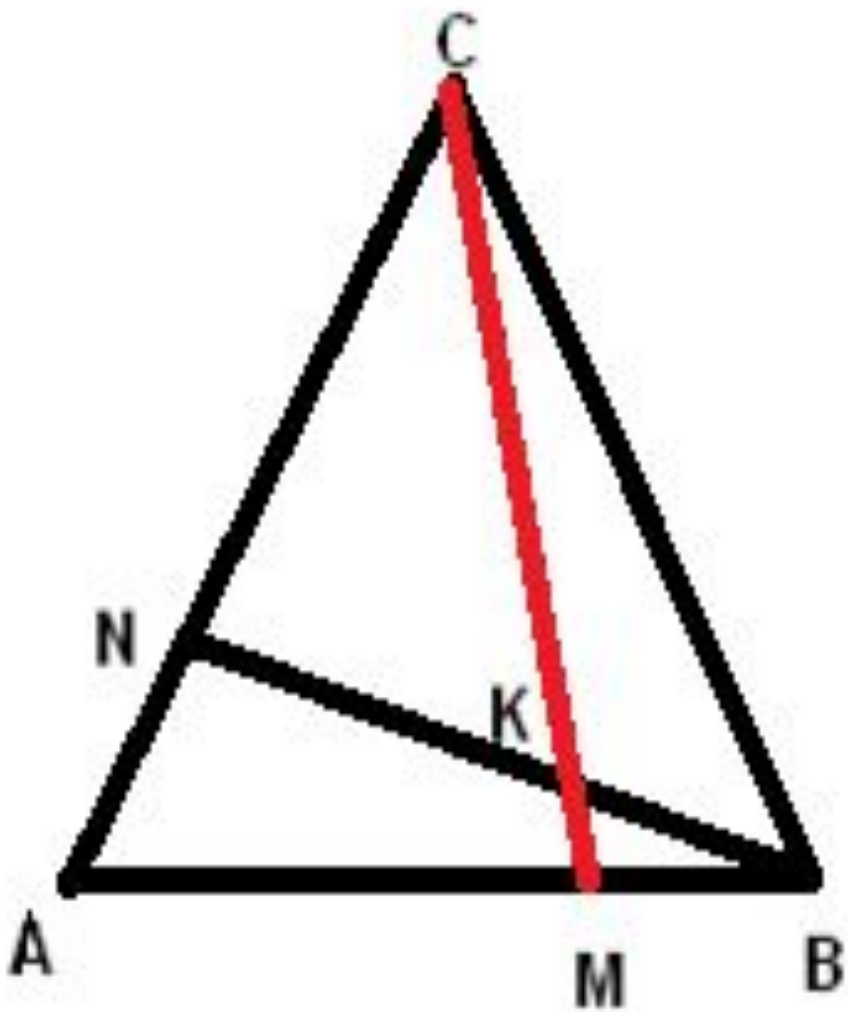
- Сформулируйте теорему для данного рисунка



Прямая МК пересекает продолжения трёх сторон треугольника EFL.

$$\frac{EM}{MF}\cdot\frac{FD}{DL}\cdot\frac{LK}{KE}=1$$

Задача №3



Дано: ΔABC; $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{AN}=2$

$CM \cap BN = K$, $M \in AB$, $N \in AC$

Найти: $\frac{BK}{KN}$

Решение: Рассмотрим ΔABN и секущую CM (точки пересечения M, K, C).

По теореме Менелая:

$\frac{BK}{KN} * \frac{CN}{CA} * \frac{AM}{MB} = 1$, т.к. $\frac{AM}{MB} = 2 = \frac{2}{1}$,

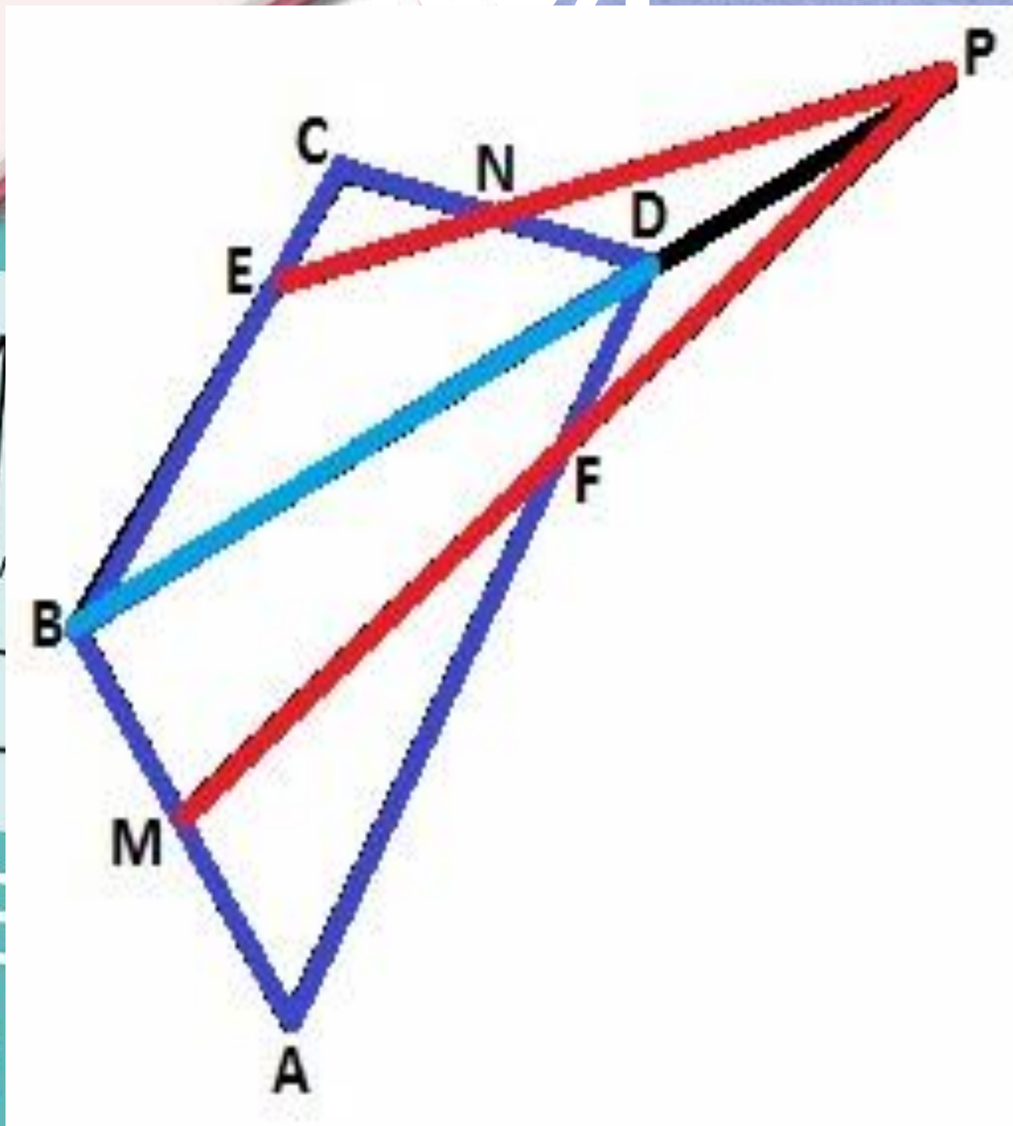
$\frac{CN}{AN} = 2 = \frac{2}{1}$, тогда $\frac{CN}{CA} = \frac{2}{3}$, то

$\frac{BK}{KN} * \frac{2}{3} * \frac{2}{1} = 1$, следовательно

$$\frac{BK}{KN} = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{BK}{KN} = \frac{3}{4}$

Задача №4



<u>Дано:</u> $4^{\text{уг.}}$ ABCD; P∈BD; N-середина CD; M-середина AB; PN∩BC=E; PM∩AD=F

<u>Доказать:</u> $\frac{BE}{EC}=\frac{AF}{FD}$

<u>Доказательство:</u>

1)ΔBCD, секущая EP. По Теореме Менелая, $\frac{BE}{EC}*\frac{CN}{ND}*\frac{DP}{PB}=1$

CN=ND →

$\rightarrow \frac{CN}{ND}=1 \rightarrow \frac{BE}{EC}*1*\frac{DP}{PB}=1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{BE}{EC}=\frac{PB}{DP}$ **(1)**

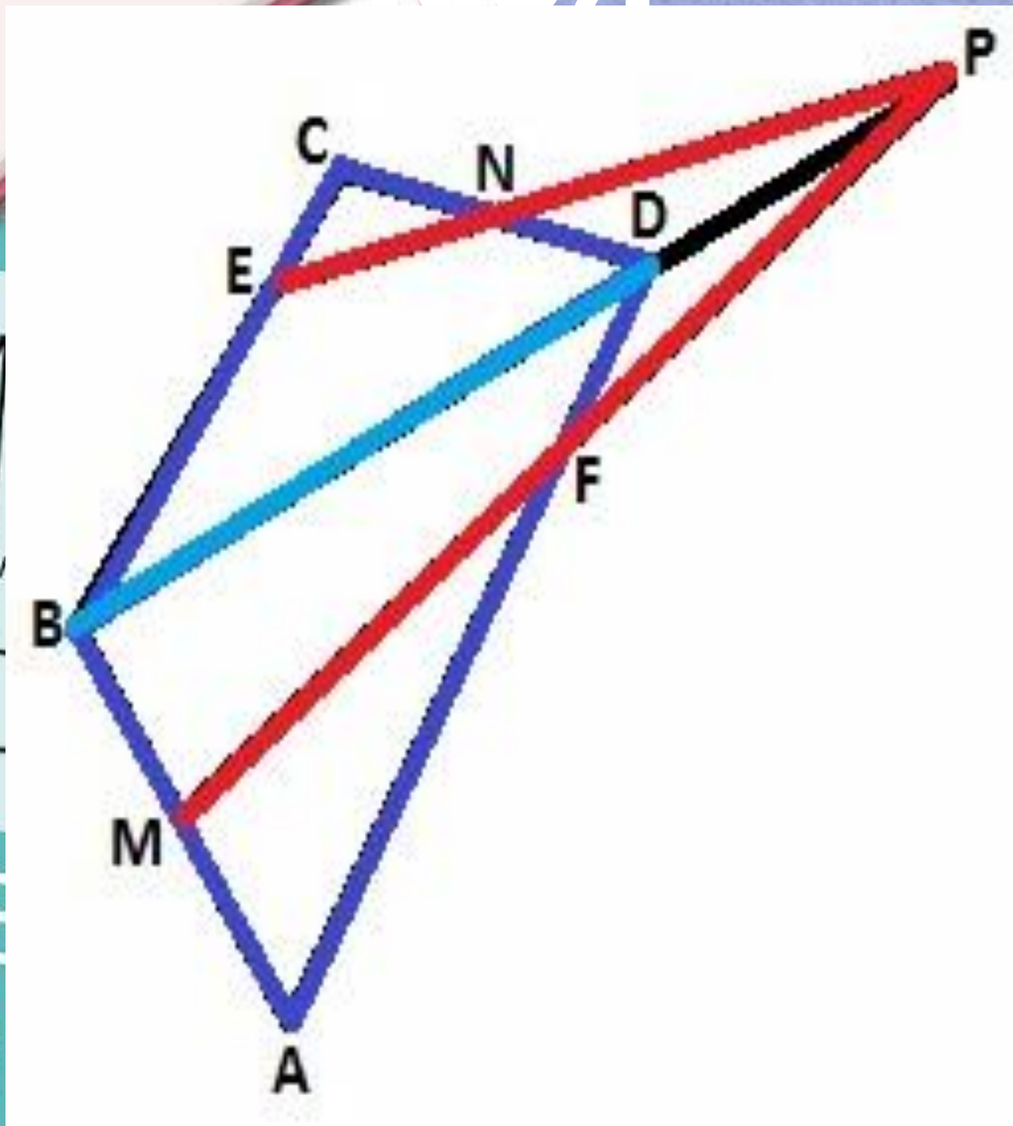
2) ΔABD, секущая MP. По Теореме Менелая, $\frac{BM}{MA}*\frac{AF}{FD}*\frac{DP}{PB}=1$

BM=MA →

$\rightarrow \frac{BM}{MA}=1 \rightarrow 1*\frac{AF}{FD}*\frac{DP}{PB}=1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{AF}{FD}=\frac{PB}{DP}$ **(2)**

Задача №4



<u>Дано:</u> $4^{\text{уг.}}$ ABCD; P∈BD; N-середина CD; M-середина AB; PN∩BC=E; PM∩AD=F

<u>Доказать:</u> $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$

<u>Доказательство:</u>

3) Из равенств **(1)** $\frac{BE}{EC} = \frac{PB}{DP}$

и **(2)** $\frac{AF}{FD} = \frac{PB}{DP}$ следует,

что $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD}$.

Что и требовалось доказать

ЗА СПАСИБ
ВНИМАН

Презентацию подготовил Пейсахов Кирилл, 9-А