

# Теорема Менелая

Выполнили:  
Кустова Юлия  
Корнева Дарья

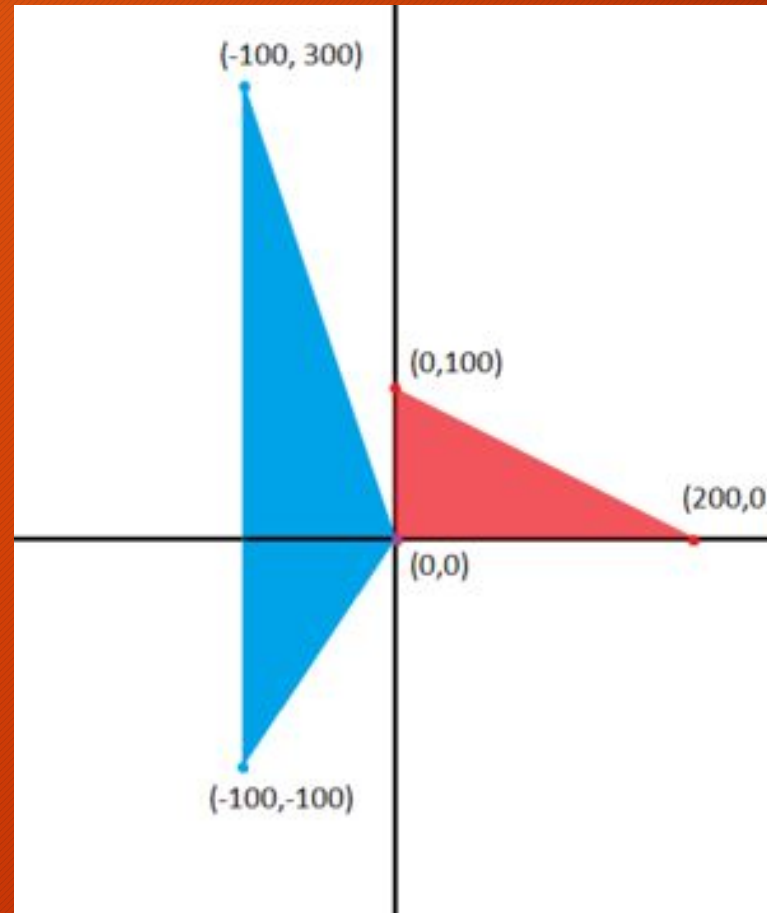
# Теорема Менелая или теорема о полном четырёхстороннике — это классическая теорема аффинной геометрии.

Эта теорема доказывается в третьей книге «Сферики» Менелая Александрийского (ок. 100 н. э.). Менелай сначала доказывает теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием переносит её на сферу. Возможно, что плоский случай теоремы рассматривался ранее в не сохранившихся «Элементарных» Евклида.

Аффинная геометрия (лат. *affinis* — родственный) — раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур, инвариантные относительно аффинных преобразований. Например, отношение направленных отрезков, параллельность прямых и т. п.

Сферическая теорема Менелая была основным средством, с помощью которого решались разнообразные прикладные задачи позднеантичной и средневековой астрономии и геодезии.

Аффинное преобразование (от ла т. *affinis* — соприкасающийся, близкий, смежный) — отображение плоскости или пространства в себя, при котором прямые переходят в прямые.



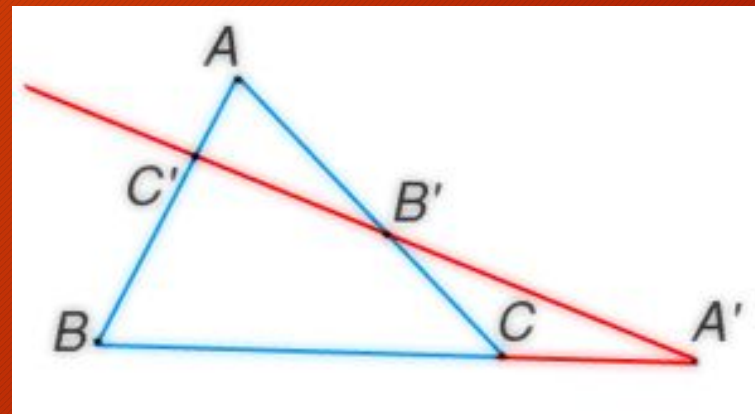
Красный треугольник переходит в синий при аффинном преобразовании  $(x,y) \rightarrow (y-100; 2 \cdot x + y-100)$ , если новые координаты отобразить в прежнем базисе

# Формулировка

Если точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  лежат соответственно на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $\triangle ABC$  или на их продолжениях<sup>[1]</sup>, то они коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1.$$

где  $\frac{AB'}{B'C}$ ,  $\frac{CA'}{A'B}$  и  $\frac{BC'}{C'A}$  обозначают отношения направленных отрезков.



В частности, из теоремы следует соотношение для длин:

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|CA'}{|A'B|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} = 1.$$

**Коллинеарные точки.** Набор точек, находящихся на одной прямой.

# Доказательство

Треугольники  $AC_1B_1$  и  $CKB_1$  подобны ( $\angle C_1AB_1 = \angle KCB_1$ ,  $\angle AC_1B_1 = \angle CKB_1$ ). Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}.$$

Треугольники  $BC_1A_1$  и  $CKA_1$  также подобны ( $\angle BA_1C_1 = \angle KA_1C$ ,  $\angle BC_1A_1 = \angle CKA_1$ ). Значит,

$$\frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

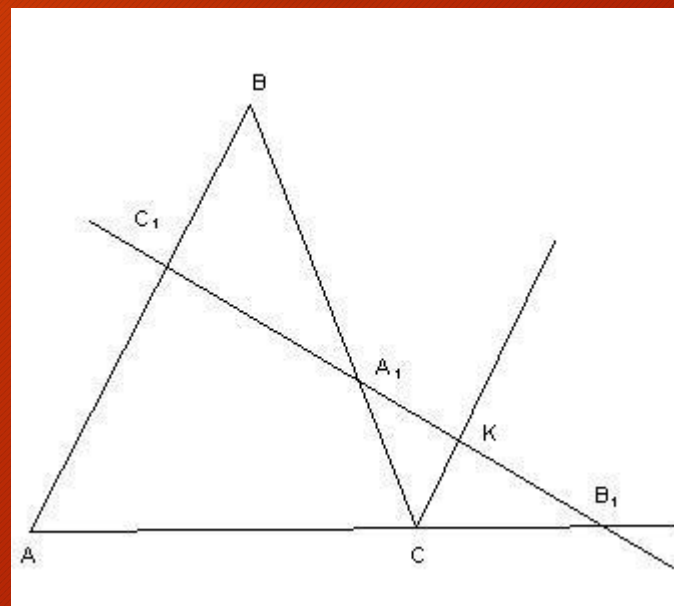
Из каждого равенства выразим  $CK$ :

$$CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1},$$

откуда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

что и требовалось доказать.



**Теорема (обратная теорема Менелая).** Пусть дан треугольник  $ABC$ . Пусть точка  $C_1$  лежит на стороне  $AB$ , точка  $A_1$  – на стороне  $BC$ , а точка  $B_1$  – на продолжении стороны  $AC$ , причем выполняется соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Тогда точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Заметим для начала, что  $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \neq 1$ , поскольку, по условию, это выражение равно  $\frac{B_1A}{CB_1} \neq 1$ .

Следовательно, прямые  $A_1C_1$  и  $AC$  не параллельны.

Проведем прямую через точки  $C_1$  и  $A_1$ . Она пересечет прямую  $AC$  в некоторой точке  $B_2$ . Для точек  $A_1, C_1$  и  $B_2$  справедлива теорема Менелая, так что

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Из этого равенства следует, что обе точки  $B_1$  и  $B_2$  лежат на продолжении отрезка  $AC$  за одну и ту же точку, ибо правее  $C$  данное отношение меньше 1, а левее  $A$  оно строго больше 1. Пусть  $CB_1 = x, CB_2 = y, AC = b$ . Тогда, учитывая, что  $B_1A = x + b$  и  $B_2A = y + b$ , перепишем полученное равенство в виде

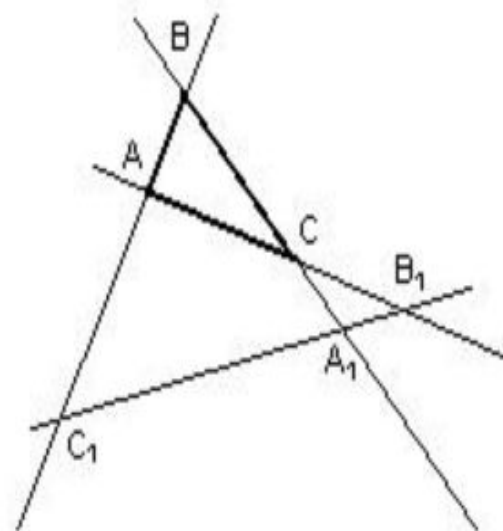
$$\frac{x}{x+b} = \frac{y}{y+b} \Leftrightarrow xy + xb = xy + yb \Leftrightarrow x = y.$$

Из равенства  $CB_1 = CB_2$  следует, что  $B_1 = B_2$ , и доказано, что точка  $B_1$ , совпадающая с  $B_2$ , лежит на прямой  $A_1C_1$ .

**Замечание.** Теоремы Менелая (прямая и обратная) верны также и в том случае, когда все три точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на продолжениях сторон треугольника  $ABC$ . То есть справедлива следующая

**Теорема.** Пусть дан треугольник  $ABC$ . Точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на продолжениях сторон  $BC, AC$  и  $AB$  соответственно. Три точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



**Доказательство** этой теоремы точно такое же, как и доказательство, приведенное выше.