Теорема Менелая

Выполнили:
Кустова Юлия
Корнева Дарья

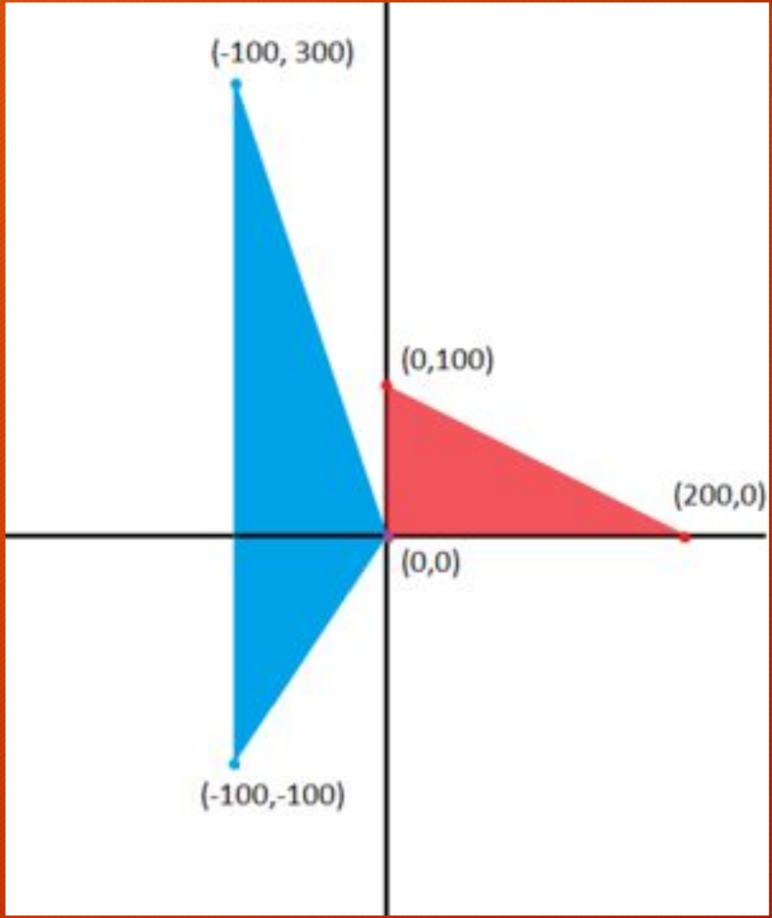
Теорема Менелая или теорема о полном четырёхстороннике — это классическая теорема аффинной геометрии.

Аффинная геометрия (лат. affinis — родственный) — раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур, инвариантные относительно аффинных преобразований. Например, отношение направленных отрезков, параллельность прямых и т. п.

Эта теорема доказывается в третьей книге «Сферики» Менелая Александрийского (ок. 100 г. н. э.). Менелай сначала доказывает теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием переносит её на сферу. Возможно, что плоский случай теоремы рассматривался ранее в несохранившихся «Поризмах» Евклида.

Сферическая теорема Менелая была основным средством, с помощью которого решались разнообразные прикладные задачи позднеантичной и средневековой астрономии и геодезии.

Аффинное преобразование (от лат. *affinis* — соприкасающийся, близкий, смежный) — отображение плоскости или пространства в себя, при котором прямые переходят в прямые.



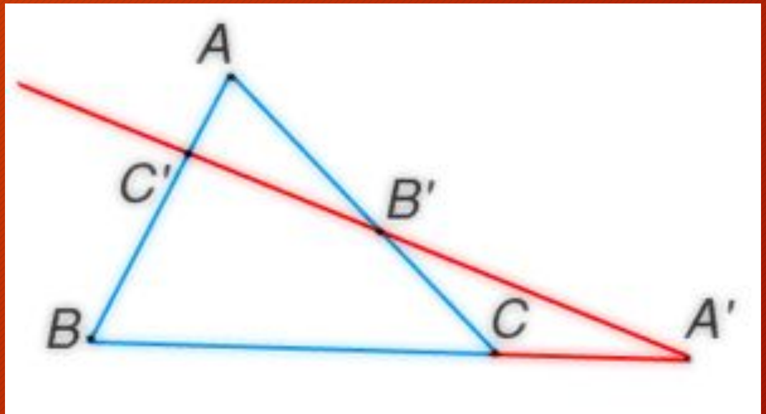
Красный треугольник переходит в синий при аффинном преобразовании (x,y)→(y-100; 2·x + y-100), если новые координаты отобразить в прежнем базисе

Формулировка

Если точки A', B' и C' лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника $\triangle ABC$ или на их продолжениях[1], то они коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=-1.$$

где $\frac{AB'}{B'C}$, $\frac{CA'}{A'B}$ и $\frac{BC'}{C'A}$ обозначают отношения направленных отрезков.



В частности, из теоремы следует соотношение для длин:

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|}=1.$$

Коллинеарные точки. Набор точек, находящихся на одной прямой.

Доказательство

Треугольники AC_1B_1 и CKB_1 подобны ($\angle C_1AB_1 = \angle KCB_1$, $\angle AC_1B_1 = \angle CKB_1$). Следовательно,

$$\frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}.$$

Треугольники BC_1A_1 и CKA_1 также подобны ($\angle BA_1C_1 = \angle KA_1C$, $\angle BC_1A_1 = \angle CKA_1$). Значит,

$$\frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

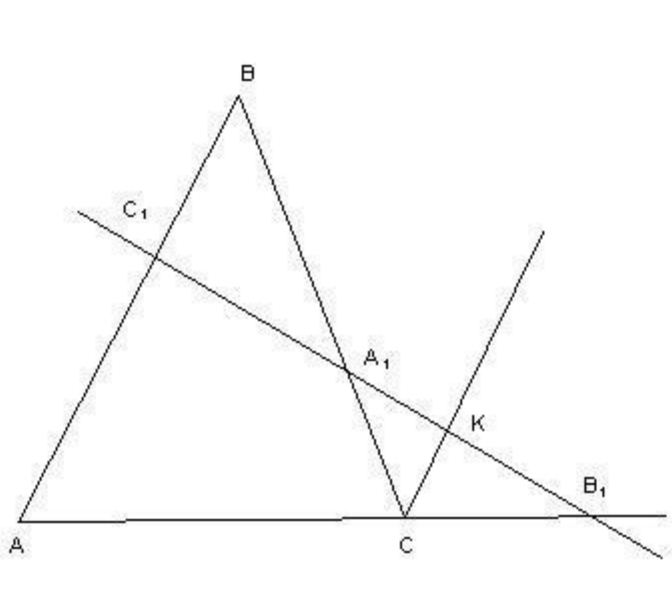
Из каждого равенства выразим CK:

$$CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1},$$

откуда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

что и требовалось доказать.



Теорема (обратная теорема Менелая). Пусть дан треугольник ABC. Пусть точка C_1 лежит на стороне AB, точка A_1 – на стороне BC, а точка B_1 – на продолжении стороны AC, причем выполняется соотношение

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Доказательство. Заметим для начала, что $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\neq 1$, поскольку, по условию, это выражение равно $\frac{B_1A}{CB_1}\neq 1$. Следовательно, прямые A_1C_1 и AC не параллельны.

Проведем прямую через точки C_1 и A_1. Она пересечет прямую AC в некоторой точке B_2. Для точек A_1, C_1 и B_2 справедлива теорема Менелая, так что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CB_1}{B_1A}.$$

Из этого равенства следует, что обе точки B_1 и B_2 лежат на продолжении отрезка AC за одну и ту же точку, ибо правее C данное отношение меньше 1, а левее A оно строго больше 1. Пусть $CB_1=x, CB_2=y, AC=b$. Тогда, учитывая, что $B_1A=x+b$ и $B_2A=y+b$, перепишем полученное равенство в виде

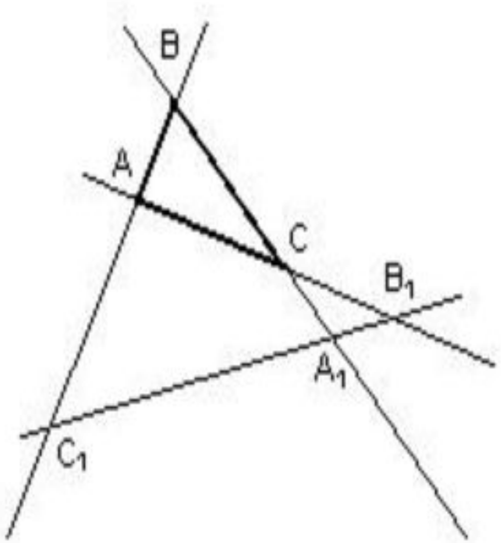
$$\frac{x}{x+b}=\frac{y}{y+b}\Leftrightarrow xy+xb=xy+yb\Leftrightarrow x=y.$$

Из равенства $CB_1=CB_2$ следует, что $B_1=B_2$, и доказано, что точка B_1, совпадающая с B_2, лежит на прямой A_1C_1.

Замечание. Теоремы Менелая (прямая и обратная) верны также и в том случае, когда все три точки A_1, B_1, C_1 лежат на продолжениях сторон треугольника ABC. То есть справедлива следующая

Теорема. Пусть дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на продолжениях сторон BC, AC и AB соответственно. Три точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



Доказательство этой теоремы точно такое же, как и доказательство, приведенное выше.