ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Локальная и интегральная

Пьер-Симо́н Лаплас (1749- 1827) - выдающийся французский математик, физик и астроном; один из создателей теории вероятностей. Был членом Французского Географического общества.

Абрахам де Муавр (1667- 1754) — английский математик французского происхождения. Член Лондонского королевского общества (1697), Парижской (1754) и Берлинской (1735) академий наук.

Теорема Муавра - Лапласа - простейшая из предельных теорем теории вероятностей.
В общем виде теорема доказана Лапласом в книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812).
Один частный случай теоремы был известен Муавру (1730), в связи с чем она и называется теоремой Муавра-Лапласа.
Утверждает, что число успехов при многократном повторении одного и того же случайного эксперимента с двумя возможными исходами приблизительно имеет нормальное распределение.

Рассмотрим последовательность из n независимых опытов, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p, либо не произойти - с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим через $P_n(m)$ вероятность того, что событие A произойдет ровно m раз из n возможных. Если n будет достаточно большим, то найти значение $P_n(m)$ по теореме Бернулли становится нереально из-за огромного объема вычислений. Локальная теорема Муавра - Лапласа позволяет найти приближенное значение

Локальная теорема Муавра - Лапласа. Если в схеме Бернулли число n велико, а число p отлично от 0 и 1, тогда:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция φ(x) называется **функцией Гаусса**.

Теорема Муавра-Лапласа утверждает, что асимптотическим выражением для биномиального распределения является нормальная функция.

Для расчетов составлена таблица значений функции φ (x), необходимо учитывать свойства:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$ - четная, в таблице приведены значения функции лишь для положительных аргументов;

2. Функция φ(x) - монотонно убывающая. Предел φ(x) при $x \to \infty$ равен нулю.

3. Если $x > 5$, то можно считать, что $\varphi(x) \approx 0$. Функция φ(x) уже при $x = 5$ очень мала: $\varphi(5)=0{,}0000015$.

Поэтому таблица значений не продолжена для $x > 5$.

Пример. Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p = 0,75. Найти вероятность, что при 100 посещениях клиент совершит покупку ровно 80 раз.

Решение. n = 100, m = 80, p = 0,75, q = 0,25.

$$x = \frac{80 - 100 \times 0,75}{\sqrt{100 \times 0,75 \times 0,25}} = 1,16$$

Находим ,

определяем $\phi(1,16) = 0,2036$, тогда:

$$P_{100}(80) = \frac{0,2036}{\sqrt{100 \times 0,75 \times 0,25}} = 0,047$$

Задание. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,02. Какова вероятность того, что среди 2500 выпущенных изделий окажется 50 бракованных

Варианты ответов:

1) 0,1045; 2) 0,86; 3) 0,0570;

4) 0,0172; 5) 0,3989.

Ответ: пункт 5

Фрагмент таблицы функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,242	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	**2036**	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность, что в n независимых испытаниях (n>>1) событие A состоится число раз, заключенное в границах от a до b включительно:

$$P_n(a \le m \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}.$$

где функция *Ф (x)* определяется равенством

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Формула называется интегральной формулой Муавра— Лапласа.

Получаемые по интегральной и локальной формулам Муавра — Лапласа вероятности достаточно точны, если произведение ***np*** составляет **несколько сотен**!!!

Свойства функции Ф(х)

- Функция Ф(х) нечетная, Ф (- х) = - Ф(х).
- Функция Ф(х) монотонно возрастающая.
- Предел функции Ф(х) при х→∞ равен 0,5.
- Для всех значений х > 5 считают, что Ф (х) ≈ 0,5. Уже Ф (5) = 0,4999992, при увеличении х функция Ф (х) возрастает, но не может пре восходить 0,5. Поэтому в таблицах функция дана для значений х < 5.

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

Вероятность, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна p, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события А от его постоянной вероятности не превысит положительного числа ε, приближенно равна:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,04.

Решение. По условию задачи: n = 625; p = 0,8; ε=0,04. Отсюда q =1– p = 0,2. Требуется найти вероятность:

$$P\left(\left|\frac{m}{625}-0,8\right|\leq 0,04\right)=?$$

Для решения задачи воспользуемся формулой, определяющей оценку отклонения относительной частоты от постоянной вероятности:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Φ(x) – интегральная функция Лапласа. Найдем аргумент функции Лапласа:

$$x=\varepsilon\sqrt{\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{pq}}}=0,04\sqrt{\frac{625}{0,8\cdot 0,2}}=2,5$$

По табл. функции Лапласа: Φ(2,5) = 0,4938, т.е. 2Φ (x) = 0,9876.

Итак, искомая вероятность:

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right) \approx 0,9876.$$

Пример. При установившемся технологическом режиме завод выпускает в среднем 70% продукции 1-го сорта. Определить вероятность, что из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760.

Решение. p = 0,7; q = 1 – p = 0,3; n = 1000;

np = 0,7 × 1000 = 700; npq = 700 × 0,3 = 210

$\sqrt{npq} = \sqrt{210} \approx 14{,}49.$

$$P(652 < m < 760) =$$

$$= \Phi\left(\frac{760-700}{14{,}49}\right) - \Phi\left(\frac{652-700}{14{,}49}\right) =$$

$$= \Phi(4{,}14) - \Phi(-3{,}31) =$$

$$= \Phi(4{,}14) + \Phi(3{,}31) \approx$$

$$\approx 0{,}49998 + 0{,}49903 = 0{,}99901$$

Ответ: искомая вероятность равна 0,99901.

Пример. Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.

Решение. По условию задачи n = 40000, p = 0,02. Находим np = 800, $\sqrt{npq} = 28$. Для вычисления P (m ≤ 870) воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$P(0 < m \le 870) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$, где

$$x_1 = \frac{0 - 800}{28} = -28,57 \qquad x_2 = \frac{870 - 800}{28} = 2,5$$

Находим по таблице значений функции Лапласа:

$P(0 < m \leq 870) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) = \Phi_0(2{,}5) -$

$- \Phi_0(-28{,}57) = 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938.$

Ответ: $P = 0{,}9938$

Пример. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превышала ε.

Решение. По условию p = 0,8, n = 400. Используем следствие из интегральной т. Муавра-Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=0,99=2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Следовательно, $\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0,495$. По таблице для функции Лапласа определяем $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=2,58$

Отсюда, $\varepsilon = 0,0516$.

Фрагмент таблицы значений функции Лапласа.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,76	0,4608	2,13	0,4834	2,50	**0,4938**	2,87	0,4979
1,77	0,4616	2,14	0,4838	2,51	0,4940	2,88	0,4980
1,78	0,4625	2,15	0,4842	2,52	0,4941	2,89	0,4981
1,79	0,4633	2,16	0,4846	2,53	0,4943	2,90	0,4981
1,80	0,4641	2,17	0,4850	2,54	0,4945	2,91	0,4982
1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,55	0,4946	2,92	0,4982
1,82	0,4656	2,19	0,4857	2,56	0,4948	2,93	0,4983
1,83	0,4664	2,20	0,4861	2,57	0,4949	2,94	0,4984
1,84	0,4671	2,21	0,4864	**2,58**	**0,4951**	2,95	0,4984
1,85	0,4678	2,22	0,4868	2,59	0,4951	2,96	0,4985
1,86	0,4686	2,23	0,4871	2,60	0,4953	2,97	0,4985
1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,61	0,4955	2,98	0,4986

1,89	0,4706	2,26	0,4881	2,63	0,4967	3,00	0,49865
1,90	0,4713	2,27	04884	2,64	0,4959	3,10	**0,49903**
1,91	0,4719	2,28	0,4887	2,65	0,4960	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,29	0,4890	2,66	0,4961	3,30	0,49952
1,93	0,4732	2,30	0,4893	2,67	0,4962	3,40	0,49966
1,94	0,4738	2,31	0,4896	2,68	0,4963	3,50	0,49977
1,95	0,4744	2,32	0,4898	2,69	0,4964	3,60	0,49984
1,96	0,4750	2,33	0,4901	2,70	0,4965	3,70	0,49989
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,71	0,4966	3,80	0,49993
1,98	0,4761	2,35	0,4906	2,72	0,4967	3,90	0,49995
1,99	0,4767	2,36	0,4909	2,73	0,4968	4,00	0,499968
2,00	0,4772	2,37	0,4911	2,74	0,4969	4,10	**0,499979**
2,01	0,4778	2,38	0,4913	2,75	0,4970	4,20	0,499987