

Теоремы и доказательства

Юровских Е.
гр. ПИ-11-1-

Первый замечательный предел

Предел функции $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ в точке $\alpha=0$ существует и равен единице

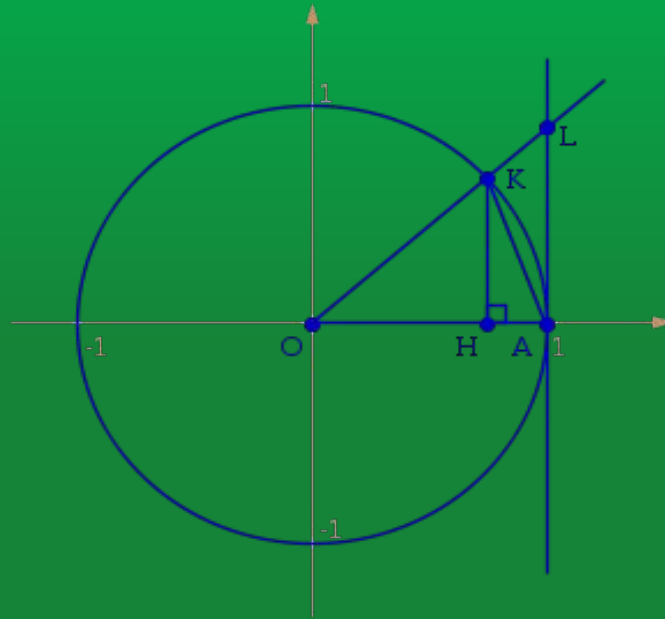
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем исходить из геометрического определения синуса. Возьмем окружность радиуса 1 и предположим, что угол α , выраженный в радианах, заключен в границах $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из рисунка видно, что



$$S \triangle OKH < S \triangle OKA < S \triangle OLA$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как указанные площади
соответственно равны

$$\frac{1}{2} \sin \alpha, \frac{1}{2} \alpha \text{ и } \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

то , следовательно

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Разделив неравенство на $\sin \alpha$,
ПОЛУЧИМ

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

ИЛИ

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из геометрического определения косинуса ясно, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha = 1$$

Отсюда на основании признака существования предела заключаем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

ОДИНОЧНЫЙ ПРИЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА

Если существует

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

В некоторой выколоте
окрестности точки A

выполняется $f(x) \leq p(x) \leq g(x)$ при

всех x , то

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = B$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $f(x) \leq p(x) \leq g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$$

Докажем, что $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = B$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмем произвольную ε -окрестность числа B .

По условию существует такая δ -окрестность точки a , что соответствующие значения $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат ε -окрестности числа B

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Но тогда в силу заданных неравенств значения $p(x)$, соответствующие точкам указанной δ -окрестности точки a , также будут находиться в ε -окрестности числа B .

Так как ε – произвольна, то это и означает, что $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = B$

ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ В НЕРАВЕНСТВЕ

Если существует

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

В некоторой выколотой
окрестности точки A

выполняется $f \geq g$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Идем методом от противного

Допустим что $f \leq g$

следовательно

$$0 \leq g - f$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!