Теоремы и доказательства

Юровских Е.
гр. ПИ-11-1-
С

Первый замечательный предел

Предел функции $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ в точке $\alpha=0$ существует и равен единице

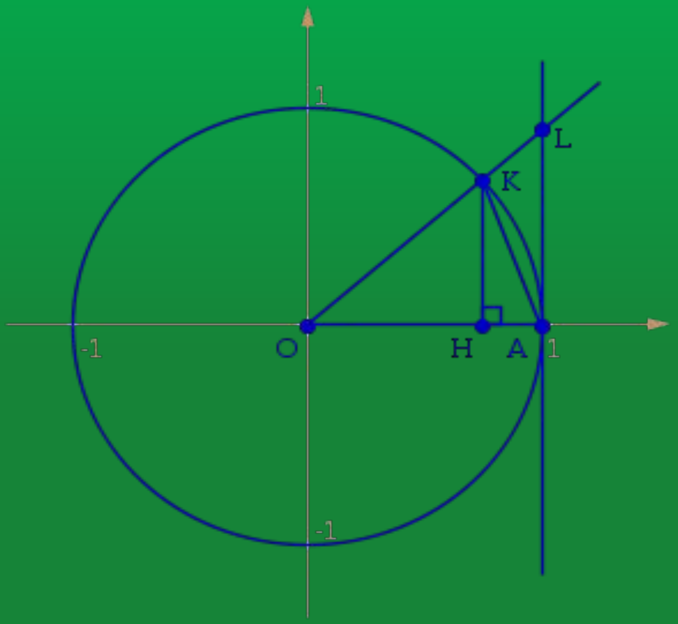
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Будем исходить из геометрического определения синуса. Возьмем окружность радиуса 1 и предположим, что угол α, выраженный в радианах, заключен в границах $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из рисунка видно, что



S ΔOKH < S ΔOKA< S ΔOLA

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Так как указанные площади соответственно равны

$\frac{1}{2}\sin\alpha$, $\frac{1}{2}\alpha$ и $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$,

то , следовательно

$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Разделив неравенство на $\sin\alpha$, получим

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$$

или

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Из геометрического определения косинуса ясно, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 1$$

Отсюда на основании признака существования предела заключаем, что

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

ОДИНОЧНЫЙ ПРИЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА

Если существует

$$\lim_{x\to a} f(x) = B \quad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

В некоторой выколотой окрестности точки А выполняется f(x) ≤p(x)≤ g(x)при всех x , то

$$\lim_{x\to a} p(x) = B$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть f(x) ≤p(x)≤ g(x)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = B$$

Докажем, что $\lim_{x \to a} p(x) = B$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Возьмем произвольную ε-окрестность числа B.

По условию существует такая δ-окрестность точки a, что соответствующие значения f(x)и g(x) принадлежат ε-окрестности числа B

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Но тогда в силу заданных неравенств значения p(x), соответствующие точкам указанной δ-окрестность точки a, также будут находиться в

ε-окрестности числа B.

Так как ε –произвольна, то это и означает, что $\lim_{x \to a} p(x) = B$

ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ В НЕРАВЕНСТВЕ

Если существует

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$

В некоторой выколотой окрестности точки А выполняется f ≥ g, то

$$\lim_{x \to a} f(x) \geq \lim_{x \to a} g(x)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Идем методом от противного

Допустим что $f \le g$

следовательно

$$0 \le g - f$$

$$0 \le \lim_{x \to a} g(x) - \lim_{x \to a} f(x)$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!