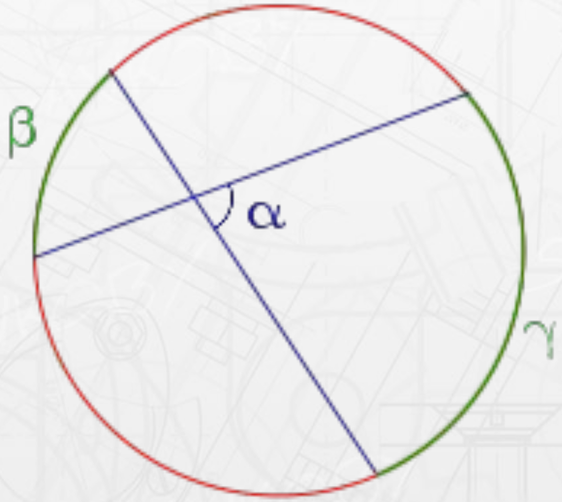
Теоремы об углах, образованных хордами, касательными и секущими

Презентацию выполнила
ученица
ГБОУ гимназии №1517
9 класса Г
Соловьева Александра

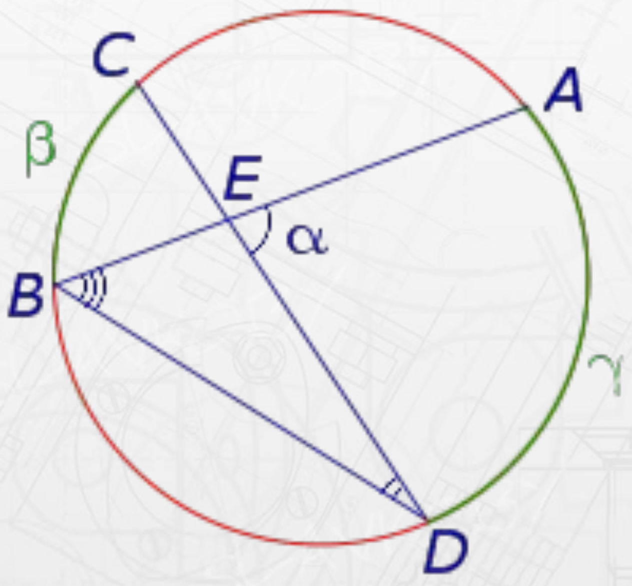
Угол между пересекающимися хордами

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$



Величина угла, образованного пересекающимися хордами, равна половине суммы величин дуг, заключённых между его сторонами

Доказательство



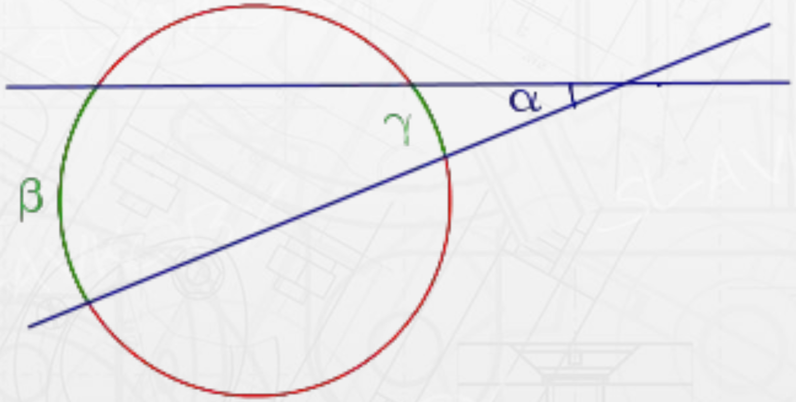
Дано:
(O;R)
AB и CD-хорды
AB∩CD=E
Д-ть: $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$

Поскольку угол AED – внешний угол треугольника BED, а углы CDB и ABD являются вписанными углами, то справедливы равенства

$$\alpha = \angle AED = \angle CDB + \angle ABD = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta + \gamma}{2},$$

Что и требовалось доказать

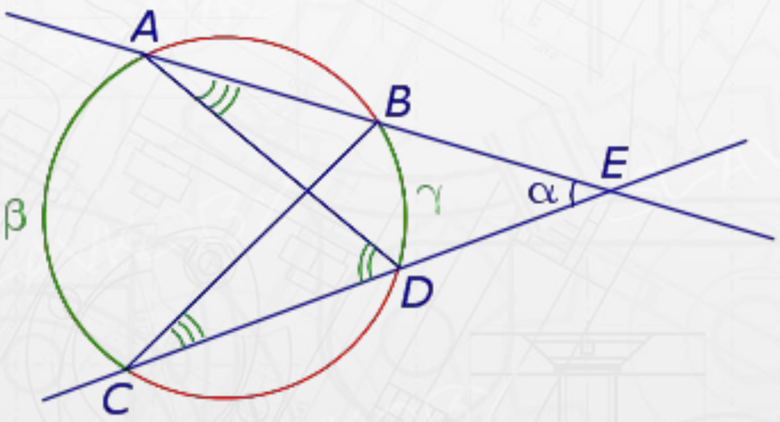
Угол, образованный секущими, которые пересекаются вне круга



$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Величина угла, образованного секущими, пересекающимися вне круга, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами

Доказательство



Дано:
(O;R)
AB и CD секущие
AB∩CD=E
Д-ть: $\alpha = \dfrac{\beta - \gamma}{2}$

Поскольку угол ADC – внешний угол треугольника ADE, а углы ADC , DCB и DAB являются вписанными углами, то справедливы равенства

$$\alpha = \angle BED = \angle ADC - \angle DAB = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta - \gamma}{2},$$

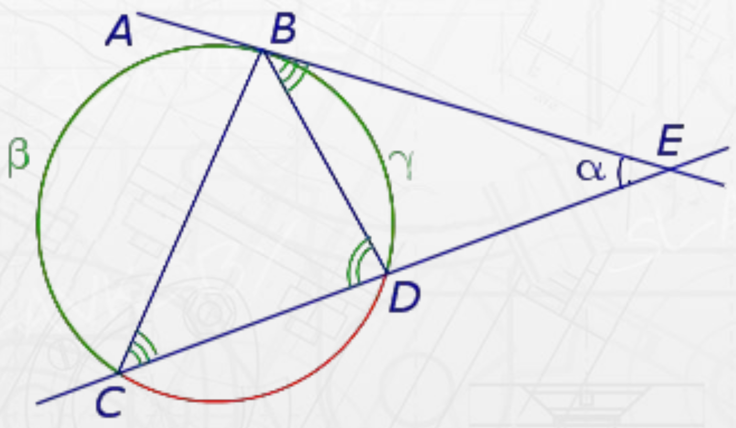
что и требовалось доказать.

Угол, образованный касательной и секущей

$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Величина угла, образованного касательной и секущей, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами

Доказательство



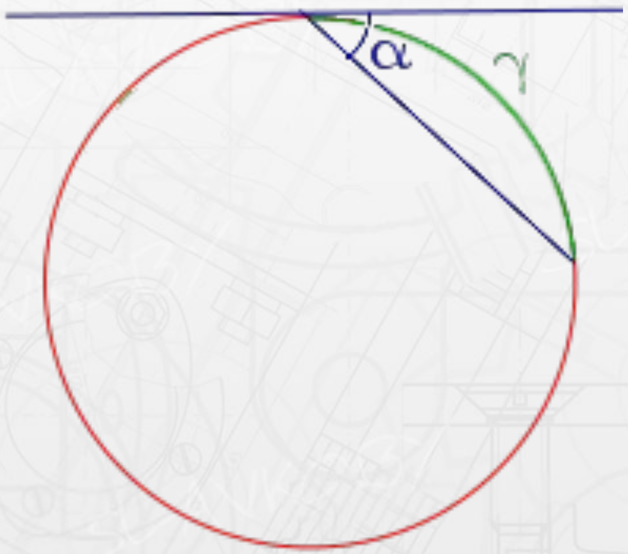
Дано:
(O;R)
<BDC, <BCD-
впис.
AB-кас
CD-сек
AB∩CD=E $= \frac{\beta - \gamma}{2}$
Д-ть:

<BDC – внешний угол треугольника DBE =>
<CDB=<DBE+<BED => <BED=<CDB-<DBE
<DBE =<DCB (доказано в предыдущей теореме)
Поэтому справедливы равенства

$$\alpha = \angle CDB - \angle DBE = \angle CDB - \angle DCB = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta - \gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

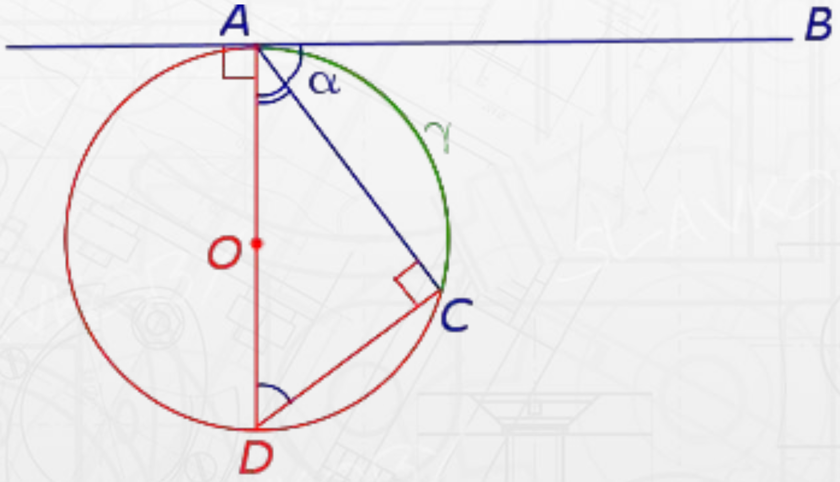
Угол, образованный касательной и хордой, проходящей через точку касания



$$\alpha = \frac{\gamma}{2}$$

Величина угла, образованного касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине величины дуги, заключённой между его сторонами

Доказательство



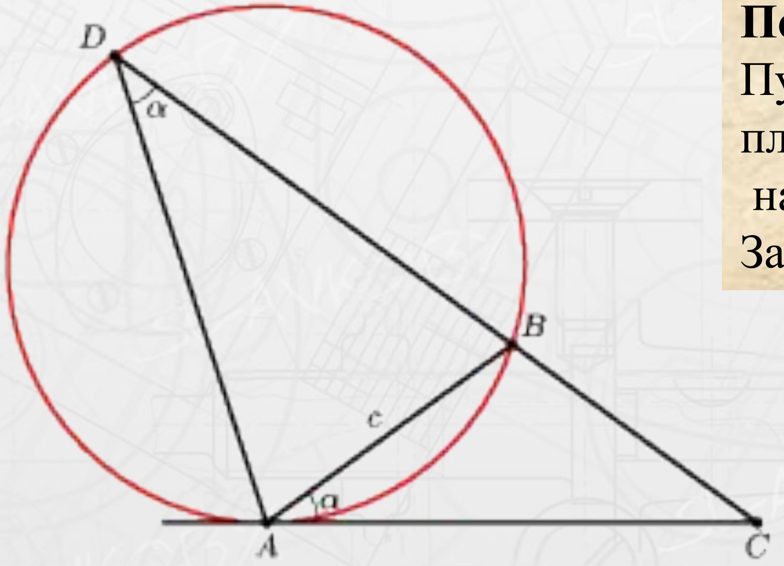
Дано:
AB-кас.
AC-хорда
AD-диаметр
Д-ть: $\alpha = \frac{\gamma}{2}$

1) Поскольку AD – диаметр, проходящий через точку касания, а угол ACD – вписанный угол, опирающийся на диаметр, то углы DAB и DCA – прямые
2)α=<DAB-<DAC=90°-<DAC
треугольник DAC-п/у, <ACD=90° => <ADC=90 °-<CAD
Следовательно, α=<ADC
<ADC- впис. => <ADC равен половине дуги γ
Следовательно, α равен половине дуги γ
что и требовалось доказать

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача

Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите радиус окружности, если угол BAC = α, угол ABC = β и площадь треугольника ABC равна S.



Подсказка
Пусть D — точка пересечения данной окружности со стороной BC. Зная площадь треугольника ABC,
найдите AB с помощью теоремы синусов.
Затем докажите, что $ADB = 180^\circ - \angle\alpha$

Решение

1)Пусть D — точка пересечения данной окружности с прямой BC. Обозначим $AB = c$, $BC = a$.
Применяя теорему синусов к треугольнику ABC, получим пропорцию

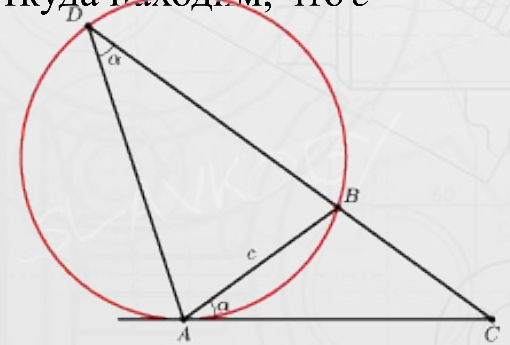
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)},$$

откуда $a = \dfrac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Тогда

$$S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\, ac\sin\beta = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)},$$

откуда находим, что $c = \sqrt{\dfrac{2S\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$



2) По теореме об угле между касательной и хордой находим,

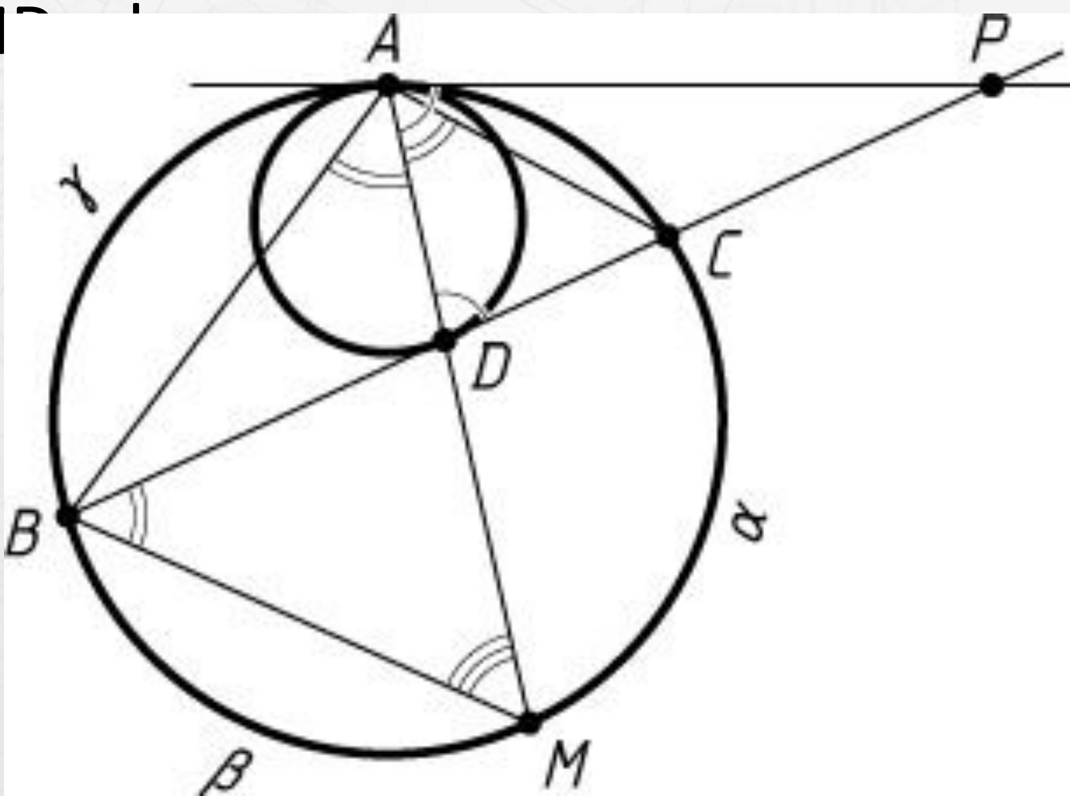
что либо $\angle ADB = \angle BAC = \alpha$, либо $\angle ADB = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$

В обоих случаях $\sin\angle ADB = \sin\alpha$. Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABD.
Тогда

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle ADB} = \frac{c}{2\sin\alpha} = \sqrt{\frac{S\sin(\alpha+\beta)}{2\sin^3\alpha\sin\beta}}.$$

Задача

Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC в большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M. Найдите MB, если MA = a, M



Решение

Докажем сначала, что точка M — середина дуги BC, не содержащей точки A. Пусть общая касательная к данным окружностям, проведённая через точку A, пересекает прямую BC в точке P (C между B и P). Тогда $\angle MAP = \angle ADP$ как углы при основании равнобедренного треугольника APD.

Пусть α, β и γ — угловые величины дуг CM (не содержащей точки A), BM (не содержащей точки A) и AB (не содержащей точки C) соответственно. Тогда из равенства углов MAP и ADP следует равенство смежных им углов, поэтому

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\gamma+\beta}{2},$$

откуда получаем, что $\alpha = \beta$. Значит,

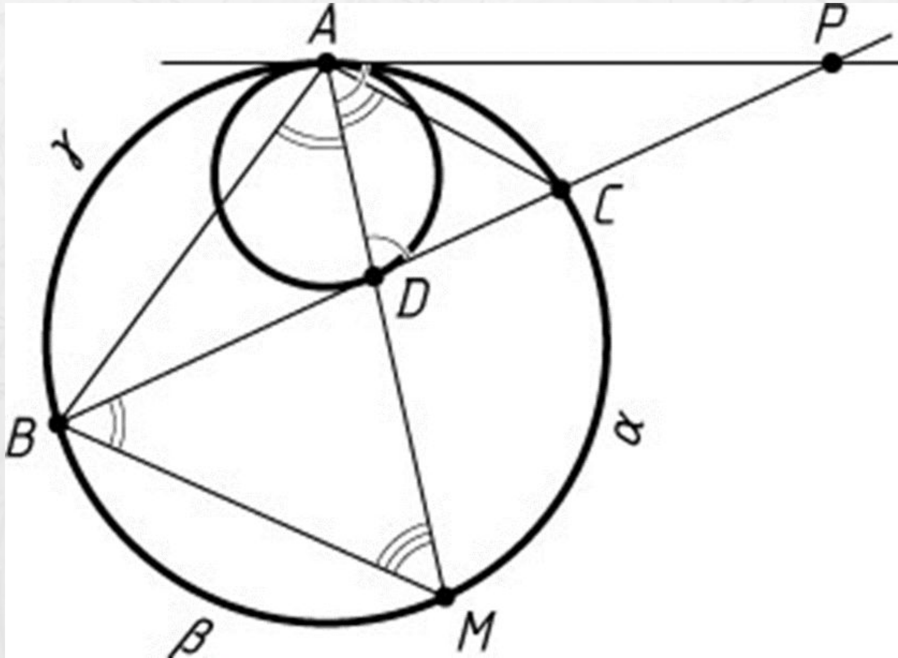
$\angle DBM = \angle CBM = \angle CAM = \angle BAM$

и треугольники BDM и ABM подобны по двум углам.

Следовательно,

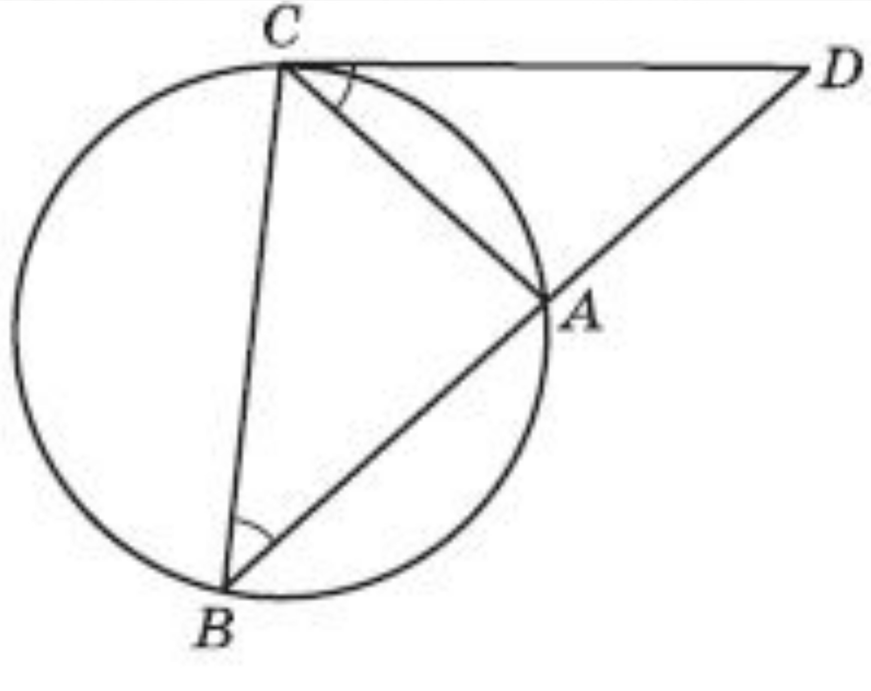
$$\frac{BM}{DM} = \frac{AM}{BM},$$

откуда находим, что $BM^2 = AM \cdot DM = ab$.



Задача

Вокруг треугольника ABC со сторонами   AC = 20 и углом B, равным 45°, описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение стороны AB за точку A в точке D Найти площадь треугольника BCD.



Решение

Угол ABC равен половине угловой величины дуги AC, как вписанный угол, опирающийся на эту дугу. Угол ACD также равен половине угловой величины дуги AC, как угол между касательной и хордой. Следовательно, эти углы равны, и треугольники DBC и DCA подобны по двум углам. Площади этих треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия. Найдем этот коэффициент, он равен BC : AC. Пусть BC = 10x, тогда, применив к треугольнику ABC теорему косинусов, получим:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 400 = 200 + 100x^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}.$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 400 = 200 + 100x^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}.$$

Значит, $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{10\left(1+\sqrt{3}\right)}{20} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}.$

Поэтому,

$$\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta CAD}} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta BCD} = S_{\Delta CAD} + \frac{\sqrt{3}}{2} S_{\Delta CAD} = S_{\Delta CAD} + S_{\Delta ABC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{\Delta CAD} \Leftrightarrow S_{\Delta CAD} = \frac{2}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) S_{\Delta ABC} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) S_{\Delta ABC}.$$

$$S_{\Delta\,ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}S_{\Delta\,CAD}\Leftrightarrow S_{\Delta\,CAD}=\frac{2}{\sqrt{3}}S_{\Delta\,ABC}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta\,BCD}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)S_{\Delta\,ABC}=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)S_{\Delta\,ABC}.$$

С другой стороны

$$S_{\Delta\,ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot10\sqrt{2}\cdot10\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=50\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Значит

$$S_{\Delta\,BCD}=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot50\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{50\left(9+5\sqrt{3}\right)}{3}.$$

Спасибо за внимани