

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

2013-14 уч. г.

Соклакова Марина Вячеславовна

Каф. ТОЭ 1 к., ауд.1102-1111

# Содержание курса ТОЭ ФИБС весенний семестр 2013-14

## 7. Передаточная функция цепи и основные характеристики цепи

7.1. Нормирование параметров цепи

7.2. ПФ цепи и ее свойства

7.3. Виды частотных характеристик

7.4. Связь полосы пропускания  $RLC$ -контура с его добротностью

7.5. Понятие о фильтрах

## 8. Анализ УПР в цепи

8.1. Периодические сигналы и их спектры

# Содержание курса ТОЭ ФИБС весенний семестр 2013-14

8.1.1. Формы записи РФ

8.1.2. Дискретные спектры периодических сигналов

8.1.3. Использование преобразования Лапласа для анализа УПР в цепи

8.2. Мощность и действующее значение РФ

8.2.1. Мощность

8.2.2. Действующее значение

8.3. Методы анализа УПР

8.3.1. Анализ УПР в цепи с использованием РФ

8.3.2. РФ в замкнутой форме

9. Анализ цепей спектральным методом

# Содержание курса ТОЭ ФИБС весенний семестр 2013-14

## 9.1. Аperiodические сигналы и их спектры

9.1.1. Переход от периодического сигнала к аperiodическому

9.1.2. Спектральные характеристики аperiodических сигналов

9.1.3. Примеры спектров основных сигналов

## 9.2. Критерии ширины спектра сигнала

9.2.1. Энергия сигнала и критерии ширины спектра сигнала

9.2.2. Связь ширины спектра с длительностью сигнала

9.2.3. Связь ширины спектра с крутизной сигнала

## 9.3. Приближённый расчёт сигнала по спектру

9.3.1. Расчет сигнала по его амплитудному и фазовому спектру

9.3.2. Связь сигнала с его мнимым и вещественным спектром

# Содержание курса ТОЭ ФИБС весенний семестр 2013-14

## 9.4. Спектральный метод расчёта цепей

9.4.1. Общая характеристика спектрального метода расчёта цепей

9.4.2. Свойства идеальных цепей

9.4.3. Характеристики реальных цепей

## 9.5. Спектры амплитудно-модулированных сигналов

## 10. Анализ четырёхполюсников и активных цепей

### 10.1. Общая характеристика пассивных четырёхполюсников

10.1.1. Уравнения ЧП

10.1.2. Расчет ПФ и соединения ЧП

10.1.3. Симметричный четырёхполюсник в согласованном режиме

# Содержание курса ТОЭ ФИБС весенний семестр 2013-14

## 10.2. Расчет цепей с зависимыми источниками

10.2.1. Общая характеристика активных элементов и цепей

10.2.2. Схемы замещения необратимых ЧП

10.2.3. Особенности методов расчета цепей с ЗИ

## 10.3. Расчет цепей с ОУ

10.3.1. ОУ и его свойства

10.3.2. Использование операционных усилителей для реализации основных математических операций

10.3.3. Особенности расчета цепей с ОУ

## 11. Анализ нелинейных цепей

# Содержание курса ТОЭ ФИБС весенний семестр 2013-14

## 11.1. Общая характеристика нелинейных цепей

11.1.1. Исходные понятия

11.1.2. Классификация НЦ

## 11.2. Методы расчета НЦ

11.2.1. Графический метод расчета R-цепей

11.2.2. Аналитический расчет R-цепей

11.2.3. Расчет R-цепей с диодами

11.2.4. Общая характеристика расчёта нелинейных динамических цепей

# Курсовая работа ФИБС 2013-14

В методичке (Курсовое проектирование по теории электрических цепей / Уч.пос. для самоств.раб.ств. СПб, 1996. («№9222» 3 21/К 93)) **тема № 4**, в электронной версии методички **тема № 2** (номер варианта сообщается преподавателем, ведущим практические занятия) **с возможными изменениями схемы и вида входного сигнала** на усмотрение преподавателя.

Курсовая работа оформляется в соответствии с правилами, изложенными во введении к учебному пособию.

**Защита** курсовой работы принимается **преподавателем, ведущим практические занятия** до начала экзаменационной сессии. Студент, **не защитивший** курсовую работу **до экзамена не допускается.**



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

### Глава 7. Передаточная функция цепи и основные характеристики цепи

#### 7.1. Нормирование параметров цепи

**Цели нормировки** (масштабирования):

- 1) Перейти к безразмерным параметрам:  $R_*$ ,  $L_*$ ,  $C_*$  близким к 1, т.е. уменьшить разброс параметров цепи .
- 2) Получить максимально однотипные формулы для одинаковых классов цепей.

**Типы нормировки:**

- 1) Нормирование по *времени* (по *частоте*).

$t_* = t/t_0$  – нормированное, безразмерное время, где  $t_0$  какой-либо характерный интервал, например, постоянная времени для цепи 1-го порядка или время импульса входного сигнала.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Нормированная частота  $\omega_* = \omega/\omega_0 = \frac{2\pi}{T\omega_0} = \frac{2\pi}{T_*T_0\omega_0} = \frac{\omega_*}{T_0\omega_0}$ , т.е.  $t_0\omega_0 = 1$ , т.е.  $\omega_0 = 1/t_0$ , т.е. *нормирование по времени обратно нормированию по частоте*.

2) Нормирование по *уровню сопротивления*  $Z_* = \frac{Z}{R_0}$ , базисная величина  $R_0$  — характерное сопротивление цепи, например,  $R_0$  в цепи 1-го порядка или сопротивление нагрузки.

3) Нормирование по *уровню сигнала*  $f_* = f/f_0$ , базисная величина  $f_0$  — максимальное значение входного сигнала. Этот тип нормировки основан на свойстве пропорциональности линейных цепей.

Каждая нормировка уменьшает число параметров цепи на 1.

Параметры цепи:  $R_* = R/R_0$ ,  $Z_{L*} = j\omega L/R_0 = j\omega_*\omega_0 L/R_0 = j\omega_* L_*$ , т.е.  $L_* = \omega_0 L/R_0$ , аналогично дуально  $C_* = \omega_0 C/R_0 = \omega_0 C R_0$ .

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

● В курсовом за базисные величины принять  $\omega_0 = 10^6$ ,  $R_0 = R_2 = R_H$ .

*Нормировать все R, L, C-элементы*, нормировать уровень сигнала не надо.

Следует учесть:

(килоОмы) кОм =  $10^3$  Ом;

(миллиГенри) мГн =  $10^{-3}$  Гн;

(пикоФарады) пФ =  $10^{-12}$  Ф.

См. пример в электронном варианте курсовой.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

### ● 7.1. Передаточная функция цепи и ее свойства

По теореме свертки преобразования Лапласа имеем:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)h(t - \tau)d\tau \div F_2(s) = F_1(s)H(s)$$

здесь введено обозначение  $H(s) \div h(t)$ .

Найдем изображение переходной характеристики

$$h_1(t) \div H_1(s) = \frac{1}{s}H(s).$$

Определение: **Передаточной функцией** цепи (ПФ)  $H(s)$  называется отношение изображения реакции к изображению единственного в цепи воздействия при нулевых ННУ.

$$H(s) = \frac{F_2(s)}{F_1(s)}$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

- *Свойства:*

1. *ПФ является изображением ИХ цепи  $H(s) \div h(t)$ .*

Свойство 1 называют вторым определением ПФ

2. *ПХ находят как интеграл ИХ  $h_1(t) \div H_1(s) = \frac{H(s)}{s}$ .*

3. *По ПФ находят частотные характеристики цепи  $H(j\omega)$ .*

Для перехода к МКА от операторного метода достаточно провести формальные замены  $s = j\omega$ .

4. *ПФ полностью определяет ДУ цепи, знаменатель ПФ – характеристический полином.*

*Вывод:* *ПФ связывает все основные характеристики цепи.*

*Замечание:*

ИН подключен к пассивному ДП, найдем входной ток.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

### ● 7.3. Виды частотных характеристик

Определение: **Обобщенной ЧХ** или просто ЧХ цепи  $H(j\omega)$  называется отношение комплексной амплитуды реакции к комплексной амплитуде единственного в цепи воздействия в УСР.

$$H(j\omega) = \frac{\dot{F}_{m\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\dot{F}_{m\text{ВХ}}(j\omega)}$$

Т.к. ЧХ – комплексная функция, ее можно представить в алгебраической и показательной форме:

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\Phi(\omega)} = B(\omega) + jM(\omega) = \frac{F_{m\text{ВЫХ}}e^{j\alpha_{\text{ВЫХ}}}}{F_{m\text{ВХ}}e^{j\alpha_{\text{ВХ}}}}$$

- 1)  $A(\omega)$  – АЧХ
- 2)  $\Phi(\omega)$  – ФЧХ
- 3)  $B(\omega)$  – ВЧХ
- 4)  $M(\omega)$  – МЧХ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Очевидны соотношения между ними

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{B(\omega)^2 + M(\omega)^2}$$

$$\Phi(\omega) = \arg H(j\omega) = \text{фаза } H(j\omega) = \arctg \frac{M(\omega)}{B(\omega)}$$

$$B(\omega) = \operatorname{Re} H(j\omega) = A \cos \Phi$$

$$M(\omega) = \operatorname{Im} H(j\omega) = A \sin \Phi$$

$$5) H(j\omega) = A \Phi X$$

*Замечание: АФХ содержит полную информацию о всех видах характеристик, ее строят или по АЧХ и ФЧХ или по ВЧХ и МЧХ и проставляют необходимые частоты.*

Выводы по ЧХ:

- 1) АЧХ  $A(\omega) = \frac{F_{\text{мВЫХ}}}{F_{\text{мВХ}}}$  — содержит полную информацию об отношении амплитуд синусоид на выходе и входе в УСР.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

2) ФЧХ  $\Phi(\omega) = \alpha_{\text{ВЫХ}} - \alpha_{\text{ВХ}}$  — содержит полную информацию о сдвиге фаз синусоид реакции и воздействия в УСР.

Замечание: на практике АЧХ снимают с помощью двух приборов (на входе и выходе), а ФЧХ с помощью двухлучевого осциллографа.

Пример:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{\dot{F}_{m\text{ВЫХ}}(j\omega)}{\dot{F}_{m\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{\dot{I}_{m\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{m\text{ВХ}}} = Y_{\text{ВХ}}(j\omega) = \frac{1}{Z_{\text{ВХ}}(j\omega)} \\ &= \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{АЧХ } A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\text{ФЧХ } \Phi(\omega) = 0^\circ - \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Построим качественно графики характеристик:

*Замечание: графики АЧХ и ФЧХ построены качественно по 3-м точкам.  
График АФХ построен на комплексной плоскости по АЧХ и ФЧХ.*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

*Замечание: необходимо уметь контролировать ЧХ цепи по эквивалентным схемам цепи на характерных частотах.*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

### ● 7.4.Связь полосы пропускания RLC-контура с его добротностью

Определение: **Полосой пропускания** (ПП) обычно называют диапазон частот в районе максимума АЧХ, в котором  $A(\omega) \geq A_{max}/\sqrt{2} = 0,707 A_{max}$ .

*Замечание: граничные частоты полосы пропускания часто называют частотами среза*

$$|Y_{BX}| = \frac{1}{|Z_{BX}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Дадим трактовку граничным частотам:

при резонансной частоте:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$|Z_{\text{вх}}| = R = \min, I_0 = \frac{U}{R} = \max.$

На границе ПП  $|Z_{\text{вх}}|_{\text{гр}} = R\sqrt{2}, I_{\text{гр}} = \frac{U}{Z_{\text{гр}}} = \frac{U}{R\sqrt{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$

Уменьшается на границе ПП в  $\sqrt{2}$  раз.

$P_{\text{гр}} = RI_{\text{гр}}^2 = \frac{U^2}{R(\sqrt{2})^2} = \frac{P_0}{2}$  падает в 2 раза.

Найдем ПП  $\Delta\omega$

$$|Y_{\text{вх}}|_{\text{гр}} = \frac{1}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_{\text{гр}}L - \frac{1}{\omega_{\text{гр}}C}\right)^2}}, \text{ т.е. } \left| \omega_{\text{гр}}L - \frac{1}{\omega_{\text{гр}}C} \right| = R$$

$$1) \omega_{\text{гр}}L - \frac{1}{\omega_{\text{гр}}C} = R \left( * \frac{\omega_A}{L} \right), \text{ т.е. } \omega_A L > \frac{1}{\omega_A C}$$

$$\omega_A^2 - \frac{1}{LC} - \frac{R\omega_A}{L} = 0, \text{ т.е. } \omega_A = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}, \text{ т.е. } \omega_A > 0 \llcorner + \gg$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

$$2) \omega_{\text{гр}}L - \frac{1}{\omega_{\text{гр}}C} = -R \left( * \frac{\omega_{\text{Б}}}{L} \right), \text{ т.е. } \omega_{\text{Б}}L < \frac{1}{\omega_{\text{Б}}C}$$

$$\omega_{\text{Б}}^2 - \frac{1}{LC} + \frac{R\omega_{\text{Б}}}{L} = 0, \text{ т.е. } \omega_{\text{Б}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\Delta\omega = \omega_{\text{А}} - \omega_{\text{Б}} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} + \frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \frac{R}{L}$$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} = \frac{R\omega_0}{L\omega_0} = \frac{R\omega_0}{\rho} = \frac{\omega_0}{Q} = \Delta\omega$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

*Выводы : чем больше добротность резонансного контура, тем меньше его полоса пропускания.*

*Замечание: 1)  $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ , т.е. от  $C$  не зависит, следовательно, при настройке в резонанс при изменении емкости полоса пропускания не изменяется.*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

2) Зная график АЧХ  $|Y_{\text{ВХ}}(j\omega)|$  можно найти все параметры контура.

### 7.5. Понятие о фильтрах

Рассмотрим ЧП

Определение: **Четырехполюсником** (ЧП) называется часть цепи, имеющая 2 пары внешних выводов (полюсов).

Определение: **Фильтром** называется ЧП, у которого в некоторой полосе частот, называемой ПП, АЧХ обычно изменяется от 1 до 0,707 или от  $k$  до  $k/\sqrt{2}$ , а в остальной полосе частот, называемой полосой задерживания (ПЗ) АЧХ быстро затухает.

Определение: **Фильтр** называется идеальным, если у него в ПП АЧХ=1, а в ПЗ АЧХ=0.

*Замечание: идеальный фильтр реализовать невозможно хотя бы потому, что его ЧХ  $H(j\omega)$  не является дробно-рациональной функцией от обобщенной частоты  $s = j\omega$  как это должно быть у реальных цепей.*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Классификация фильтров:

рассмотрим классические симметричные фильтры типа «к»

1. ФНЧ – фильтр нижних частот, пропускает на низких частотах

Трактовка поведения цепи на характерных частотах:

1)  $\omega \rightarrow 0, Z_L = j\omega L \rightarrow 0$ , т.е. КЗ;

$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \infty$ , т.е. ХХ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

2)  $\omega \rightarrow \infty, Z_L = j\omega L \rightarrow \infty$ , т.е. ХХ;

$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0$ , т.е. КЗ

2. ФВЧ – фильтр верхних частот, пропускает на высоких частотах

Трактовка дуальна



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

3. ППФ – полосовой пропускающий фильтр, пропускает сигнал в некотором диапазоне частот

4. ПЗФ – полосовой заграждающий фильтр, не пропускает сигнал в некотором диапазоне частот

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Рассматривают и другие типы фильтров. Например, полиномиальные (фильтры Баттерворта и Чебышева различного порядка), фильтры типа  $m$  и другие.

## 8. Анализ УПР в цепи

### 8.1. Периодические сигналы и их спектры

#### 8.1.1. Формы записи РФ

Условно считаем, что периодическое воздействие приложено к цепи при  $t = -\infty$ . Тогда к любому моменту времени  $t$  свободная составляющая затухла и в цепи установившийся (вынужденный) периодический режим.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Реальные периодические сигналы удовлетворяют условиям Дирихле:

- 1) в пределах периода они ограничены по уровню,
- 2) в пределах периода они непрерывны, имеют конечное число максимумов и минимумов, если имеют разрывы, то это разрывы 1 рода и их число конечно.

Определение: Периодический сигнал  $f(t)$  удовлетворяющий условиям Дирихле при всех  $t$  можно разложить в сходящийся гармонический **ряд Фурье** причем частоты гармоник  $\omega_k = k\omega_1$  кратны частоте первой (основной) гармоники  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , т.е.  $T_1 = T$ , период сигнала ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) при этом сумма ряда Фурье в точках непрерывности равна  $f(t)$ , а в т. разрыва 1 рода равна полусумме пределов слева и справа, т.е. РФ плохо сходится в точках разрыва.

Формы записи РФ:

$$1. f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t]$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_1 t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin k\omega_1 t dt.$$

Нулевая гармоника, т.е. постоянная составляющая  $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt =$   
 $= \frac{S_T}{T} = f_{\text{ср}}$

2. Можно преобразовать РФ к другой форме

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega_1 t + \Phi_k)]$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} = f_{\text{ср}}$$

Свойства РФ симметричных сигналов:

1) Четные сигналы  $f(t) = f(-t)$

не содержат синусоид, т.е.  $b_k = 0$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

2) Нечетные сигналы  $f(t) = -f(-t)$

не содержат косинусоид, т.е.  $a_k = 0$ .

3) РФ сигналов, симметричных относительно оси  $t$  при сдвиге на полпериода  $f(t) = -f(t \pm \frac{T}{2})$

не содержат гармоник четных номеров

3. Комплексная форма записи РФ

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{-jk\omega_1 t}$$

### 8.1.2. Дискретные спектры периодических сигналов

Определение: Множество комплексных амплитуд гармоник РФ  $\{\dot{A}_k\}$  называется **дискретным спектром периодического сигнала  $f(t)$** , соответственно множество амплитуд  $\{A_k\}$ , называют дискретным амплитудным спектром, а множество фаз  $\{\Phi_k\}$ , называют дискретным фазовым спектром.

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Амплитудный спектр  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_{-k}$  четная функция; фазовый спектр  $\Phi_k = \arctg \frac{-b_k}{a_k} = -\arctg \frac{-b_{-k}}{a_{-k}} = -\Phi_{-k}$  нечетная функция.

*Замечание 1: Спектр называется дискретным, т.к. он существует только при дискретных значениях частоты  $\omega_k = k\omega_1$ , расстояние между гармониками по оси частот  $\Delta\omega = \omega_1$*

*2: Спектр часто называют линейчатым, т.к. его обозначают отрезками прямых линий.*

*3: Особенность спектра в том, что  $A_0 = 2f_{\text{ср}} = 2 \frac{a_0}{2}$ .*

*4: Синусоида тоже периодический сигнал. Его спектры*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Выводы: амплитудный спектр полностью характеризует амплитуды гармоник, т.е. синусоид, которыми РФ заменяет периодический сигнал, а фазовый спектр полностью характеризует начальные фазы, каждая гармоника существует в  $\infty$  временном интервале и число гармоник тоже бесконечно.

Замечание 1: Попутно доказали, что гармоника отрицательной частоты имеет такое же право на существование как и гармоника положительной частоты

2: Все формы записи РФ эквивалентны.

### 8.1.3. Использование преобразования Лапласа для анализа УПР в цепи

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= A_k e^{-j\Phi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) [\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t] dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt = \frac{2}{T} F_1(s) \end{aligned}$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция №9

Условным первым импульсом назовем описание периодического сигнала внутри условного первого периода, переходим к преобразованию Лапласа, расширив верхний предел и подставив его в интеграл.

*Вывод: коэффициенты РФ можно найти используя изображение по Лапласу условного 1-го импульса периодического сигнала.*

### 8.2. Мощность и действующее значение РФ

#### 8.2.1. Мощность

Рассмотрим пассивный ДП в УПР, ток и напряжение которого разложены в РФ

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [U_{mk} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{uk})]$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1} [I_{mk} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{ik})]$$

Средняя мощность за период (активная мощность ДП)

$$P = P_a = P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt$$



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция № 9

Подставим РФ тока и напряжения с учетом того, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_1 t + \alpha) dt = 0 \text{ (суммарная площадь синусоиды за период),}$$
$$\cos \gamma \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\gamma - \beta) + \cos(\gamma + \beta))$$

и интеграл от произведения гармоник с разными номерами тоже равен 0.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} [U_{mk} I_{mk} \cos(\alpha_{uk} - \alpha_{ik}) + \cos(2k\omega_1 t + \alpha_{uk} + \alpha_{ik})]) dt = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$$

### 8.2.2. Действующее значение РФ

Среднеквадратичное значение, имеющее энергетическую трактовку

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} \quad \text{Заменяя на } u(t) \text{ на } i(t) \text{ в формуле}$$

МОЩНОСТИ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция № 9

Аналогично для напряжения

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{mk}^2}{\sqrt{2}^2}}$$

*Замечание:  $U$  сигнала постоянной величины мгновенное, амплитудное, среднее и действующее значение одно и тоже.*

### 8.3. Методы анализа УПР

#### 8.3.1. Анализ УПР в цепи с использованием РФ

Основная идея: РФ воздействия считаем суммой элементарных воздействий и методом наложения находим РФ реакции.

Последовательность действий:

1. Периодическое воздействие раскладываем в РФ. На практике обычно ограничиваются несколькими первыми гармониками, т.к. РФ быстро сходится, используют «укороченный РФ» (отрезок РФ)

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция № 9

- $$f_{\text{ВХ}}(t) = F_{0\text{ВХ}} + \sum_{k=1}^{3\dots 7} [F_{mk\text{ВХ}} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{k\text{ВХ}})]$$

2. Находим ПФ цепи, по ней ЧХ (АЧХ и ФЧХ)

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = A(\omega) \Phi(\omega)$$

Смысл ЧХ  $H(j\omega) = \frac{F_{m\text{ВЫХ}}(j\omega)}{F_{m\text{ВХ}}(j\omega)} = \frac{F_{m\text{ВЫХ}} e^{j\alpha_{\text{ВЫХ}}}}{F_{m\text{ВХ}} e^{j\alpha_{\text{ВХ}}}}$  в УСР, а для каждой гармоники ц цепи УСР.

3. Методом наложения находим РФ реакции

$$f_{\text{ВЫХ}}(t) = F_{0\text{ВЫХ}} + \sum_{k=1}^{3\dots 7} [F_{mk\text{ВЫХ}} \cos(k\omega_1 t + \alpha_{k\text{ВЫХ}})]$$

На основании 1-3

$$F_{mk\text{ВЫХ}} = F_{mk\text{ВХ}} \cdot A(\omega) |_{\omega=k\omega_1}$$

$$\alpha_{k\text{ВЫХ}} = \alpha_{k\text{ВХ}} + \Phi(\omega) |_{\omega=k\omega_1}$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция № 9

Являясь приближенным, метод эффективен, если цепь ФНЧ. Однако, в некоторых цепях убыль амплитуд воздействия компенсируется ростом АЧХ цепи, приходится учитывать сотни гармоник и приближенный расчет по РФ становится трудоемким.

*Замечание 1: Спектральный состав реакции полностью соответствует спектральному составу воздействия и новые гармоники на выходе появиться не могут.*

*2: Цепь пропускает разные гармоники с разными коэффициентами передачи, т.е. форма периодического сигнала на выходе не соответствует форме периодического сигнала на входе.*

### **8.3.2. РФ в замкнутой форме (точный расчет УПР)**

Основная идея метода – свободная составляющая определяется корнями ХП (т.е. полюсами ПФ), а вынужденная имеет математическую форму воздействия (не выполняется при резонансе).

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция № 9

Последовательность действий:

Условно считаем, что периодическое воздействие приложено при  $t=0$

1. Находим изображение воздействия

$$f_{\text{ВХ}}(t) = f_{1\text{ВХ}}(t) + f_{1\text{ВХ}}(t - T) + f_{1\text{ВХ}}(t - 2T) + \dots \quad \div$$

$$F_{\text{ВХ}}(s) = F_{1\text{ВХ}}(s)[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots] = \frac{F_{1\text{ВХ}}(s)}{1 - e^{-sT}}$$

с учетом формулы для суммы затухающей геометрической прогрессии

2. Находим ПФ цепи  $H(s) = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{B(s)/d_n}{\prod(s - s_k)}$

находим полюсы ПФ, полюсы предполагаем некрратными.

3. Находим изображение реакции (выходного сигнала) и выделяем в нем свободную и вынужденную составляющие.

$$F_{\text{ВЫХ}}(s) = H(s)F_{\text{ВХ}}(s) = \frac{B(s)/d_n}{\prod(s - s_k)} \cdot \frac{F_{1\text{ВХ}}(s)}{1 - e^{-sT}} = \sum_n \frac{A_k}{s - s_k} + \frac{F_{1\text{ВЫХ}}(s)}{1 - e^{-sT}}$$

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция № 9

- $F_{\text{ВЫХ}}(s) = F_{\text{ВЫХ СВ}}(s) + F_{\text{ВЫХ ВЫН}}(s)$   
Свободная составляющая определяется полюсами ПФ, а вынужденная имеет математическую форму воздействия, т.е. геометрическая прогрессия  $F_{1\text{ВЫХ}}(s) \div f_{1\text{ВЫХ}}(t) = f_{\text{ВЫХ УСТ}}(t) \Big|_{0 < t < T}$ , т.е. искомое описание первого импульса установившейся реакции в интервале первого периода

$$A_k = (s - s_k) F_{\text{ВЫХ}}(s) \Big|_{s=s_k}$$

т.е. определяем как обычно

4. Находим 1-й импульс на выходе

$$F_{1\text{ВЫХ}}(s) = [F_{\text{ВЫХ}}(s) - \sum_n \frac{A_k}{s-s_k}](1 - e^{-sT})$$

Определяем его оригинал, т.е. точное описание периодической реакции в интервале 1 периода и периодически продолжаем ее.

*Замечание 1: Найденное точное решение называют РФ в замкнутой форме, т.к. оно учитывает бесконечное число гармоник.*

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

## лекция № 9

*Замечание 2: Если считать, что входной сигнал начинается от 0, то этот метод можно применить для расчета ПП, фактически найдена свободная составляющая  $f_{\text{ВЫХ СВ}}(t)$  в  $F_{\text{ВЫХ}}(s) = F_{\text{ВЫХ СВ}}(s) + F_{\text{ВЫХ ВЫН}}(s)$*   
*3: Расчет  $A_k$  можно проводить и для не дробно-рациональной функции.*

### Глава 9. Анализ цепей спектральным методом

#### 9.1. Аперiodические сигналы и их спектры

##### 9.1.1. Переход от периодического сигнала к аперiodическому

Аперiodический сигнал (одиночный импульс) можно рассматривать как периодический при  $T \rightarrow \infty$ .

Преобразуем РФ в комплексной форме для периодического сигнала

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega_1 t} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \left( \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(k\omega_1 t) - j \sin(k\omega_1 t)] dt \right) =$$