Теория Графов

Определение

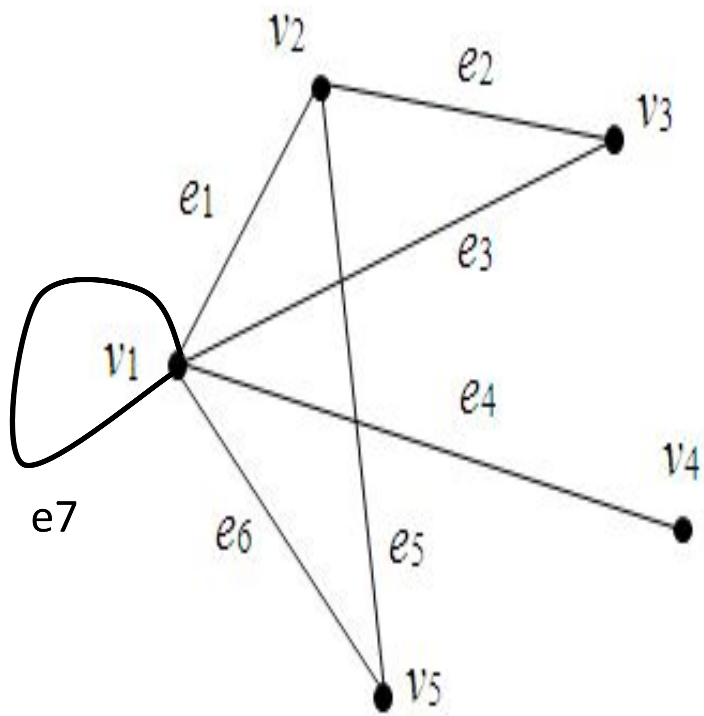
- ***Графом*** $G=G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (***множества вершин***) и множество E двухэлементных подмножеств множества V. Множество E называется ***множеством ребер***.
- Ребро, которое соединяет вершину саму с собой, называется ***петлей***

Определение

- Вершины v_i и v_j множества V называются ***соединенными*** ребром (v_i, v_j) или ***инцидентны*** к ребру (v_i, v_j), если $(v_i, v_j) \in E$. Если (v_i, v_j) – ребро, тогда вершины v_i и v_j называются ***концами*** ребра (v_i, v_j).
- Число вершин графа G обозначим v, а число ребер - e:

$$\left|V\right| = v, \quad \left|E\right| = e$$

Определение



$G(V, E)$ – граф

$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ – множество вершин

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ – множество ребер

Например, ребро $e_2=(v_2; v_3)$

e_2 – инцидентна к вершинам v_2 и v_3

Вершины v_2 и v_3 смежные

Добавим ребро e7=(v1,v1)

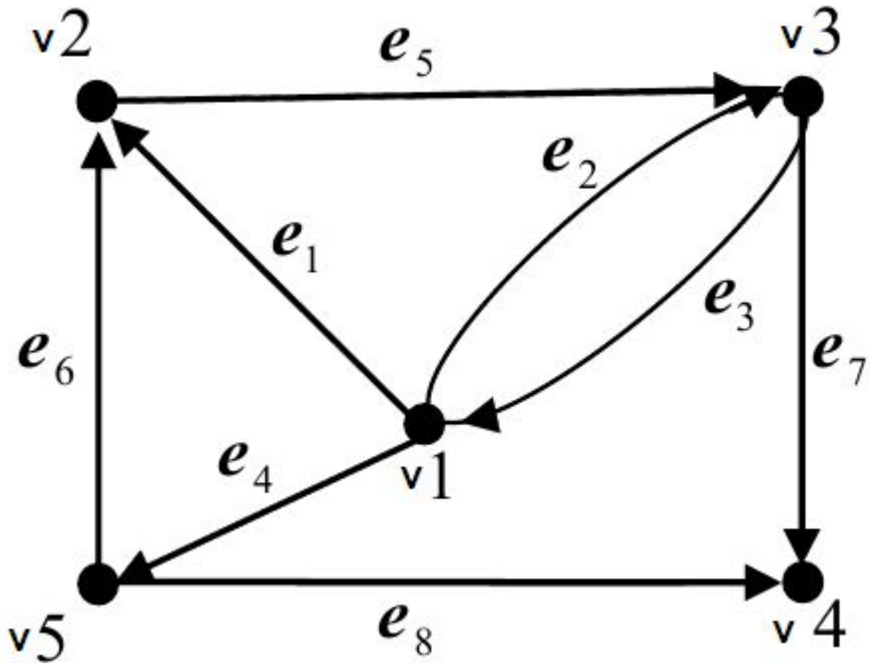
E={e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7}

e7- петля

Определение

- ***Ориентированный граф*** или ***орграф*** $G=G(V, E)$ – это такой граф, который состоит из множества V вершин и множества E упорядоченных пар элементов из V. Элемент множества E называется ***дугой***. Если $(v_i, v_j) \in E$, то v_i называется ***начальной вершиной*** дуги (v_i, v_j), а v_j называется ***конечной вершиной***.

Определение



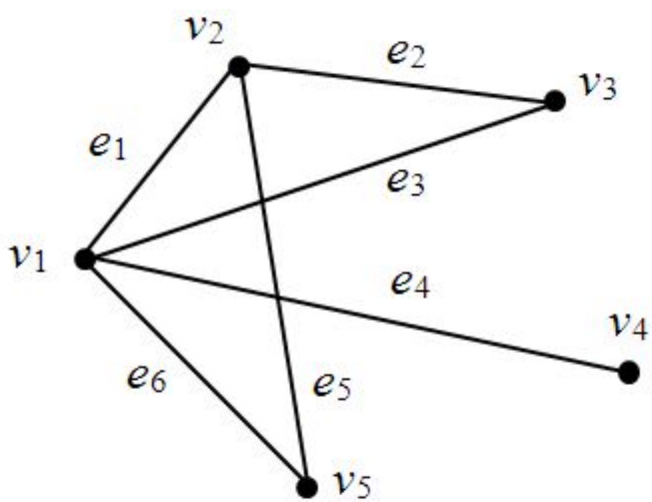
V={v1,v2,v3,v4,v5} – множество вершин

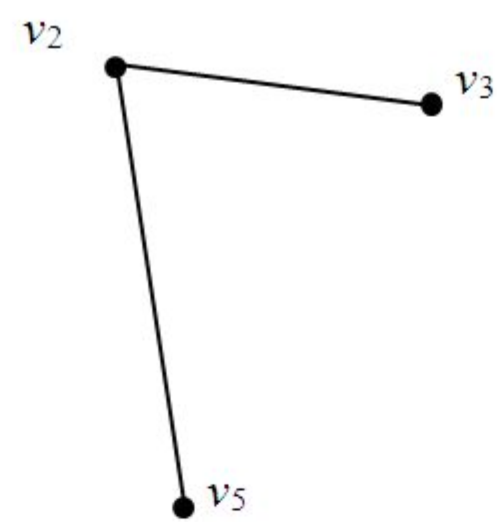
E={e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7} – множество дуг.

Например, дуга e2=(v1,v3) образована начальной вершиной v1 и конечной вершиной v2

Определение

- Граф *G'(V', E')* называется ***подграфом*** (или ***частью***) графа *G*(*V*,*E*), если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Если *V'*=*V*, то *G'* называется ***остовным подграфом*** *G.*





Определение

- ***Степенью*** вершины *v* для неориентированного графа, обозначается *d*(*v*), называется количество ребер, инцидентных этой вершине. Вершина степени 0 называется ***изолированной***. Вершина степени 1 называется ***висячей***.
- **Теорема (*Теорема Эйлера*)** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер:

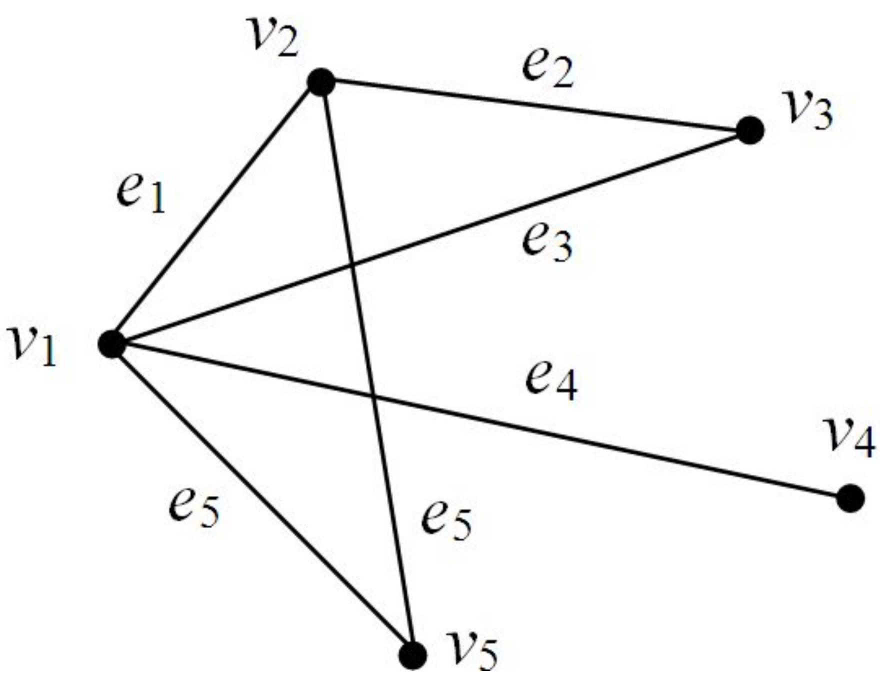
$$\sum_{v \in V} d\left(v\right) = 2e$$

Определение

- ***Полустепенью исхода*** вершины *v* для орграфа называется количество дуг, для которых *v* является начальной вершиной, обозначается $d^-(v)$. ***Полустепенью захода*** вершины *v* называется количество дуг, для которых *v* является конечной вершиной, обозначается $d^+(v)$.

$$\sum_{v\in V} d^-(v) + \sum_{v\in V} d^+(v) = 2e$$

Определение



$G(V, E)$ – граф

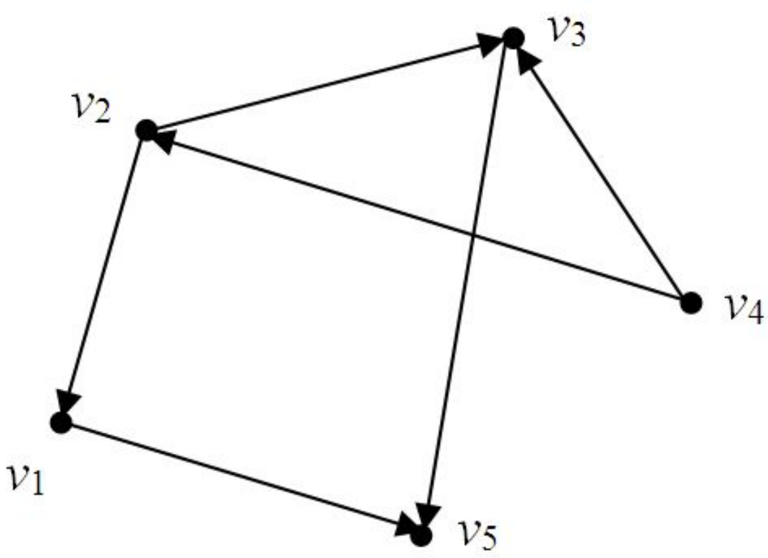
$d(v_1)=4$ $d(v_4)=1$

$d(v_2)=3$ $d(v_5)=2$

$d(v_3)=2$

вершина v_4 - висячая

Определение



$d^-(v_1)=1$ $d^-(v_3)=1$ $d^-(v_5)=0$
$d^+(v_1)=1$ $d^+(v_3)=2$ $d^+(v_5)=2$

$d^-(v_2)=2$ $d^-(v_4)=2$
$d^+(v_2)=1$ $d^+(v_4)=0$

вершина v_4 – исток
вершина v_5 – сток

Определение

- ***Матрицей смежности вершин неориентированного графа G***, содержащего n вершин, называют квадратную матрицу $A=[a_{ij}]$ n-го порядка, у которой строки и столбцы матрицы соответствуют вершинам неориентированного графа. Элементы a_{ij} матрицы A равны числу ребер, направленных из i-й вершины в j-ю.

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если в графе } G \text{ вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены } k \text{ ребрами;} \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Определение

- ***Матрица смежности вершин орграфа G***, содержащего n вершин- это квадратная матрица $A=[a_{ij}]$ n-го порядка, у которой строки и столбцы матрицы соответствуют вершинам орграфа. Элементы a_{ij} матрицы A равны числу дуг, направленных из i-й вершины в j-ю. Если орграф состоит из однократных дуг, то элементы матрицы равны либо 0, либо 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если в графе } G \text{ есть } k \text{ дуг из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю;} \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Определение

- ***Матрицей инцидентности неориентированного графа с n вершинами и m ребрами*** называется матрица $B_{ij}=[b_{ij}]$размерности n x m , строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элементы матрицы инцидентности неориентированного графа равны 1, если вершина инцидентна ребру , и 0 в противном сл

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i - \text{концевая вершина ребра } e_j; \\ 0, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Определение

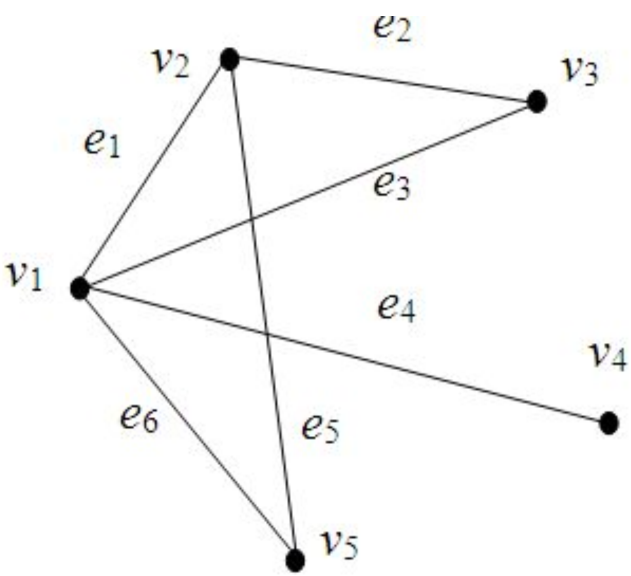
- ***Матрицей инцидентности неориентированного графа с n вершинами и m ребрами*** называется матрица $B_{ij}=[b_{ij}]$размерности n x m , строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элементы матрицы инцидентности неориентированного графа равны 1, если вершина инцидентна ребру , и 0 в противном сл

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i - \text{концевая вершина ребра } e_j; \\ 0, \text{ если иначе.} \end{cases}$$

Определение

- Пусть $G=G(V, E)$ – граф с вершинами $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ и ребрами $e_1, e_2, \ldots, e_m \in E$. ***Маршрутом (путем) длины k*** из v_0 в v_k (или между v_0 и v_k) называется последовательность $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \ldots v_{k-1} e_k v_\mathrm{k}$ такая, что $e_i=(v_{i-1}, v_i)$.
- Если все ребра различны, то путь называется ***цепью***. Если все вершины различны (а значит, и ребра), то путь называется ***простой цепью***. Замкнутая цепь называется ***циклом***. Замкнутая простая цепь называется ***простым циклом***. Граф без циклов называется ***ациклическим***.

Определение



$G(V, E)$ – граф

$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_1e_1v_2e_5v_5$ или $v_1v_2v_3v_1v_2v_5$ – маршрут

$v_1v_2v_3v_1v_5$ – цепь

$v_1v_3v_2v_5$ – простая цепь

$v_1v_3v_2v_5v_1$ – простой цикл

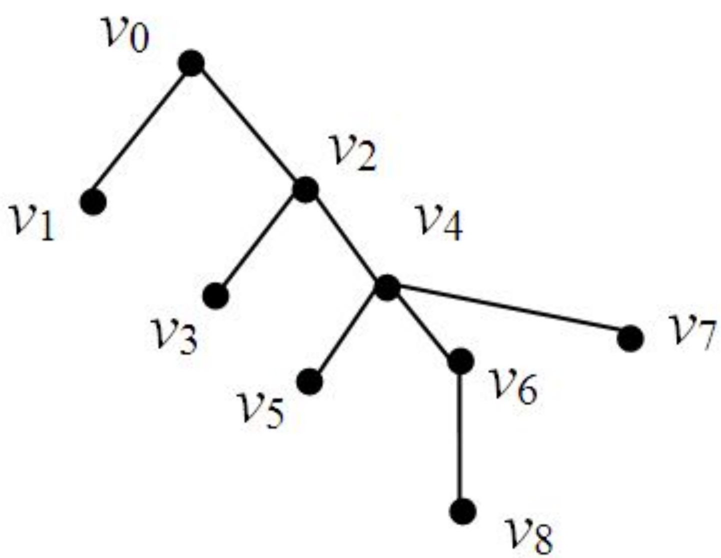
Определение

- Если каждому ребру графа приписано некоторое положительное число, то такое число называется весом, а сам граф называется взвешенным графом. Простой взвешенный граф (сеть) может быть представлен также своей ***матрицей весов*** W=[ω_{ij}], где ω_{ij} – вес ребра, соединяющего вершины v_i и v_j. Весы несуществующих ребер (дуг) полагают равными нулю или бесконечности в зависимости от приложений.

Определение

- ***Деревом*** называется граф $T(V, E)$ без циклов. ***Лес*** – это граф, компоненты которого являются деревьями.
- ***Ориентированное дерево T'*** представляет собой свободный от петель ориентированный граф, соотнесенный граф которого является деревом.
- Вершины степени 1 называются ***листьями***. Другие вершины называются ***внутренними вершинами***
- Вершина в самой верхней части называется ***корнем*** дерева.
- ***Высотой*** дерева $h(T)$ называется длина самой длинной цепи от корня до листа.

Определение



v_0 – корень дерева

v_1, v_3, v_5, v_7, v_8 – листья

v_2, v_4, v_6 – внутренние вершины

высота дерева $h(T)$=4

Определение

- Дерево *T* называется ***остовным деревом*** графа *G*, если *T* – подграф графа *G* и каждая вершина *G* является вершиной в *T*.
- ***Минимальным остовным деревом*** называется такое остовное дерево графа *G*, что вес *T* меньше или равен весу любого другого остовного дерева графа *G*. Вес минимального остовного дерева будем обозначать $\omega_{min}(T)$.
-

Определение

- ***Алгоритм Краскала:***
- 1) Выбрать в графе G ребро e минимального веса, не принадлежащее множеству E и такое, что его добавление в E не создает цикл в дереве T.
- 2) Добавить это ребро во множество ребер E.
- 3) Продолжить, пока имеются ребра, обладающие указанными свойствами.

Определение

- ***Алгоритм Прима:***
- 1) Выбрать вершину v_0 графа G и ребро с наименьшим весом e_1, для которого v_0 – одна из вершин, и сформировать дерево T_1.
- 2) Для заданного дерева T_k с ребрами e_1, e_2, e_3, …, e_k, если имеется вершина, не принадлежащая T_k, выбрать ребро с наименьшим весом, смежное с ребром дерева T_k и имеющее вершину вне дерева T_k. Добавить в дерево T_k, формируя дерево T_{k+1}.
- 3) Продолжить, пока имеются вершины графа G, не принадлежащие дереву.