

Теория Графов

Определение

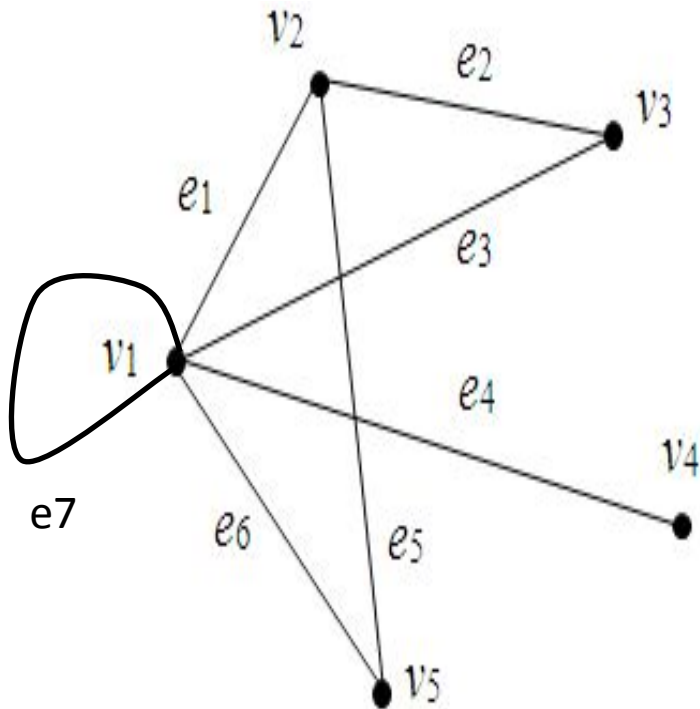
- **Графом** $G=G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (**множества вершин**) и множество E двухэлементных подмножеств множества V . Множество E называется **множеством ребер**.
- Ребро, которое соединяет вершину саму с собой, называется **петлей**

Определение

- Вершины v_i и v_j множества V называются **соединенными** ребром (v_i, v_j) или **инцидентны** к ребру (v_i, v_j) , если $(v_i, v_j) \in E$. Если (v_i, v_j) – ребро, тогда вершины v_i и v_j называются **концами** ребра (v_i, v_j) .
- Число вершин графа G обозначим v , а число ребер - e :

$$|V| = v, \quad |E| = e$$

Определение



$G(V, E)$ – граф

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ – множество вершин

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ – множество ребер

Например, ребро $e_2 = (v_2; v_3)$

e_2 – инцидентна к вершинам v_2 и v_3

Вершины v_2 и v_3 смежные

Добавим ребро $e_7 = (v_1, v_1)$

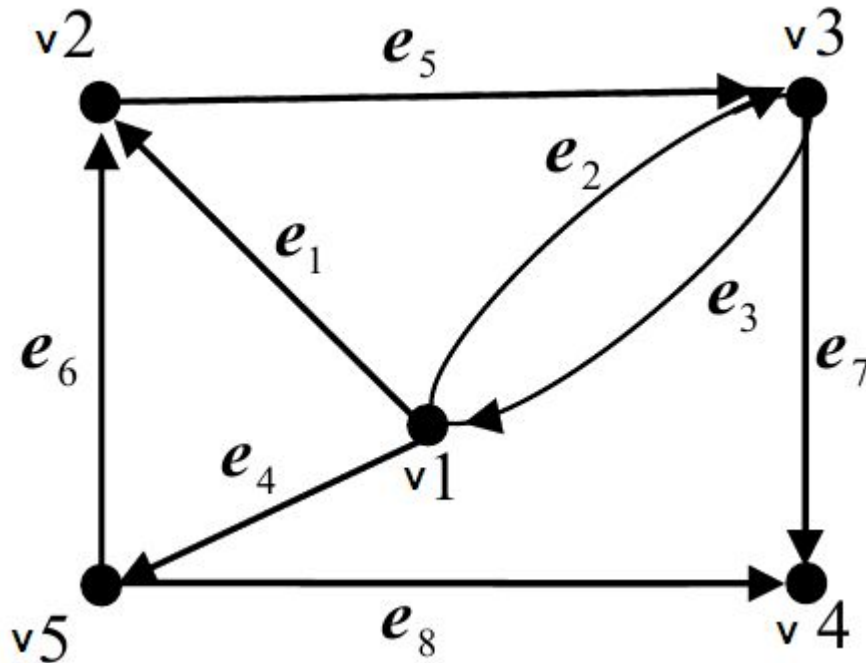
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

e_7 – петля

Определение

- **Ориентированный граф** или **орграф** $G=G(V, E)$ – это такой граф, который состоит из множества V вершин и множества E упорядоченных пар элементов из V . Элемент множества E называется **дугой**. Если $(v_i, v_j) \in E$, то v_i называется **начальной вершиной** дуги (v_i, v_j) , а v_j называется **конечной вершиной**.

Определение



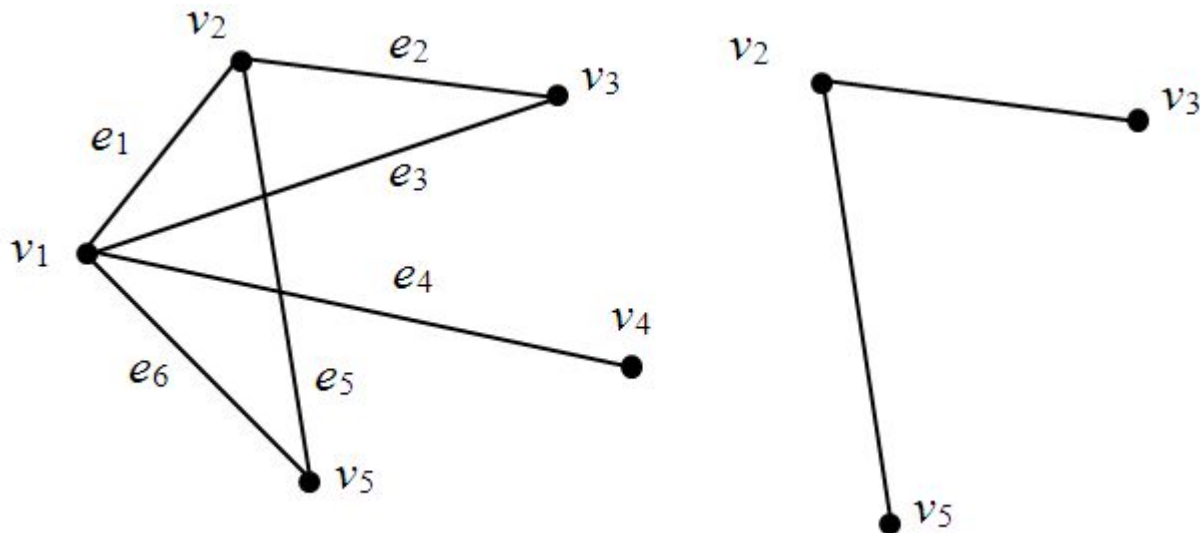
$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ –
множество вершин

$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ –
множество дуг.

Например, дуга $e_2=(v_1, v_3)$
образована начальной
вершиной v_1 и конечной
вершиной v_2

Определение

- Граф $G'(V', E')$ называется **подграфом** (или **частью**) графа $G(V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Если $V'=V$, то G' называется **остовным подграфом** G .



Определение

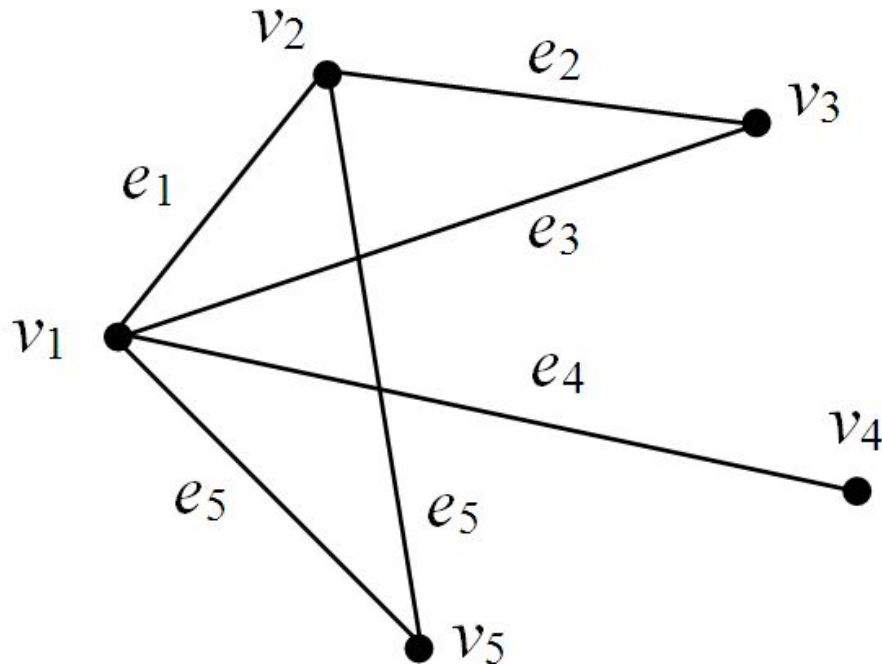
- **Степенью** вершины v для неориентированного графа, обозначается $d(v)$, называется количество ребер, инцидентных этой вершине. Вершина степени 0 называется **изолированной**. Вершина степени 1 называется **висячей**.
- **Теорема (Теорема Эйлера)** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер:
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2e$$

Определение

- **Полустепенью исхода** вершины v для орграфа называется количество дуг, для которых v является начальной вершиной, обозначается $d^-(v)$. **Полустепенью захода** вершины v называется количество дуг, для которых v является конечной вершиной, обозначается $d^+(v)$.

$$\sum_{v \in V} d^-(v) + \sum_{v \in V} d^+(v) = 2e$$

Определение



$G(V, E)$ – граф

$$d(v_1)=4$$

$$d(v_4)=1$$

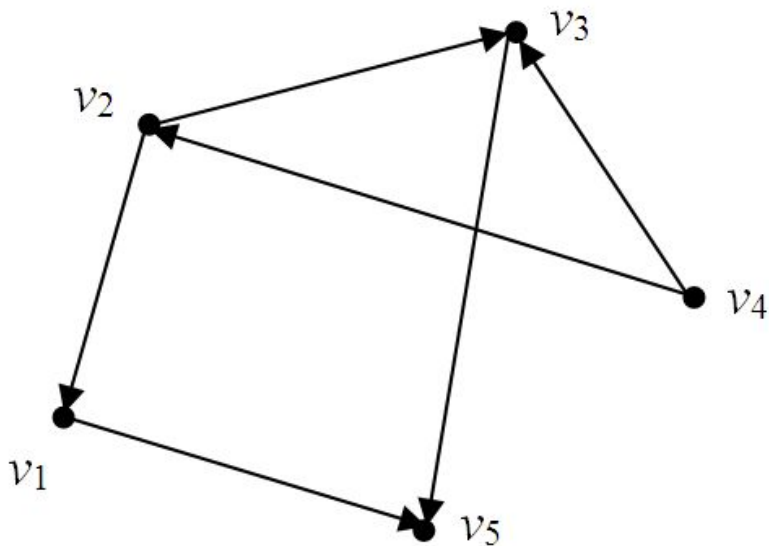
$$d(v_2)=3$$

$$d(v_5)=2$$

$$d(v_3)=2$$

вершина v_4 - висячая

Определение



$$d^-(v_1)=1$$

$$d^+(v_1)=1$$

$$d^-(v_3)=1$$

$$d^+(v_3)=2$$

$$d^-(v_5)=0$$

$$d^+(v_5)=2$$

$$d^-(v_2)=2$$

$$d^+(v_2)=1$$

$$d^-(v_4)=2$$

$$d^+(v_4)=0$$

Вершина v_4 – ИСТОК

Вершина v_5 – СТОК

Определение

- **Матрицей смежности вершин неориентированного графа G** , содержащего n вершин, называют квадратную матрицу $A=[a_{ij}]$ n -го порядка, у которой строки и столбцы матрицы соответствуют вершинам неориентированного графа. Элементы a_{ij} матрицы A равны числу ребер, направленных из i -й вершины в j -ю.

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если в графе } G \text{ вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены } k \text{ ребрами;} \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Определение

- **Матрица смежности вершин орграфа G** , содержащего n вершин- это квадратная матрица $A=[a_{ij}]$ n -го порядка, у которой строки и столбцы матрицы соответствуют вершинам орграфа. Элементы a_{ij} матрицы A равны числу дуг, направленных из i -й вершины в j -ю. Если орграф состоит из однократных дуг, то элементы матрицы равны либо 0, либо 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{если в графе } G \text{ есть } k \text{ дуг из } i\text{-й вершины в } j\text{-ю;} \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Определение

- **Матрицей инцидентности неориентированного графа с n вершинами и t ребрами** называется матрица $V_{ij}=[b_{ij}]$ размерности $n \times t$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элементы матрицы инцидентности неориентированного графа равны 1, если вершина инцидентна ребру, и 0 в противном сл
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ – концевая вершина ребра } e_j; \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

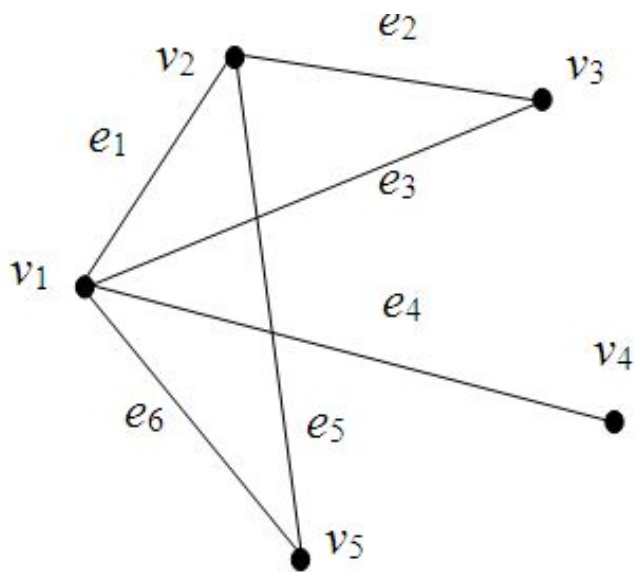
Определение

- **Матрицей инцидентности неориентированного графа с n вершинами и t ребрами** называется матрица $V_{ij}=[b_{ij}]$ размерности $n \times t$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Элементы матрицы инцидентности неориентированного графа равны 1, если вершина инцидентна ребру, и 0 в противном сл
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ – концевая вершина ребра } e_j; \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Определение

- Пусть $G=G(V, E)$ – граф с вершинами $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ и ребрами $e_1, e_2, \dots, e_m \in E$. **Маршрутом (путем) длины k** из v_0 в v_k (или между v_0 и v_k) называется последовательность $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \dots v_{k-1} e_k v_k$ такая, что $e_i=(v_{i-1}, v_i)$.
- Если все ребра различны, то путь называется **цепью**. Если все вершины различны (а значит, и ребра), то путь называется **простой цепью**.
Замкнутая цепь называется **циклом**.
Замкнутая простая цепь называется **простым циклом**. Граф без циклов называется **ациклическим**.

Определение



$G(V, E)$ – граф

$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_1e_1v_2e_5v_5$ или $v_1v_2v_3v_1v_2v_5$ – маршрут

$v_1v_2v_3v_1v_5$ – цепь

$v_1v_3v_2v_5$ – простая цепь

$v_1v_3v_2v_5v_1$ – простой цикл

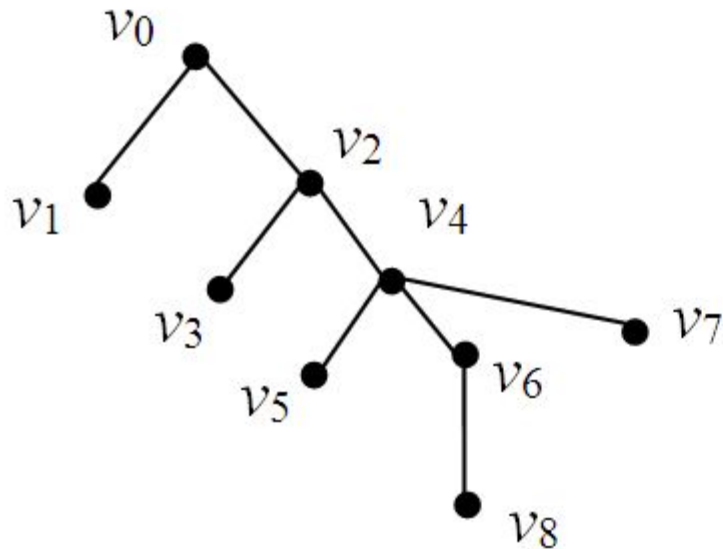
Определение

- Если каждому ребру графа приписано некоторое положительное число, то такое число называется весом, а сам граф называется взвешенным графом. Простой взвешенный граф (сеть) может быть представлен также своей **матрицей весов** $W=[\omega_{ij}]$, где ω_{ij} – вес ребра, соединяющего вершины v_i и v_j . Весы несуществующих ребер (дуг) полагают равными нулю или бесконечности в зависимости от приложений.

Определение

- **Деревом** называется граф $T(V, E)$ без циклов. **Лес** – это граф, компоненты которого являются деревьями.
- **Ориентированное дерево T'** представляет собой свободный от петель ориентированный граф, соотнесенный граф которого является деревом.
- Вершины степени 1 называются **листьями**. Другие вершины называются **внутренними вершинами**
- Вершина в самой верхней части называется **корнем** дерева.
- **Высотой** дерева $h(T)$ называется длина самой длинной цепи от корня до листа.

Определение



v_0 – корень дерева

v_1, v_3, v_5, v_7, v_8 – ЛИСТЬЯ

v_2, v_4, v_6 – ВНУТРЕННИЕ ВЕРШИНЫ

высота дерева $h(T)=4$

Определение

- Дерево T называется **остовным деревом** графа G , если T – подграф графа G и каждая вершина G является вершиной в T .
- **Минимальным остовным деревом** называется такое остовное дерево графа G , что вес T меньше или равен весу любого другого остовного дерева графа G . Вес минимального остовного дерева будем обозначать $\omega_{min}(T)$.
-

Определение

- **Алгоритм Краскала:**
- 1) Выбрать в графе G ребро e минимального веса, не принадлежащее множеству E и такое, что его добавление в E не создает цикл в дереве T .
- 2) Добавить это ребро во множество ребер E .
- 3) Продолжить, пока имеются ребра, обладающие указанными свойствами.

Определение

- **Алгоритм Прима:**
- 1) Выбрать вершину v_0 графа G и ребро с наименьшим весом e_1 , для которого v_0 – одна из вершин, и сформировать дерево T_1 .
- 2) Для заданного дерева T_k с ребрами $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$, если имеется вершина, не принадлежащая T_k , выбрать ребро с наименьшим весом, смежное с ребром дерева T_k и имеющее вершину вне дерева T_k . Добавить в дерево T_k , формируя дерево T_{k+1} .
- 3) Продолжить, пока имеются вершины графа G , не принадлежащие дереву.