ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ

http://sites.google.com/site/musinbsuirby/

Мусин Сергей Борисович,
магистр техн. наук,
ассистент кафедры ПОИТ БГУИР

КОДЫ ХЭММИНГА

Тема

Мусин С. Б.,
БГУИР

Код Хэмминга базируется на простейшем коде с проверкой на четность.

Проверки на четность рассчитываются для каждой позиции кодового слова и являются независимыми друг от друга.

Коды Хэмминга

Пусть имеется кодовое слово длиной n, оно содержит k информационных символов.

Добавим к нему столько проверок, чтобы проверочная часть говорила о позиции ошибки в данном сообщении.

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

Пример: $n = 7$. Чему равны k и r ?

Всего в двоичный вектор длины r можно заключить 2^r комбинаций.

$2^r \geq n+1$ *(+1 – еще одна комбинация для случая, когда ошибки не было)*

$2^r \geq k+r+1$

$2^r - r - 1 \geq k$ *(для определенности $k = 2^r - r - 1$)*

Коды Хэмминга

Мусин С. Б., БГУИР

При различных r мы получаем следующие коды:

k	*1*	*2*	*3*	*4*
r	*1*	*2*	*2*	*3*
n	*2*	*4*	*5*	*7*

Таким образом, для $n = 7$ имеем $(2^r - 1, 2^r - r - 1, 3)$ – код.

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

Проверочные биты располагаются между информационными в позициях с номерами, равными степеням двойки, и кодируют номер бита, в котором произошла ошибка.

Например, если ошибка произошла в 1-м бите, $(p_3p_2p_1) = 001$,

во втором – $(p_3p_2p_1) = 010$,

в четвертом – $(p_3p_2p_1) = 100$.

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

Информационные символы определяем в оставшиеся позиции, в итоге получаем кодовое слово следующего вида:

7	6	5	4	3	2	1
i_4	i_3	i_2	p_3	i_1	p_2	p_1

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

То, какой проверочный бит учитывается у каких номеров позиций, зависит от их двоичного представления:

число	*двоичное предст-е*
1	*001*
2	*010*
3	*011*
4	*100*
5	*101*
6	*110*
7	*111*

номер бита	*позиции, в которых он установлен*
1	*1, 3, 5, 7*
2	*2, 3, 6, 7*
3	*4, 5, 6, 7*

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

На стороне приемника получаем систему независимых проверок:

$(p_1+i_1+i_2+i_4) = s_1$

$(p_2+i_1+i_3+i_4) = s_2$

$(p_3+i_2+i_3+i_4) = s_3$, где s_1, s_2, s_3 – синдромы.

Коды Хэмминга

Синдром равен нулю, если ошибки не было. Приравниваем все синдромы к нулю и переносим влево:

$$p_1=i_1+i_2+i_4$$
$$p_2=i_1+i_3+i_4$$
$$p_3=i_2+i_3+i_4$$

Если ошибка имела место, она должна быть исправлена.

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

Пример: информационное сообщение ***1010*** => $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 0.$

Кодовое слово имеет следующий вид:

i_4	i_3	i_2	p_3	i_1	p_2	p_1
1	0	1	0	0	1	0
7	6	5	4	3	2	1

Вносим ошибку:

i_4	i_3	i_2	p_3	i_1	p_2	p_1
1	0	1	0	1	1	0
7	6	5	4	3	2	1

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

$$s_1 = p_1 - (i_1 + i_2 + i_4) = 1$$
$$s_2 = p_2 - (i_1 + i_3 + i_4) = 1$$
$$s_3 = p_3 - (i_2 + i_3 + i_4) = 0$$

(в двоичной системе счисления и «+», и «-» заменяется на XOR)

$(s_3\ s_2\ s_1) = 011$ => обнаружена ошибка в третьей позиции ($011_2 = 3_{10}$)

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР

В общем случае p_1, p_2, p_3 не обязательно располагать по степеням двойки.

Код Хэмминга эффективен при больших . Он исправляет все однократные и двукратные ошибки.

Вероятность ошибки составляет $2^{-(n-k)}$.

Коды Хэмминга

Мусин С. Б.,
БГУИР