

# ТЕОРИЯ

# КОДИРОВАНИЯ

<http://sites.google.com/site/musinbsuirby/>

Мусин Сергей Борисович,  
магистр техн. наук,  
ассистент кафедры ПОИТ БГУИР

---

**Мусин С. Б.,  
БГУИР**



# КОДЫ ХЭММИНГА

Тема

---

Мусин С. Б.,  
БГУИР

**Код Хэмминга** базируется на простейшем коде с проверкой на четность.

Проверки на четность рассчитываются для каждой позиции кодового слова и являются независимыми друг от друга.

# **Коды Хэмминга**

---

Пусть имеется кодовое слово длиной  $n$ , оно содержит  $k$  информационных символов.

Добавим к нему столько проверок, чтобы проверочная часть говорила о позиции ошибки в данном сообщении.

# Коды Хэмминга

Пример:  $n = 7$ . Чему равны  $k$  и  $r$  ?

Всего в двоичный вектор длины  $r$  можно заключить  $2^r$  комбинаций.

$2^r \geq n+1$  (+1 – еще одна комбинация для случая, когда ошибки не было)

$$2^r \geq k+r+1$$

$$2^r - r - 1 \geq k \text{ (для определенности } k = 2^r - r - 1)$$

# Коды Хэмминга

При различных  $r$  мы получаем следующие коды:

$k$	1	2	3	4
$r$	1	2	2	3
$n$	2	4	5	7

Таким образом, для  $n = 7$  имеем  $(2^r - 1, 2^r - r - 1, 3)$  – код.

# Коды Хэмминга

Проверочные биты располагаются между информационными в позициях с номерами, равными степеням двойки, и кодируют номер бита, в котором произошла ошибка.

Например, если ошибка произошла в 1-м бите,  $(p_3 p_2 p_1) = 001$ ,

во втором –  $(p_3 p_2 p_1) = 010$ ,

в четвертом –  $(p_3 p_2 p_1) = 100$ .

## Коды Хэмминга

Информационные символы определяем в оставшиеся позиции, в итоге получаем кодовое слово следующего вида:

<i>7</i>	<i>6</i>	<i>5</i>	<i>4</i>	<i>3</i>	<i>2</i>	<i>1</i>
$i_4$	$i_3$	$i_2$	$p_3$	$i_1$	$p_2$	$p_1$

# Коды Хэмминга



То, какой проверочный бит учитывается у каких номеров позиций, зависит от их двоичного представления:

<i>число</i>	<i>двоичное предст-е</i>
<i>1</i>	<i>001</i>
<i>2</i>	<i>010</i>
<i>3</i>	<i>011</i>
<i>4</i>	<i>100</i>
<i>5</i>	<i>101</i>
<i>6</i>	<i>110</i>
<i>7</i>	<i>111</i>

<i>номер бита</i>	<i>позиции, в которых он установлен</i>
<i>1</i>	<i>1, 3, 5, 7</i>
<i>2</i>	<i>2, 3, 6, 7</i>
<i>3</i>	<i>4, 5, 6, 7</i>

# Коды Хэмминга

На стороне приемника получаем систему независимых проверок:

$$(p_1 + i_1 + i_2 + i_4) = s_1$$

$$(p_2 + i_1 + i_3 + i_4) = s_2$$

$(p_3 + i_2 + i_3 + i_4) = s_3$ , где  $s_1, s_2, s_3$  — синдромы.

# Коды Хэмминга

Синдром равен нулю, если ошибки не было. Приравниваем все синдромы к нулю и переносим влево:

$$p_1 = i_1 + i_2 + i_4$$

$$p_2 = i_1 + i_3 + i_4$$

$$p_3 = i_2 + i_3 + i_4$$

Если ошибка имела место, она должна быть исправлена.

# Коды Хэмминга

Пример: информационное сообщение  $1010 \Rightarrow p_1=0, p_2=1, p_3=0$ .

Кодовое слово имеет следующий

ВИД:

$i_4$	$i_3$	$i_2$	$p_3$	$i_1$	$p_2$	$p_1$
1	0	1	0	0	1	0
7	6	5	4	3	2	1

Вносим ошибку:

$i_4$	$i_3$	$i_2$	$p_3$	$i_1$	$p_2$	$p_1$
1	0	1	0	1	1	0
7	6	5	4	3	2	1

# Коды Хэмминга

$$s_1 = p_1 - (i_1 + i_2 + i_4) = 1$$

$$s_2 = p_2 - (i_1 + i_3 + i_4) = 1$$

$$s_3 = p_3 - (i_2 + i_3 + i_4) = 0$$

(в двоичной системе счисления и «+», и «-» заменяется на XOR)

$(s_3 s_2 s_1) = 011 \Rightarrow$  обнаружена  
ошибка в третьей позиции ( $011_2 = 3_{10}$ )

# Коды Хэмминга

В общем случае  $p_1, p_2, p_3$  не обязательно располагать по степеням двойки.

Код Хэмминга эффективен при больших  $n$ . Он исправляет все однократные и двукратные ошибки.

Вероятность ошибки составляет  $2^{-(n-k)}$ .

# Коды Хэмминга