Теория множеств

Множество - *это совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое*

Способы задания множеств:

1. Перечислением: например, $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – множество цифр
2. Заданием общего свойства всех элементов множества. Например, множество всех букв латинского алфавита можно определить так:

$B = \{x \mid x$ – буква латинского алфавита$\}$

Численность множества М (или **мощность множества** М) – количество элементов, составляющих множество М, обозначается I M I

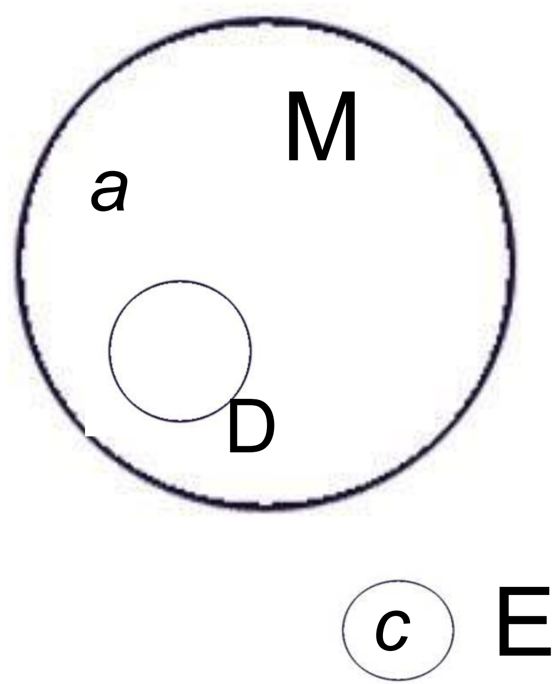
1. L – множество букв, из которых состоит слово «анаконда». Какова численность элементов множества L?
2. H – множество букв, из которых состоит слово «канон». Сравните численности множеств L и H.

Элемент a **принадлежит** множеству М.

Обозначения: $a \in$ М, $c \in$ Е

Элемент c **не принадлежит** множеству М

$c \notin$ М.



Множество D **содержится** в множестве М. Обозначается D $\subset$ М

Множество Е **не содержится** в множестве М. Обозначается Е $\not\subset$ М

- **Пустое множество** – это множество, не содержащее ни одного элемента, обычно обозначается символом $\varnothing$. $|\varnothing| = 0$
- **Единичное множество** – это множество, содержащее только один элемент. $|M| = 1$

Конечное множество содержит конечное число элементов,

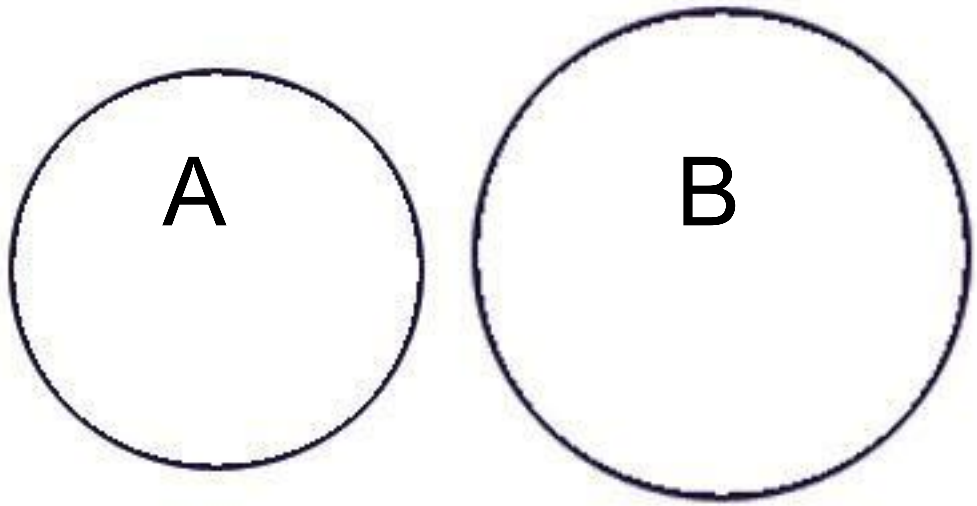
Бесконечное множество содержит бесконечное число элементов.

Чёткое множество включает только такие элементы, принадлежность которых к данному множеству не вызывает сомнений.

Нечёткое множество включает элементы, которые могут быть отнесены к этому множеству только с определённой степенью вероятности.

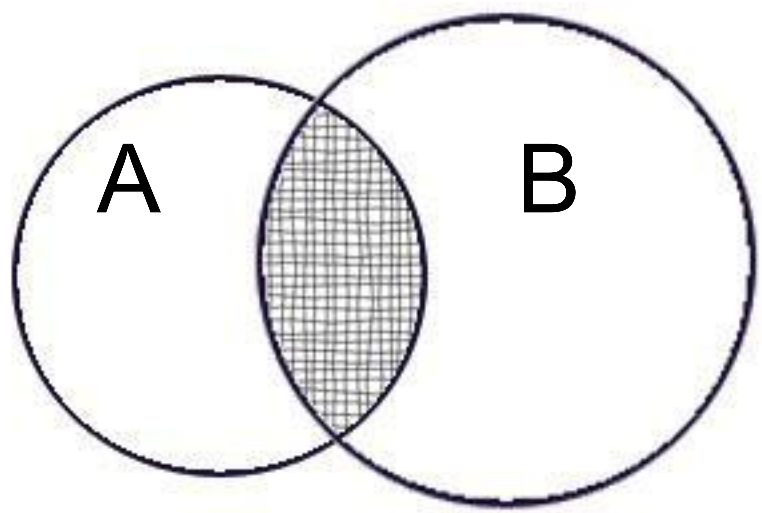
Соотношения между множествами

1. Множества А и В не имеют общих элементов (не пересекаются).



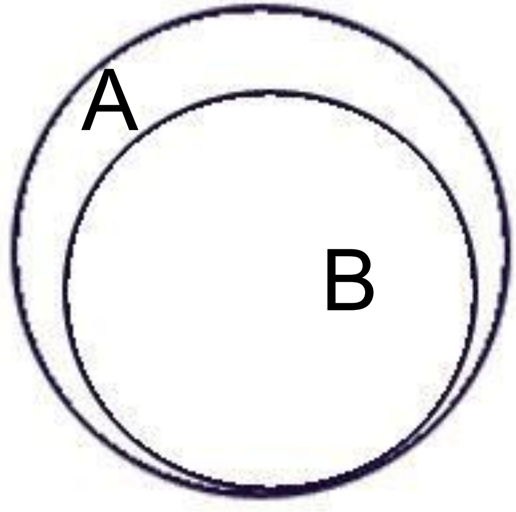
Леонард Эйлер (1707-1783), Джон Венн (1834-1923).

2. Множества А и В имеют общие элементы (заштрихованная часть).

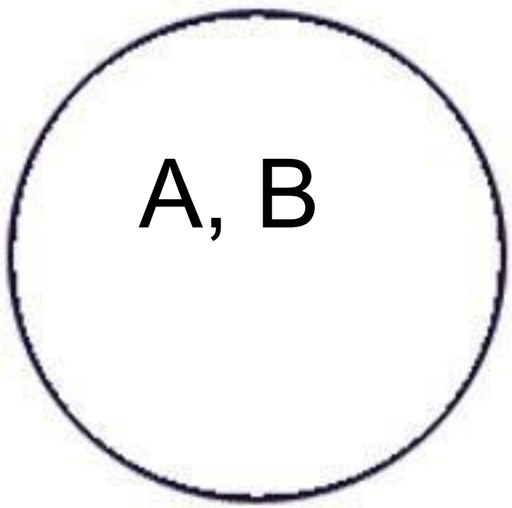


3. Множество B (**строго**) **содержится** в множестве A (или «множество B (**строго**) **включено** в множество A», или «множество B **является** (**строгим**) **подмножеством** множества A).

Обозначение: $B \subset A$



4. Множества А и В равны.
Обозначение: А=В



Запись $A \subseteq B$ означает, что возможно $A \subset B$ и возможно $A=B$

В этом случае говорят, что множество A **нестрого включено** в множество B

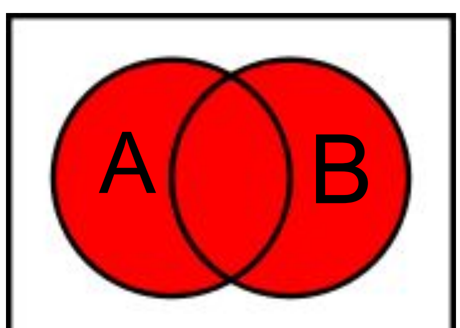
(или «A - **нестрогое подмножество** множества B», «A **нестрого содержится** в B»)

Множество B называют **собственным подмножеством** множества A, если $B \subseteq A$, причём B не является пустым множеством и B не совпадает с A.

Операции над множествами

Объединение (или **сумма**) множеств А и В – это множество **С=А∪В**, такое, что:

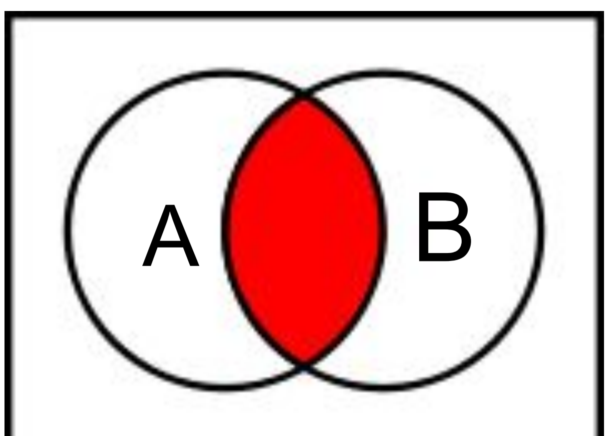
1) каждый элемент множества А содержится в С,
2) каждый элемент множества В содержится в С,
3) никаких других элементов в С нет.



Пересечение множеств А и В – это множество **С=А∩В**, такое, что:

1) если элемент х содержится как в А, так и в В, то х содержится в С,

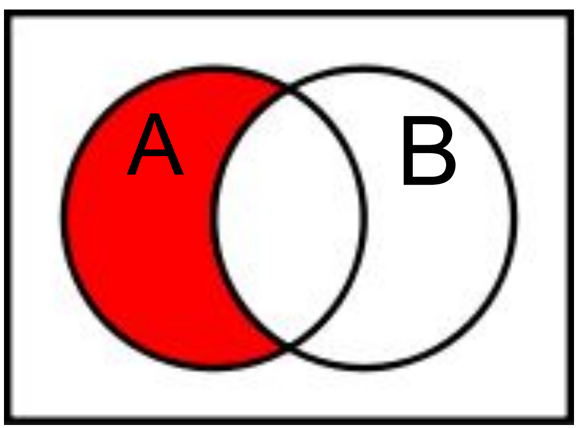
2) никаких других элементов в С нет.

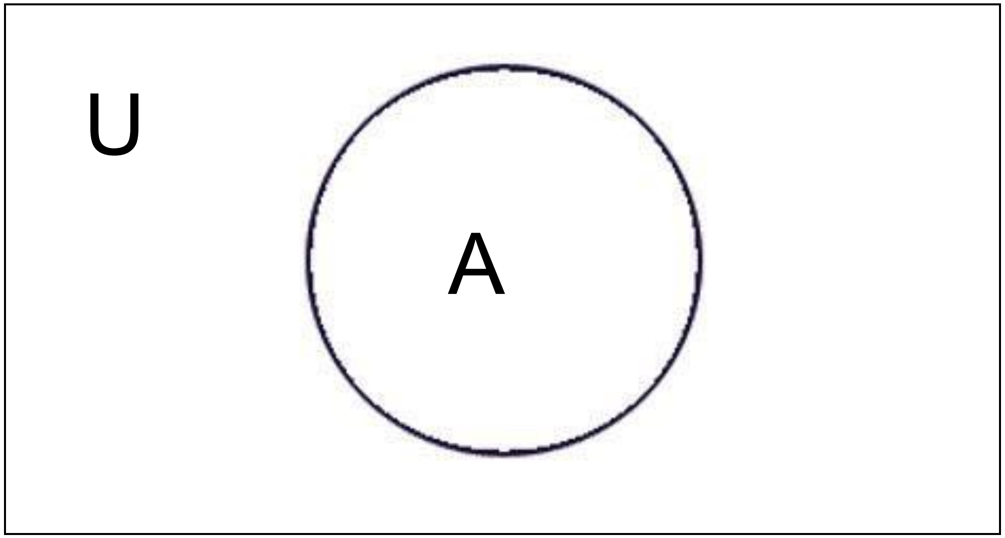


Разность множеств А и В – это множество **C=A\ B**, такое, что:

1) если элемент x содержится в A, но не содержится в B, то x содержится в C,

2) никаких других элементов в C нет.





Если B $\subset$ A, то разность A\ B называется **дополнением** множества B до множества A.

Универсальное множество – это множество, относительно которого все рассматриваемые множества являются подмножествами. Обозначается U.

Дополнение множества A до универсального множества обозначается $\overline{A}$

Итак, возможны соотношения:

А и В не имеют общих элементов	$A \cap B = \varnothing$
А и В пересекаются	$A \cap B \neq \varnothing$
А – подмножество множества В	$A \subseteq B$
А – собственное подмножество множества В	$A \subset B$, $A \neq \varnothing$
А равно В	$A = B$
С есть результат вычитания множества А из множества В	$C = B \setminus A$
А является дополнением множества В до универсального множества	$A = U \setminus B$
С является объединением множеств А и В	$C = A \cup B$
А не является подмножеством множества В	$A \not\subset B$
А является элементом множества М	$a \in M$
А не является элементом множества М	$a \notin M$

Мощность множества – количество его элементов. $|A|$ - мощность множества A

Всегда ли выполняется соотношение

$$|A \cup B| = |A| + |B| \ ?$$

Всегда ли выполняется соотношение?

$$|A \setminus B| = |A| - |B| \ ?$$

В общем случае выполняются такие соотношения:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \setminus B| = |A| - |B| + |B \setminus A|$$

Из каких элементов состоят множества А и В?

- $A=\{x \mid x$ – животное$\}\cap\{x \mid x$ - хищник$\}$
- $A=\{x \mid x$ – животное$\}\cup\{x \mid x$ - хищник$\}$

1. A – множество всех белок, бегающих по городку в данный момент времени; B – множество млекопитающих, населяющих Землю в данный момент времени

Каковы элементы множеств $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \setminus B$?

2. A – множество людей, присутствующих сейчас в данной аудитории, B – множество студентов Оксфордского университета.

Каковы элементы множества $A \setminus B$?

3. A – множество книг, B – множество словарных изданий, C – множество электронных книг.

Каковы элементы множества D, если оно определено так: $D=(A \cup B) \setminus C$?

Некоторые свойства объединения и пересечения множеств

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$A \cup B = B \cup A$ (коммутативность операции объединения)

$A \cap B = B \cap A$ (коммутативность операции пересечения)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность операции объединения)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность операции пересечения)

Вспомните какие-либо произведения (проза, стихи, кинофильмы и т.д.), название которых именует некоторое множество или операцию над множествами.

Какие из этих множеств упорядоченные, какие неупорядоченные

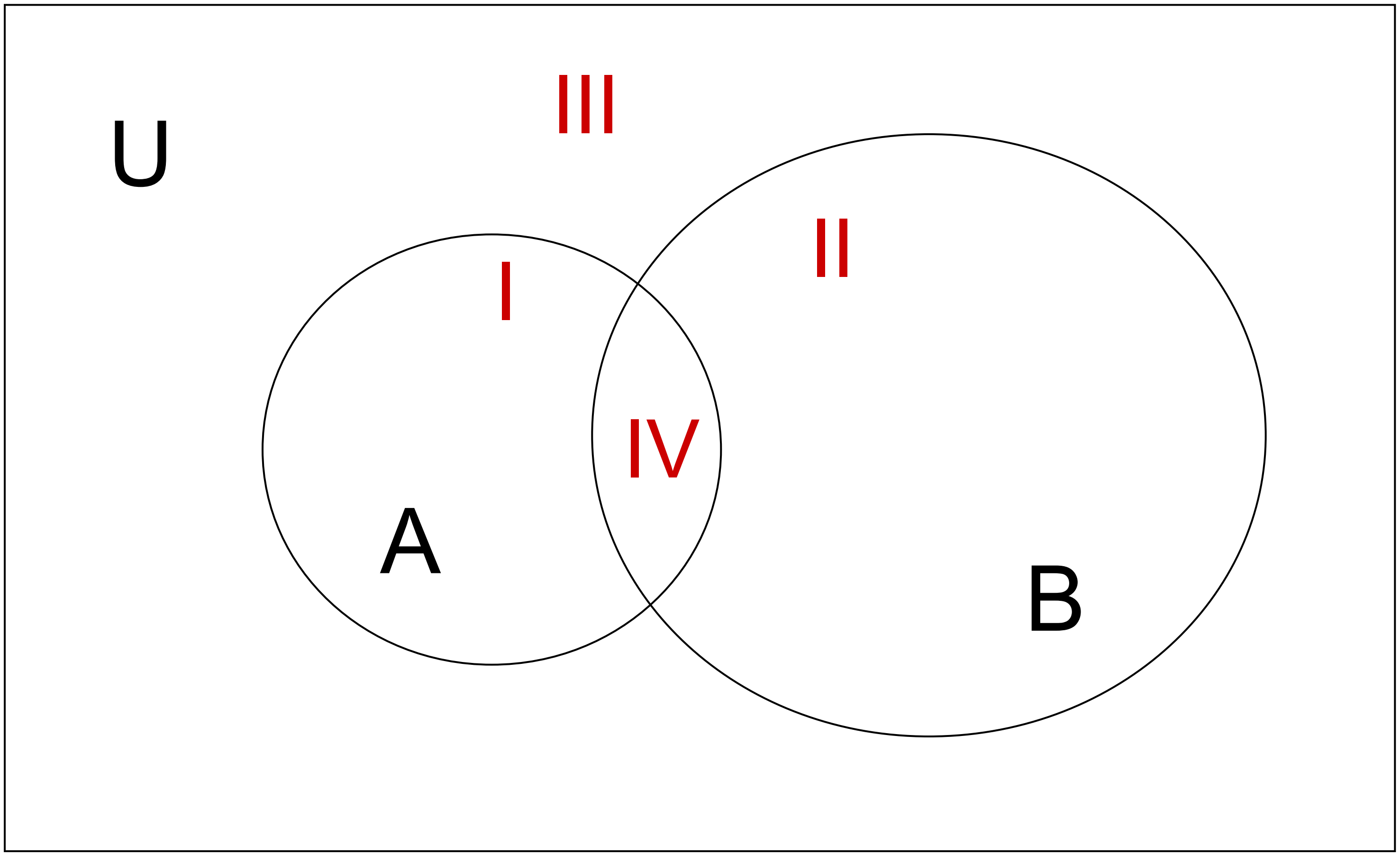
Например, «Трое в лодке, не считая собаки»: А – люди, В – собаки, С – находящиеся в лодке, $|A|=3$, $|B|=1$. Можно ли эту ситуацию описать так: $(A \cup B) \cap C$ – люди и собаки в лодке?
Множества А, В, С неупорядоченные.

Классификация – представление некоторого множества в виде объединения непустых попарно не пересекающихся подмножеств.

Пусть U – множество всех студентов нашего университета,
α – свойство «быть студентом 2-го курса»,
β – свойство «быть спортсменом»,
A – множество всех студентов 2-го курса,
B – множество всех спортсменов

Каковы элементы множеств $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

Какую классификацию множества U задают свойства α, β ?


III
U
II
I
IV
A
B

Группа, состоящая из 20 человек, отправилась в туристическую поездку. Из них 14 человек знают английский язык, 5 – итальянский, только один человек знает оба языка.

Сколько человек не знает ни английского, ни итальянского? Какие операции над множествами вы использовали для ответа на вопрос?

Можно ли, воспользовавшись понятием «множество», точно определить, что такое «анаграмма»?

Примеры анаграмм:

вертикаль — кильватер
апельсин — спаниель
старорежимность — нерасторжимость
австралопитек — ватерполистка
покраснение — пенсионерка
равновесие — своенравие
стационар — соратница
обезьянство - светобоязнь
антиквар - травинка
истопник - синоптик

Как записать следующие соотношения?

- Объект *d* не является элементом множества, являющегося пересечением множеств A и B.

- Дополнение множества A до универсального множества U является собственным подмножеством объединения B и C.

Какие из следующих соотношений верны?

1) $c \in \{a, в, c\}$
2) $d \notin \{a, в, c\}$
3) $\{a, в, c\} \subset \{a, в, c\}$
4) $\{a, в, c\} \subseteq \{a, в, c\}$
5) $\{a, в\} \subseteq \{a, в, c\}$
6) $c \in \{в, \{c\}\}$
7) $\{c\} \in \{в, \{c\}\}$