ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

2 СЕМЕСТР

Лекция 1. Последовательность.
Предел последовательности.

Лекция 2. Функция. Предел функции.

Лекция 3. Непрерывность функций.
Точки разрыва, их классификация.

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

- Интуитивное понятие о предельном переходе использовалось еще в Древней Греции при вычислении площадей и объемов (Архимед)
- При создании дифференциального и интегрального исчислений математики XVII в (Исаак Ньютон, Готфрид Вильгельм Лейбниц) тоже неявно использовали понятие предельного перехода
- Определение понятия предела – работа Джона Валлиса «Арифметика бесконечных величин» (1655 г.)
- В XIX в теория пределов использована для строгого обоснования математического анализа (Огюстен Луи Коши)
- Дальнейшая разработка теории пределов – Карл Вейерштрасс, Бернард Больцано и др.

Джон **Валлис** (John Wallis)

Точнее - Джон Уоллес (1616-1703) английский математик, предшественник математического анализа. Сын священника из Эшфорда.

Уже в молодости вызывал восхищение как феноменальный счётчик: как-то в уме извлёк квадратный корень из 53-значного числа

По окончании Кембриджского университета стал священником англиканской церкви и получил степень магистра. После женитьбы (1645) вынужден был покинуть университет, так как от профессоров в те годы требовался обет безбрачия.

ЛЕКЦИЯ 1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие числовой последовательности.

Способы задания последовательности

Ограниченные последовательности

Монотонные последовательности

Предел последовательности

Теоремы о пределах последовательностей

Необходимое и достаточное условие сходимости последовательностей

Примеры

Числовая последовательность

- \- это множество чисел, занумерованных либо конечным отрезком натурального ряда (конечная последовательность), либо всеми натуральными числами (бесконечная последовательность)
- Элементы этого множества называются **членами** последовательности и обозначаются a_n, где n - его номер
- Сама последовательность записывается как

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots. \text{ или } \{a_n\}$$

ПРИМЕРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots.$
- 2,4,8,16…….
- 0,1,0,1…..
- 5,5,5,5……

ИНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Отображение множества натуральных чисел **N** на некоторое конечное или счетное числовое множество **A**, при котором каждому натуральному числу n соответствует один и только один элемент множества **A** - $\mathbf{a_n}$.
- Функция $\mathbf{a_n = f(n)}$**,** заданная на множестве натуральных чисел **N**

ДЕЙСТВИЯ НАД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

- Сумма двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ это последовательность $\{s_n\}$, членами которой являются суммы членов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одинаковые номера

$$s_n = x_n + y_n$$

- Произведение, разность и частное двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ это последовательность $\{m_n\}$, $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ члены которых вычисляются по правилам:

$$m_n = x_n - y_n, \; q_n = x_n \cdot y_n, r_n = \frac{x_n}{y_n}$$

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- – задание **формулы общего члена последовательности,** позволяющую по номеру члена последовательности однозначно его вычислить

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Например,

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = 2^n, \; c_n = (-1)^n, \quad d_n = 3$$

Задают соответственно последовательности

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots .$
- 2,4,8,16…….
- -1,1,-1,1…..
- 3,3,3,3……

РЕКУРРЕНТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Задается первый член (или несколько первых членов) последовательности и указывается формула вычисления последующих членов последовательности по заданным первым
- Например, последовательность натуральных чисел

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 1$$

- Последовательность чисел Фибоначчи

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 1, \qquad b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$$

0,1,1,2,3,5,8,13…..

ОПИСАТЕЛЬНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Описание способа получения членов последовательности
- Например, последовательность

  3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ….

  Образована из приближенных значений числа π
- Используется когда нельзя указать ни формулы общего члена, ни рекуррентного соотношения

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существуют два такие числа m и M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство
$$m \leq x_n \leq M$$
- Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если существуют такое число M, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство
$$x_n \leq M$$
- Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если существуют такое число m, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство
$$m \leq x_n$$

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Доказательство ограниченности сводится к нахождению этих чисел, например:
- $x_n = \mathrm{n}$ ограничена снизу (m=0) и не ограничена сверху
- $x_n = -2 \cdot \mathrm{n}$ ограничена сверху (m=-1) и не ограничена снизу
- $x_n = \frac{1}{n}$ ограничена снизу (m=0) и ограничена сверху (M=1), следовательно, это ограниченная последовательность
- $x_n = (-1)^n$ ограничена снизу (m=-2) и ограничена сверху (M=2) следовательно, это тоже ограниченная последовательность

Монотонные последовательности

- Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей**, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е для всех $n \in N$ выполняется неравенство
$$x_{n+1} > x_n$$
- Последовательность $\{x_n\}$ называется **убывающей**, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е для всех $n \in N$ выполняется неравенство
$$x_{n+1} < x_n$$
- $\{x_n\}$ называется **неубывающей**, если $x_{n+1} \geq x_n$
- $\{x_n\}$ называется **невозрастающей**, если $x_{n+1} \leq x_n$

МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности образуют класс **монотонных** последовательностей
- Возрастающие и убывающие последовательности называют **строго монотонными**
- Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу с, то ее называют **постоянной.**

ПРИМЕР 1

- Исследовать на монотонность последовательность
$$x_n = \frac{3n+1}{2n-1}$$
- Рассмотрим разницу между x_{n+1} и x_n членами
$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(n+1)+1}{2(n+1)-1} - \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3n+4}{2n+1} - \frac{3n+1}{2n-1} =$$
$$\frac{(3n+4)(2n-1)-(3n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-5}{(2n+1)(2n-1)}$$
- Числитель дроби отрицателен, знаменатель положителен, следовательно вся дробь отрицательна, поэтому
$$x_{n+1} - x_n < 0 \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$$
- Т.е. данная последовательность убывающая и следовательно строго монотонная

ВОПРОСЫ.

- Является ли постоянная последовательность монотонной? А строго монотонной?
- Приведите примеры возрастающей и убывающей последовательности
- Приведите примеры ограниченной и не ограниченной последовательности

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Число а называют **пределом** последовательности $\{x_n\}$ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

- если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует такой номер N_0, что все члены последовательности с номерам $n>N_0$ удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

- Если такое число существует, последовательность называется **сходящейся**, если нет - **расходящейся**

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Промежуток (a-ε;a+ ε) называют **ε-окрестностью** точки a.
- Используя понятие ε-окрестности можно дать следующее определение предела:
- Число a называется **пределом** последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N_0 такой, что все члены последовательности с номерам $n>N_0$ принадлежат ε-окрестности точки a

ПРИМЕР 2

- Например, рассмотрим последовательность

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

- Данная последовательность ограничена (снизу числом 0, сверху число 1)
- Если изображать члены последовательности точками на числовой прямой, то можно убедиться, что с ростом номеров точки будут приближаться к 1

1; ½; 2/3; ¾; ....9/10;   ....99/100;...

ПРИМЕР 2

- Более того, для всех x_n, где n>11 , $|x_n - 1| < 0{,}1$;

  где n>101 , $|x_n - 1| < 0{,}01$ и т.д.
- То есть, какое бы малое положительное ε мы ни выбрали, в данной последовательности найдется такой член (номер которого мы будем обозначать N_0), что все члены последовательности с номерам $n>N_0$ будут принадлежат ε-окрестности точки a=1
- Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1$
- Нужно отметить, что для каждого ε будет свой N_0, и при уменьшении ε N_0 будет увеличиваться

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- 1) Теорема об единственности предела: Последовательность не может сходится к двум различным пределам
- 2) Предел последовательности, все члены которой равны одной и той же величине, равен этой величине.
- 3) Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к a и $a>p$ ($a<q$), то все члены последовательности, начиная с некоторого, тоже будут меньше p (больше q)
- 4) Если последовательность имеет предел, то она ограничена

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- 5) Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, то их сумма (разность) тоже имеет предел, причем придел суммы (разности) равен сумме (разности) пределов

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

- 6) Если последовательности имеют пределы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то их произведение тоже имеет предел, причем придел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

- Из теорем 2 и 6 следует, что постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$$

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- 7) Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, причем $y_n \neq 0$ для всех n, начиная с некоторого N_0, то последовательность $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ тоже имеет предел, равный отношению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

- При помощи сформулированных теорем нахождение пределов последовательностей можно свести к нахождению приделов простейших последовательностей

ПРИМЕР 3

Вычислить предел последовательности

$$x_n = \frac{2n^2}{n^2 + n + 1}$$

Сразу использовать теорему о пределе частного нельзя, т.к. последовательности, стоящие в числителе и в знаменателе не имеют конечных пределов. Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на n^2

$$\frac{2n^2}{n^2 + n + 1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

ПРИМЕР 3 (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}$$

Определяем значения полученных простейших пределов

$\lim\limits_{n\to\infty}2=2$; $\lim\limits_{n\to\infty}1=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n+1}=\frac{2}{1+0+0}=2$$

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной
- Т.е. любая сходящаяся последовательность ограничена
- Однако обратное утверждение не верно, из ограниченности последовательности не всегда следует ее сходимость, т.е. это условие не является достаточным

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
- Тогда для любого ε>0 все члены последовательности, кроме конечного их числа попадают в ε-окрестность точки a

$$a - \varepsilon \le x_n \le a + \varepsilon$$

- Так как членов последовательности, лежащих правее точки $a + \varepsilon$ конечно число, то перебрав их можно выбрать максимальный член, обозначим его M
- Аналогично, минимальный из членов последовательности, лежащих левее $a - \varepsilon$ обозначим m
- Таким образом, если $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность, то существуют числа m и M, такие, что для всех всех $n \in N$ выполняется неравенство

$$m \le x_n \le M$$

- Следовательно $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность

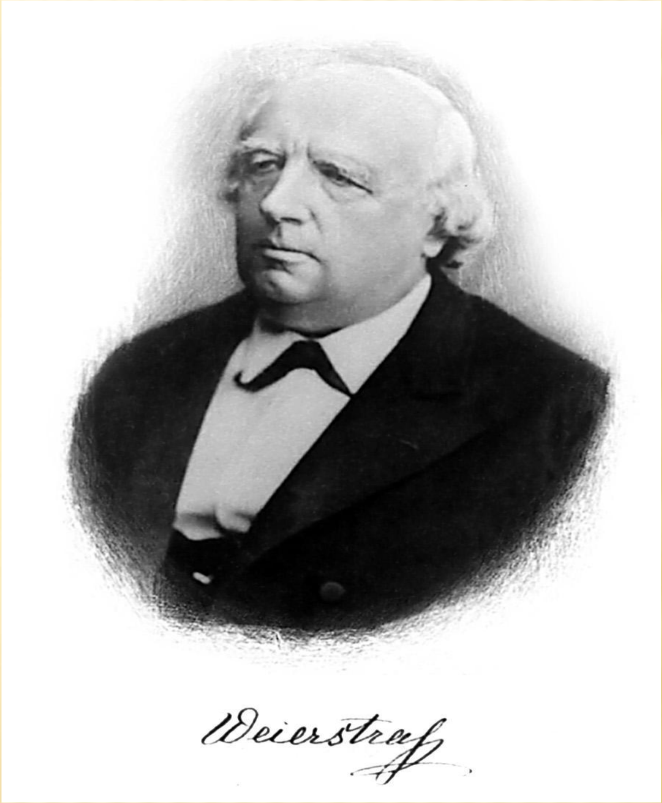
НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. Это ограниченная последовательность.
- Предположим, что предел этой последовательности существует и равен а.
- Если а – некоторое число отличное от 1 и -1, то всегда можно будет найти такую ε-окрестность точки а, в которую не попадет ни один член последовательности.
- Следовательно а=1 или а=-1. Допустим, а=1.
- Возьмем ε=0,1. В промежуток (0,9;1,1) попадают все члены последовательности, стоящие на четных местах (1), но не попадает ни один член последовательности, стоящий на нечетном месте (-1), следовательно 1 не является пределом данной последовательности
- Аналогично доказывается, что и -1 не является пределом
- Следовательно, несмотря на то, что последовательность $\{x_n\}$ ограниченная, она не является сходящейся

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема Вейерштрасса:

Если последовательность монотонна и ограничена, то она обязательно сходится



Карл Те́одор Вильге́льм **Ве́йерштрасс**

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Исследуем сходимость последовательности $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$
- Докажем, что она монотонна. Раскладывая выражение по формуле бинома Ньютона, получаем

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n =$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Если написать аналогичное разложение для x_{n+1}, то увидим, что к разложению x_n добавится (n+2)-ое положительное слагаемое, каждое же из прежних слагаемых увеличится,
- Отсюда следует, что $x_{n+1} > x_n$, т.е. данная последовательность возрастающая и, следовательно, монотонная.
- Докажем, что она ограниченная.
- Опустив в выражении для x_n все сомножители, стоящие в круглых скобках, мы тем самым увеличим правую часть равенства, т.к. каждый из этих сомножителей меньше 1. В результате получим неравенство

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Учитывая, что $2^{n-1} \le n!$, т.е. $2^1 \le 2!$, $2^2 \le 3!$, $2^3 \le 4!$… Для нашего неравенства имеем:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}$$

- В правой части последнего неравенства сумма всех членов, начиная со второго есть сумма n-1 членов убывающей геометрической прогрессии, которая равна 1, поэтому при любом натуральном n

$$x_n < 3$$

- Таким образом, последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ монотонно возрастающая и ограниченная, и согласно теореме Вейерштрасса, имеет предел.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- Этот предел имеет специальное обозначение e

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2{,}718281828459045....$$

- Число **e** называют **неперовым** числом или числом Эйлера. Оно является одной из важнейших в математическом анализе констант
- Число **e** принято за основание натуральных логарифмов: логарифм по основанию e называется **натуральным** логарифмом и обозначается ln x, т. е. $\ln x = \log_e x$
- Показательная функция с основанием **e** называется

Число Эйлера (Неперово число) $e \approx 2{,}72$

- Названо в честь шотландского учёного Джона Непера (1550—1617), автора работы «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614 год), одного из изобретателей логарифмов,

ЧИСЛО ЭЙЛЕРА (НЕПЕРОВО ЧИСЛО) $e \approx 2{,}72$

- Саму константу впервые вычислил швейцарский математик Якоб Бернулли(1655-1705) в ходе решения задачи о предельной величине процентного дохода (1690 г).

Число Эйлера (Неперово число) $e \approx 2,72$

- Букву *e* начал использовать швейцарский, немецкий и российский математик и механик, Леонард Эйлер в 1727 году.

- Почему была выбрана именно буква *e*? Возможно, это связано с тем, что с неё начинается слово *exponential* («показательный», «экспоненциальный»). Другое предположение заключается в том, что буквы a, b, c и d уже довольно широко использовались в иных целях, и e была первой «свободной» буквой. Также примечательно, что буква e является первой в фамилии Эйлер (Euler).

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема Больцано-Коши (критерий сходимости)

Для того, чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа ε существовал такой номер $N_0(\varepsilon)$, чтобы неравенство $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ выполнялось для всех $n > N_0$ и $p \geq 1$

Французский математик и механик Огюсте́н Луи́ Коши́

Чешский математик и философ Бернард Больцано