«Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королева»

Теория вероятностей и математическая статистика

(дневное обучение)

Лекция №5

2014

Тема лекции:

Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, начальный момент, центральный момент, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана, квантиль

Числовые характеристики случайной величины.

Числовые характеристики случайной величины.

Закон распределения случайной величины является исчерпывающей характеристикой, которая полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако во многих практических задачах нет надобности в таком полном описании и достаточно указать только отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты распределения. Такие числа называются ***числовыми характеристиками случайной величины***.

Математическое ожидание.

Математическое ожидание.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины и определяется по формулам:

$$m_X = \mathrm{M}[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i & \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx & \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases}$$

где m_X обозначает число, полученное после вычислений

Математическое ожидание.

M[X] – оператор математического ожидания.

В качестве математического ожидания используется «среднее взвешенное значение», причем каждое из значений случайной величины учитывается с «весом», пропорциональным вероятности этого значения.

Физический смысл математического ожидания – среднее значение случайной величины, т.е. то значение, которое может быть использовано вместо случайной величины в приблизительных расчетах или оценках.

Свойства математического ожидания.

1. $\mathrm{M}[c] = c$.

Доказательство. Рассмотрим константу c как случайную дискретную величину, которая принимает одно значение c с вероятностью $p = 1$.

Свойства математического ожидания.

2. $\mathrm{M}[X+c] = \mathrm{M}[X] + c = m_X + c$.

Доказательство: $\mathrm{M}[X+c] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x+c)\cdot f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} c\cdot f(x)dx = m_X + c$.

Свойства математического ожидания.

3. $M[c \cdot X] = c \cdot M[X] = c \cdot m_X$.

Доказательство: $M[cX] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} cx \cdot f(x)dx = c\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = c \cdot m_X$.

Начальный момент.

Начальный момент.

Начальный момент k-го порядка случайной величины X есть математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k(x) = \mathrm{M}[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i^k \cdot p_i & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx & \text{для НСВ.} \end{cases}$$

При $k = 0$ $\alpha_0(x) = M[X^0] = M[1] = 1$;

$k = 1$ $\alpha_1(x) = M[X^1] = M[X] = m_X$ – математическое ожидание;

$k = 2$ $\alpha_2(x) = M[X^2]$.

Центральный момент.

Центрированная случайная величина.

Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$ называется случайная величина, математическое ожидание которой находится в начале координат (в центре числовой оси), т.е. $M[\overset{\circ}{X}] = 0$.

Операция центрирования (переход от нецентрированной величины X к центрированной $\overset{\circ}{X}$) имеет вид

$$\overset{\circ}{X} = X - m_X .$$

Центральный момент.

Центральный момент порядка k случайной величины X есть математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$:

$$\mu_k(x) = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}{}^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_X)^k \cdot p_i \quad \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k \cdot f(x)dx \quad \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases}$$

При $k = 0$ $\mu_0(x) = M[\overset{\circ}{X}{}^0] = M[1] = 1$;

$k = 1$ $\mu_1(x) = M[\overset{\circ}{X}{}^1] = M[\overset{\circ}{X}] = 0$;

$k = 2$ $\mu_2(x) = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = M[(X - m_X)^2] = M[X^2] - 2m_X M[X] + m_X^2 = \alpha_2 - m_x^2 = D_X$ – дисперсия.

Дисперсия.

Дисперсия.

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формулам:

$$D_x = D[X] = \mu_2(x) = \alpha_2(\mathrm{x}) - m_X^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(x_i - m_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} p_i - m_X^2 \text{ для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_X)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2 \text{ для НСВ.} \end{cases}$$

Свойства дисперсии.

Свойства дисперсии:

1. $D[c] = 0$.

Доказательство: $D[c] = M\left[(c - M[c])^2\right] = M\left[(c-c)^2\right] = M[0] = 0$.

Свойства дисперсии.

Свойства дисперсии:

2. $D[X+c]=D_X$.

Доказательство:

$$D[X+c]=M\left[(X+c-M[X+c])^2\right]=M\left[(X+c-m_X-c)^2\right]=M[(X-m_X)^2]=D_X$$

вытекает из свойства 3 математического ожидания. Оно становится понятным, если учесть, что величины X и $X+c$ отличаются лишь началом отсчета и рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково. Очевидно, что операция центрирования не изменяет дисперсию случайной величины:

$$D[\overset{\circ}{X}]=D[X-m_X]=D[X].$$

Свойства дисперсии.

Свойства дисперсии:

3. $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D_X$.

Доказательство: $D[cX] = M[c^2X^2] - (M[cX])^2 = c^2(M[X^2] - m_X^2) = c^2 D_X$.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины, поэтому для анализа диапазона значений величины X дисперсия не совсем удобна. Этого недостатка лишено среднее квадратическое отклонение (СКО), размерность которого совпадает с размерностью случайной величины.

Среднее квадратическое отклонение.

Среднее квадратическое отклонение.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X характеризует ширину диапазона значений X и равно:

$$\sigma_X = \sigma[X] = +\sqrt{D[X]}.$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и случайная величина.

Среднее квадратическое отклонение.

Правило 3σ. Практически все значения случайной величины находятся в интервале

$$[\, m_X - 3\sigma_X;\, m_X + 3\sigma_X;\,].$$

Мода.

Мода.

Мода случайной величины равна ее наиболее вероятному значению, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной случайной величины) или $f(x)$ (для непрерывных случайной величины) достигает максимума:

$$f(Mo) = max, \quad p(X = Mo) = max.$$

Мода.

Распределение с одним максимумом плотности распределения называется «унимодальным». Если многоугольник распределения или кривая распределения имеют более одного максимума, распределение называют «полимодальным». Если распределение обладает посередине не максимумом, а минимумом, то оно называется «антимодальным».

Медиана.

Медиана.

Медиана случайной величины X равна такому ее значению, для которого выполняется условие $p\{X < Me\} = p\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин. Значение Me может быть определено как решение одного из следующих уравнений:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0{,}5\,;\ \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = 0{,}5\,;\ F(Me) = 0{,}5\,.$$

Медиана.

В точке *Me* площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

Квантиль.

Квантиль.

Квантиль χ_p случайной величины X – это такое ее значение, для которого выполняется условие

$$p\{X < \chi_p\} = F(\chi_p) = p.$$

Очевидно, что медиана – это квантиль $\chi_{0,5}$.