



**«Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева»**

**Теория вероятностей и
математическая статистика**
(дневное обучение)
Лекция №15

2014

Тема лекции:

**Проверка статистических гипотез.
Критерии согласия.**

Проверка статистических гипотез.

Проверка статистических гипотез.

Статистической гипотезой называется всякое непротиворечивое множество утверждений $\{H_0, H_1, \dots, H_{k-1}\}$ относительно свойств распределения случайной величины. Любое из утверждений H_i называется альтернативой гипотезы.

Простейшей гипотезой является двухальтернативная: $\{H_0, H_1\}$. В этом случае альтернативу H_0 называют нулевой гипотезой, а H_1 -конкурирующей гипотезой.

Проверка статистических гипотез.

Критерием называется случайная величина $U = \phi(x_1, \dots, x_n)$, где x_i – значения выборки, которая позволяет принять или отклонить нулевую гипотезу H_0 .

Значения критерия, при которых гипотеза H_0 отвергается, образуют *критическую область проверяемой гипотезы*, а значения критерия, при которых гипотезу принимают, *область принятия гипотезы (область допустимых значений)*.

Критические точки отделяют *критическую область от области принятия гипотезы*.

**Ошибка первого и
второго рода.**

Ошибка первого и второго рода.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отклонена гипотеза H_0 , если она верна ("пропуск цели").

Вероятность совершить ошибку первого рода обозначается α и называется *уровнем значимости*.

Наиболее часто на практике принимают, что $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$.

Ошибка первого и второго рода.

Ошибка второго рода заключается в том, что гипотеза H_0 принимается, если она неверна ("ложное срабатывание").

Вероятность ошибки этого рода обозначается β .
Вероятность не допустить ошибку второго рода ($1-\beta$) называют *мощностью критерия*.

Проверка гипотезы о равенстве вероятностей

Проверка гипотезы о равенстве вероятностей

Пусть произведено две серии опытов, состоящих соответственно из n_1 и n_2 опытов. В каждом из них регистрировалось появление одного и того же события A .

В первой серии событие A появилось в k_1 опытах, во второй – в k_2 опытах, причем частота события A в первой серии получилась больше, чем во второй:

$$p_1^* = \frac{k_1}{n_1} > p_2^* = \frac{k_2}{n_2}.$$

Проверка гипотезы о равенстве вероятностей

Разность между двумя частота получилась равной

$$U = p_1^* - p_2^* .$$

Спрашивается, значимо или не значимо это расхождение? Указывает ли оно на то, что в первой серии опытов событие A действительно вероятнее, чем во второй, или расхождение между частотами надо считать случайным?

Двухальтернативная гипотеза

Выдвинем двухальтернативную гипотезу $\{H_0, H_1\}$.

H_0 – различия в вероятностях не существует, т.е. обе серии опытов произведены в одинаковых условиях, а расхождение U объясняется случайными причинами,

H_1 – различие в вероятностях существует, т.е. обе серии опытов произведены не в одинаковых условиях.

Двухальтернативная гипотеза

В данном случае нуль-гипотеза H_0 состоит в том, что обе серии опытов однородны и что вероятность p появления события A в них одна и та же, приблизительно равная частоте, которая получится, если обе серии смешать в одну:

$$p \approx p^* = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}.$$

Двухальтернативная гипотеза

При достаточно больших n_1 и n_2 каждая из случайных величин p_1^* и p_2^* распределена практически нормально, с одним и тем же математическим ожиданием $m = p \approx p^*$.

Двухальтернативная гипотеза

Что касается дисперсий D_1 и D_2 в *первой* и во *второй* сериях, то они различны и равны соответственно

$$D_1 \approx \frac{p_1^*(1 - p_1^*)}{n_1}, \quad D_2 \approx \frac{p_2^*(1 - p_2^*)}{n_2}.$$

Двухальтернативная гипотеза

В качестве критерия будем использовать случайную величину $U = \mathbf{p}_1^* - \mathbf{p}_2^*$, которая также имеет приближенно нормальное распределение с математическим ожиданием $\mathbf{m}_U = 0$ и дисперсией

$$D_U = D_1 + D_2 \approx \frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}$$

откуда $\sigma_U = \sqrt{D_U} \approx \sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}$.

Двухальтернативная гипотеза

Определим критическую точку U_α для заданного уровня значимости α из уравнения:

$$\alpha = P(U \geq U_\alpha) = 0.5 - \Phi\left(\frac{U_\alpha}{\sigma_U}\right) \text{ т.е. } U_\alpha = \sigma_U \cdot \arg \Phi(0.5 - \alpha)$$

Если значение, вычисленное по формуле разности двух частот, *больше*, чем критическое значение, т.е. $U > U_\alpha$, то гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае нет оснований ее отклонить.

Критерии согласия

Критерии согласия

Критериями согласия называются критерии, используемые для проверки гипотез о предполагаемом законе распределения.

Критерий согласия

```
graph TD; A[Критерий согласия] --> B[Критерий согласия Пирсона]; A --> C[Критерий согласия Колмогорова];
```

Критерий согласия
Пирсона

Критерий согласия
Колмогорова

Критерий согласия Пирсона (χ^2)

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

1. Построить интервальный статистический ряд и гистограмму.

2. По виду гистограммы выдвинуть гипотезу:

• H_0 – величина X распределена по такому-то закону:
$$f(x) = f_0(x),$$

• H_1 – величина X не распределена по такому-то закону:

$$f(x) \neq f_0(x),$$

где $f_0(x)$, $F_0(x)$ – плотность и функция гипотетического закона распределения

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия, определить оценки неизвестных параметров $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_m$ гипотетического закона распределения.

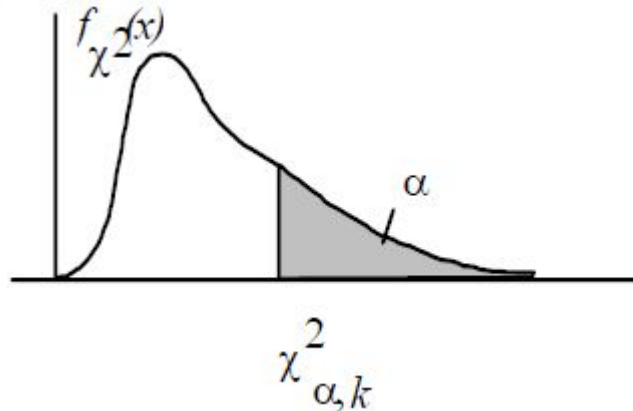
4. Вычислить значение критерия по формуле

$$\chi^2 = n \sum_{j=1}^M \frac{(p_j - p_j^*)^2}{p_j} = \sum_{j=1}^M \frac{(v_j - np_j)^2}{np_j},$$

где p_j – теоретическая вероятность попадания случайной величины в j -й интервал.

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

Так как аналитическое выражение плотности распределения χ^2 является довольно сложным, то в практике используют таблицу значений $\chi_{\alpha, k}^2$, рассчитанных из уравнения $P(\chi^2 > \chi_{\alpha, k}^2) = \alpha$, для различных значений k .



Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

5. Из таблицы распределения χ^2 выбирается значение $\chi_{\alpha, k}^2$, где α – заданный уровень значимости ($\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$), а k – число степеней свободы, которое определяется по формуле

$$k = M - 1 - s.$$

Здесь s – число неизвестных параметров гипотетического закона распределения, значения которых были определены в п. 3.

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

6. Если значение, вычисленное по формуле χ^2 , больше, чем критическое значение, т.е. , $\chi^2 > \chi_{\alpha, k}^2$ то гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае нет оснований ее отклонить

Критерий согласия Колмогорова

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

1. Построить вариационный ряд и график эмпирической функции распределения $F^*(x)$.
2. По виду графика $F^*(x)$ выдвинуть гипотезу:
$$H_0 : F(x) = F_0(x),$$
$$H_1 : F(x) \neq F_0(x),$$
где $F_0(x)$ – функция гипотетического закона распределения.

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия

определить оценки неизвестных параметров

$\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_m$ гипотетического закона распределения.

4. Рассчитать 10...20 значений функции $F_0(x)$ и построить ее график в одной системе координат с функцией $F^*(x)$.

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

5. По графику определить максимальное по модулю отклонение между функциями $F^*(x)$ и $F_0(x)$.

$$Z = \max_{i=1}^n \left| F^*(x_i) - F_0(x_i) \right|.$$

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

6. Вычислить значение критерия Колмогорова

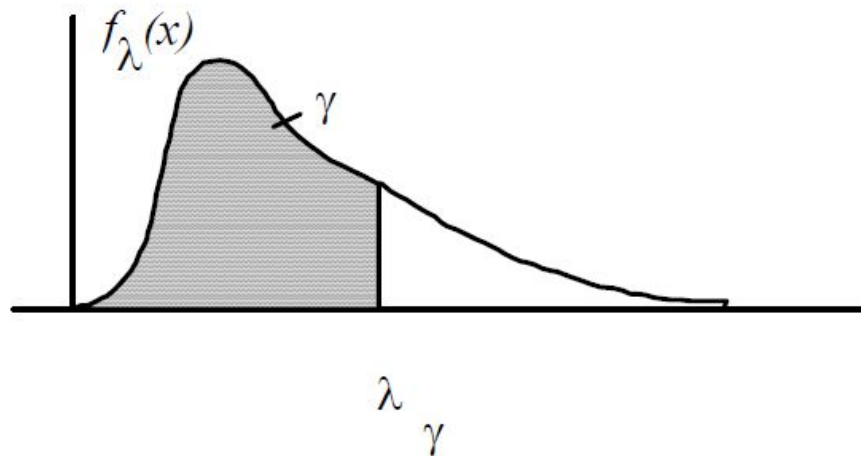
$$\lambda = \sqrt{n} \cdot Z.$$

7. Величина λ распределена по закону Колмогорова, который не зависит от закона распределения величины X ,:

$$F(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}.$$

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

Так как аналитическое выражение функции распределения $F(\lambda)$ является довольно сложным, то в практике используют таблицу значений γ λ , рассчитанных из уравнения $p(0) \gamma \leq \lambda < \lambda = \gamma$



Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

7. Из таблицы распределения Колмогорова выбрать критическое значение λ_γ , $\gamma = 1 - \alpha$. α – заданный уровень значимости ($\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$).

8. Если $\lambda > \lambda_\gamma$, то нулевая гипотеза H_0 отклоняется, в противном случае нет оснований ее отклонить.

Достоинства критерия согласия Колмогорова

Достоинствами критерия Колмогорова по сравнению с критерием χ^2 :

*Являются **возможность** его применения при очень маленьких объемах выборки ($n < 20$), **более высокая "чувствительность"**, а следовательно, меньшая трудоемкость вычислений.*

Недостатки критерия согласия Колмогорова

Недостатком является то, что эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ должна быть построена по несгруппированным выборочным данным, что затруднительно при больших объемах выборки.

Кроме этого, следует отметить, что критерий можно применять только в случае, когда известен не только вид функции распределения $F_0(x)$, но и все входящие в нее параметры $\theta_1, \dots, \theta_k$.



Конец 15 лекции.