«Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С.П.Королева»

Теория вероятностей и математическая статистика

(дневное обучение)

Лекция №15

2014

Тема лекции:

Проверка статистических гипотез. Критерии согласия.

Проверка статистических гипотез.

Проверка статистических гипотез.

Статистической гипотезой называется всякое непротиворечивое множество утверждений *{H0, H1, … , Hk-1} относительно свойств* распределения случайной величины. Любое из утверждений *Hi называется* альтернативой гипотезы.

Простейшей гипотезой является двухальтернативная: *{H0, H1}. В этом случае альтернативу H0 называют нулевой гипотезой, а **H1**-конкурирующей гипотезой*.

Проверка статистических гипотез.

Критерием называется случайная величина
$U = \phi\ (x1, K\ , xn\ )$,где xi –значения выборки, которая позволяет принять или отклонить нулевую гипотезу *H0*.

Значения критерия, при которых гипотеза H0 отвергается, образуют ***критическую область проверяемой гипотезы***, а значения критерия, при которых гипотезу принимают, ***область принятия гипотезы*** *(область допустимых значений)*.

Критические точки отделяют *критическую область от области* принятия гипотезы.

Ошибка первого и второго рода.

Ошибка первого и второго рода.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отклонена гипотеза H0, если она верна ("пропуск цели").

Вероятность совершить ошибку первого рода обозначается **α** и называется ***уровнем значимости***.

Наиболее часто на практике принимают,

что $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$.

Ошибка первого и второго рода.

Ошибка второго рода заключается в том, что гипотеза H0 принимается, если она неверна ("ложное срабатывание").

Вероятность ошибки этого рода обозначается β. Вероятность не допустить ошибку второго рода $(1-\beta)$ называют ***мощностью критерия.***

Проверка гипотезы о равенстве вероятностей

Проверка гипотезы о равенстве вероятностей

Пусть произведено две серии опытов, состоящих соответственно из *n1 и n2 опытов. В каждом из них* регистрировалось появление одного и того же события А.

В первой серии событие А появилось в *k1 опытах, во второй – в k2 опытах, причем частота* события А в первой серии получилась больше, чем во второй:

$$\boxed{p_1^* = \frac{k_1}{n_1} > p_2^* = \frac{k_2}{n_2}.}$$

Проверка гипотезы о равенстве вероятностей

Разность между двумя частота получилась равной

$$U = p_1^* - p_2^*.$$

Спрашивается, значимо или не значимо это расхождение? Указывает ли оно на то, что в первой серии опытов событие *A* действительно вероятнее, чем во второй, или расхождение между частотами надо считать случайным?

Двухальтернативная гипотеза

Выдвинем двухальтернативную гипотезу {*H0, H1*}. ***Пусть H0*** *– различия в вероятностях не существует, т.е. обе серии опытов* произведены в одинаковых условиях, а расхождение *U объясняется* случайными причинами,

H1 *– различие в вероятностях существует, т.е. обе серии опытов* произведены не в одинаковых условиях.

Двухальтернативная гипотеза

В данном случае нуль-гипотеза *H0* состоит в том, что обе серии опытов однородны и что вероятность p появления события A в них одна и та же, приближенно равная частоте, которая получится, если обе серии смешать в одну:

$$\boxed{p \approx p^{*} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}.}$$

Двухальтернативная гипотеза

При достаточно больших n1 и n2 каждая из случайных величин p_1^* и p_2^* распределена практически нормально, с одним и тем же математическим ожиданием $m = p \approx p^*$.

Двухальтернативная гипотеза

Что касается дисперсий *D1 и D2 в первой и во второй* сериях, то они различны и равны соответственно

$$\boxed{D_1 \approx \frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1},\ D_2 \approx \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}.}$$

Двухальтернативная гипотеза

В качестве критерия будем использовать случайную величину $\boldsymbol{U}$ **=p**$_{1^*}$**- p**$_{2^*}$, *которая также имеет приближенно нормальное* распределение с математическим ожиданием **m**$_{\mathbf{u}}$ *=0 и дисперсией*

$$D_U = D_1 + D_2 \approx \frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}$$

откуда $\sigma_U = \sqrt{D_U} \approx \sqrt{\frac{p_1^*(1-p_1^*)}{n_1} + \frac{p_2^*(1-p_2^*)}{n_2}}$.

Двухальтернативная гипотеза

Определим критическую точку *Uα для заданного уровня значимости α из* уравнения:

$$\alpha = p(U \geq U_\alpha) = 0.5 - \Phi\left(\frac{U_\alpha}{\sigma_U}\right) \text{ т.е. } U_\alpha = \sigma_U \cdot \arg\Phi(0.5 - \alpha)$$

Если значение, вычисленное по формуле разности двух частот, *больше*, чем критическое значение, т.е. *U > Uα, то гипотеза H0 отклоняется,* в противном случае нет оснований ее отклонить.

Критерии согласия

Критерии согласия

Критериями согласия называются критерии, используемые для проверки гипотез о предполагаемом законе распределения.

Критерий согласия

Критерий согласия Пирсона

Критерий согласия Колмогорова

Критерий согласия Пирсона ($\chi 2$)

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

1. Построить интервальный статистический ряд и гистограмму.

2. По виду гистограммы выдвинуть гипотезу:

- *H0 – величина X распределена по такому-то закону:* $\boldsymbol{f(x) = f0(x)}$,

- *H1 – величина X не распределена по такому-то закону:*

$$\boldsymbol{f(x) \neq f0(x)},$$

где $f_0(x)$, $F_0(x)$ *– плотность и функция гипотетического закона распределения*

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия, определить оценки неизвестных параметров $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_m$ *гипотетического закона* распределения.

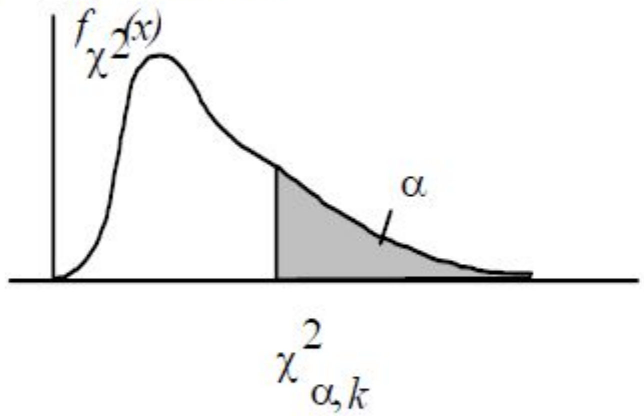
4. Вычислить значение критерия по формуле

$$\chi^2 = n\sum_{j=1}^{M}\frac{\left(p_j - p_j^*\right)^2}{p_j} = \sum_{j=1}^{M}\frac{\left(\nu_j - np_j\right)^2}{np_j},$$

где ***pj*** *– теоретическая вероятность попадания случайной величины в* ***j- й*** *интервал.*

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

Так как аналитическое выражение плотности распределения χ 2 является довольно сложным, то в практике используют таблицу значений $\chi^2_{\alpha,k}$, *рассчитанных из* уравнения $p(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}) = \alpha$, *для различных* значений *k*.



Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

5. Из таблицы распределения χ 2 выбирается значение $\chi^2_{\alpha,k}$,***где α*** –заданный уровень значимости (α = 0,05 или α = 0,01), а ***k*** – *число степеней* свободы, которое определяется по формуле

$$\boldsymbol{k = M - 1 - s.}$$

Здесь **s** *– число неизвестных параметров гипотетического закона распределения, значения которых были определены в п. 3.*

Алгоритм проверки критерия согласия Пирсона

6. Если значение, вычисленное по формуле χ 2 , больше, чем критическое значение,
т.е. , $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}$ *то гипотеза Н0 отклоняется, в противном случае нет* оснований ее отклонить

Критерий согласия Колмогорова

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

1. Построить вариационный ряд и график эмпирической функции распределения ***F*(x)*.**

2. По виду графика $F^*(x)$ *выдвинуть гипотезу:*

$$H_0 : F(x) = F_0(x),$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x),$$

где $F_0(x)$ – *функция гипотетического закона распределения.*

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

3. Используя метод моментов или максимального правдоподобия
определить оценки неизвестных параметров
$\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_m$ *гипотетического закона* распределения.

4. Рассчитать 10...20 значений функции *$F_0(x)$ и построить ее график в* одной системе координат с функцией *$F^*(x)$*.

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

5. По графику определить максимальное по модулю отклонение между функциями $F^*(x)$ и $F_0(x)$.

$$Z = \max_{i=1}^{n} \left| F^*(x_i) - F_0(x_i) \right|.$$

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

6. Вычислить значение критерия Колмогорова

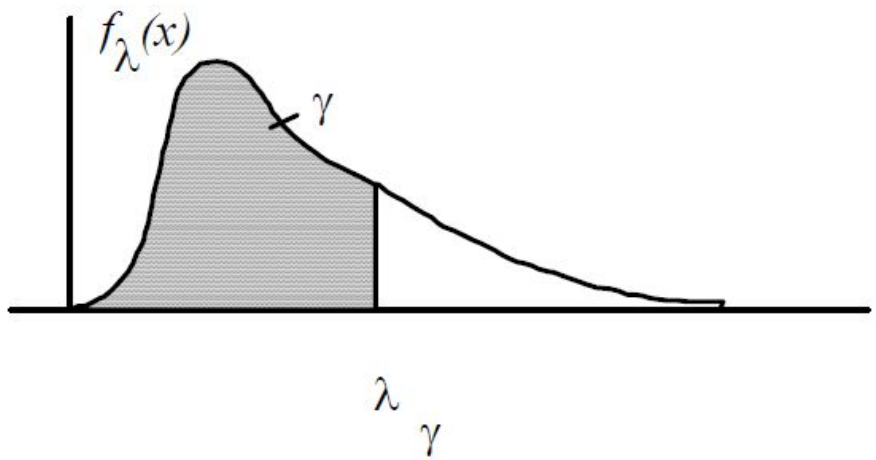
$$\lambda = \sqrt{n} \cdot Z .$$

7. Величина λ распределена по закону Колмогорова, который не зависит от закона распределения величины *X*,:

$$F(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} .$$

Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

Так как аналитическое выражение функции распределения $F(\lambda)$ *является довольно сложным,* то в практике используют таблицу значений γ λ , рассчитанных из уравнения $p(0\ )\ \gamma \le \lambda < \lambda = \gamma$



Алгоритм проверки критерия согласия Колмогорова

7. Из таблицы распределения Колмогорова выбрать критическое значение $\gamma\ \lambda$, $\gamma = 1 - \alpha$. α – заданный уровень значимости
($\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$).

8. Если $\lambda > \lambda\gamma$ *, то нулевая гипотеза H0 отклоняется, в противном случае* нет оснований ее отклонить.

Достоинства критерия согласия Колмогорова

Достоинствами критерия Колмогорова по сравнению с критерием χ2:

Являются ***возможность*** его применения при очень маленьких объемах выборки ($n < 20$), ***более высокая "чувствительность"***, *а следовательно*, меньшая трудоемкость вычислений.

Недостатки критерия согласия Колмогорова

Недостатком является то, что эмпирическая функция распределения *F*(x) должна быть построена по несгруппированным* выборочным данным, что затруднительно при больших объемах выборки.

Кроме этого, следует отметить, что критерий можно применять только в случае, когда известен не только *вид функции* распределения *F0(x), но и все входящие в нее параметры* $Q_1, \ldots, Q_k$.

Конец 15 лекции.