Точность оценки

- Определение. **Точечной** называют оценку Q, которая определяется одним числом.
- Определение. **Интервальной** называют оценку, которая определяется двумя числами—концами интервала.

Интервальные оценки позволяют установить **точность** и **надежность** оценок .

Пусть для оценки неизвестного параметра Q была найдена по данным выборки статистическая характеристика Q^*.

Примечание: примем Q постоянным числом (Q может быть и случайной величиной).

1. Q^* тем точнее определяет параметр Q, чем меньше абсолютная величина разности $|Q- Q^*|$.

2. Если $\delta>0$ и $|Q- Q^*| <\delta$, то чем меньше δ , тем оценка точнее.

3. ***Положительное число δ характеризует точность оценки.***

Доверительная вероятность и доверительный интервал

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка Q^* удовлетворяет неравенству $|Q - Q^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Определение: **Надежностью** (доверительной вероятностью) оценки Q^* называют вероятность γ , с которой осуществляется неравенство

$|Q — Q^*| < \delta$.

Примечание: надежность можно взять: 0,95; 0,99 и 0,999.

Вероятность того, что, $|Q - Q^*| < \delta$ равна γ:

$$P(|Q - Q^*| < \delta) = \gamma.$$

Если раскрыть модуль, то получим:

$P\,[Q^* — \delta < Q < Q^* + \delta] = \gamma$ ⇒ Вероятность того, что интервал $Q^* - \delta < Q < Q^* + \delta$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр Q, равна γ.

Определение: Интервал $(Q^* - \delta\ Q^* + \delta)$ называется **доверительным интервалом** , который покрывает неизвестный параметр с надежностью γ.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания при известном σ.

Дано: 1. количественный признак генеральной совокупности распределен нормально.

2. среднее квадратическое отклонение этого распределения -σ.

Требуется: оценить математическое ожидание a по выборочной средней $\overline{x}$

Найдем доверительный интервал, покрывающий a с надежностью γ. Будем рассматривать выборочную среднюю как случайную величину (она изменяется от выборки к выборке), выборочные значения признака- как одинаково распределенные независимые СВ с математическим ожиданием каждой a и средним квадратическим отклонением σ.

Теорема: Если величина X распределена нормально, то и выборочная средняя $\overline{x}$ тоже распределена нормально с параметрами:

$$M(\overline{x}) = a, \sigma(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $P(|\bar{x}-a|<\delta)=\gamma$,
где надежность – γ.

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания, меньше заданного положительного числа **δ**, определяется по формуле:

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Заменим *X на* $\bar{x}$ и *σ на* $\sigma(\bar{x})=\sigma/\sqrt{n}$, получим

$$P(|\bar{x}-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right), \text{обозначим } \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}=t \text{ и выразив } \delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$P\left(\bar{x}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\gamma=2\Phi(t).$$

с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\bar{x}-t\sigma/\sqrt{n},\bar{x}+t\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестный параметр *a*.

Точность оценки $\delta=t\sigma/\sqrt{n}\cdot$

Число *t* определяется из равенства $2\Phi(t)=\gamma$ по таблице функции Лапласа.

Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестном σ.

Дано: 1. количественный признак генеральной совокупности распределен нормально.

2. среднее квадратическое отклонение этого распределения неизвестно.

Требуется: оценить неизвестное математическое ожидание a с помощью доверительного интервала.

По данным выборки можно построить случайную величину, которая имеет распределение Стьюдента:

$$T = \frac{\bar{x} - a}{\sqrt{S^2 / n}} = \frac{\bar{x} - a}{S / \sqrt{n}}$$

Здесь S – «исправленное» среднеквадратичное отклонение.

Потребуем, чтобы с надежностью γ выполнялось:

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{S^2 / n}}\right| < t_\gamma\right) = \gamma$$

Если раскроем модуль, то получим:

$$P\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

$$\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right).$$

доверительный интервал с надежностью γ покрывающий неизвестный параметр a.

По заданному значению γ в **таблице** можно найти t_γ

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения.

Дано: 1. количественный признак генеральной совокупности распределен нормально.

2. «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение S.

Требуется: оценить неизвестное среднее квадратическое отклонение σ с помощью доверительного интервала и с заданной надежностью γ.

Потребуем выполнения соотношения : $P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$

Раскроем модуль и получим: $s - \delta < \sigma < s + \delta$

Или: $s(1 - \frac{\delta}{s}) < \sigma < s(1 + \frac{\delta}{s})$

Обозначим $\delta/s = q$ (величина q находится по "Таблице значений q"и зависит от надежности γ и объема выборки n).

Доверительный интервал для оценки генерального среднего квадратического отклонения имеет вид: $s(1 - q) < \sigma < s(1 + q)$

Замечание : Так как $\sigma > 0$, то если $q > 1$, левая граница интервала равна 0:

$\boldsymbol{0 < \sigma < s\,(1 + q)}$.

Доверительный интервал для оценки дисперсии

Так как дисперсия есть квадрат среднего квадратического отклонения, то доверительный интервал, покрывающий генеральную дисперсию ***D*** с заданной надежностью ***γ***, имеет вид:

$$s^2(1-q)^2 < D < s^2(1+q)^2\text{, если } q < 1;$$

$$0 < D < s^2(1+q)^2\text{, если } q > 1.$$

Схема нахождения коэффициента корреляции Кендалла

1. В порядке возрастания признака ***X*** выстраивают сопряженные наблюдения пар (x_i , y_i) и записывают их в таблицу.

2. Для каждого значения y_i определяют его ранг s_i, записывается в таблицу.

3. На последовательности рангов s_1, s_2, …, s_N определяют количество ***инверсий***, т.е. нарушений порядка следования. Например, при $N = 4$ и последовательности рангов {1, 3, 4, 2} имеем количество инверсий: 3 – количество инверсий для числа 1 (после числа 1 есть три значения, больше 1) и 1 – количество инверсий для числа 3 (после числа 3 есть одно значение, больше 3).

4. Формируют ряд значений в таблице из инверсий, если инверсий нет, то присваивают ячейке значение 0.

5. Рассчитывают сумму всех инверсий *K*: $K = \sum_{i=1}^{N} inv$

6. Определяют *коэффициент ранговой корреляции по Кендаллу*:

$$\tau_K = 1 - \frac{4 \cdot K}{N * (N-1)}$$

Проверка значимости коэффициента ранговой корреляции Кендалла

Для проверки *значимости рангового коэффициента Кендалла*, то есть для проверки существенности корреляционной связи, выдвигают гипотезы:

H$_0$: коэффициент ранговой корреляции Кендалла τ_K незначимый (τ_K=0);

H$_1$: коэффициент ранговой корреляции Кендалла τ_K значим ($\tau_K \neq 0$);.

Рассчитывается Z-статистика по формуле: $z_{расч.} = \tau_K \sqrt{\dfrac{9N(N+1)}{2(2N+5)}}$

По таблице значений функции Лапласа определяем $z_{табл}$ из равенства для $\Phi(z_{табл}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ уровня значимости α.

<u>Примечание:</u> $z_{табл}$ можно определить также в модуле Вероятностный калькулятор, выбрав нормальное распределение *Z*, *p*=1–*α* , *mean*=0, *st.dev*=1, и отметив режим двусторонней проверки гипотезы.

Если $|z_{расч}| > z_{табл}$, следовательно, нулевую гипотезу о незначимости коэффициента Кендалла (τ_K=0), можно отклонить на заданном уровне значимости α.