

# Транспортная задача

## Пример № 1

На трех базах находится однородный груз. На базе  $A_1$  в количестве 300 т., на базе  $A_2$  в количестве 150 т., на базе  $A_3$  в количестве 50 т. Весь этот груз необходимо развести четверем заказчикам так, чтобы стоимость перевозок была наименьшей. Заказчику в пункте  $B_1$  должно поступить 170 т., в пункте  $B_2$  – 110 т., в пункте  $B_3$  – 100 т., в пункте  $B_4$  – 120 т. Расстояния между базами и пунктами назначения приведены в таблице 1 в угловых скобках.

# Описание транспортной задачи

**Решить транспортную задачу – это найти *оптимальный* план перевозок  $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34})$ , который минимизирует его стоимость перевозок.**

# Общая стоимость перевозок $F$ , выраженная в тонно-километрах

- $x_{ij}c_{ij}$  - количество тонно-километровая характеристика перевозки.

$$F = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_{ij} c_{ij}$$

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	<input type="text" value="c11"/> $X_{11}$	<input type="text" value="c12"/> $X_{12}$	<input type="text" value="c13"/> $X_{13}$	<input type="text" value="c14"/> $X_{14}$	300 т.
$A_2$	<input type="text" value="c21"/> $X_{21}$	<input type="text" value="c22"/> $X_{22}$	<input type="text"/> $X_{23}$	<input type="text"/> $X_{24}$	150 т.
$A_3$	<input type="text"/> $X_{31}$	<input type="text"/> $X_{32}$	<input type="text"/> $X_{33}$	<input type="text"/> $X_{34}$	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <del>500 т.</del>

Нахождение оптимального плана перевозок  $(x_{11}, x_{12}, \dots)$ . Сводится к решению системы линейных уравнений, относительно определяемых переменных  $x_{ij}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 170, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 100, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120. \end{array} \right.$$

# Примечание

- Если  $C_{ij}$  означает расстояния между базами и заказчиками, то  $F$  (общая стоимость) выражается в тонно-километрах.
- Если  $C_{ij}$  означает стоимость перевозки одной тонны груза между базами и заказчиками, то  $F$  (общая стоимость) выражается в рублях.

**Если суммарный объем груза, содержащийся на базах, равен суммарной потребности заказчиков, то транспортная задача называется закрытой или сбалансированной.**

*(то есть, при вывозе всего груза, имеющегося на базах, потребности всех заказчиков будут полностью удовлетворены)*



Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	70	50	15	80	300 т.
$A_2$	80	90	40	60	150 т.
$A_3$	50	10	90	11	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	<del>500 т.</del> 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	$X_{11}$ <input type="text" value="с11"/>	$X_{12}$ <input type="text" value="с12"/>	$X_{13}$ <input type="text" value="с13"/>	$X_{14}$ <input type="text" value="с14"/>	300 т.
$A_2$	$X_{21}$ <input type="text" value="с21"/>	$X_{22}$ <input type="text" value="с22"/>	$X_{23}$ <input type="text"/>	$X_{24}$ <input type="text"/>	150 т.
$A_3$	$X_{31}$ <input type="text"/>	$X_{32}$ <input type="text"/>	$X_{33}$ <input type="text"/>	$X_{34}$ <input type="text"/>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <del>500 т.</del>

# **1. Формирование опорного решения**

- ***Формирование опорного решения методом северо-западного угла***

Вначале заполняется левая верхняя клетка (*северо-западный угол*) исходной таблицы или её оставшейся части.

После заполнения северо-западного угла с учетом предельных возможностей базы, из таблицы исключается или очередной столбец слева, или очередная строка сверху.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170	50	15	80	300 т.
A <sub>2</sub>	—	90	40	60	150 т.
A <sub>3</sub>	—	10	90	11	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	80 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>



Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	80 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	70 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	50 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

Стоимость перевозок по опорному  
(первоначальному) плану  
составит:

$$F_{\text{нач}} = 70 \cdot 170 + 50 \cdot 110 + 15 \cdot 20 + 40 \cdot 80 \\ + 60 \cdot 70 + 11 \cdot 50 = 25650 \text{ (т.км.)}$$

# **Решение транспортной задачи методом потенциалов**

Пересчитывать опорный план  
можно с помощью потенциалов.

**Тариф  $c_{ij}$  базисных переменных**  
представляется в виде суммы

$$c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

$\alpha_i$  - потенциалы баз,

$\beta_j$  – потенциалы заказчиков.

образуется система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 70, \\ \alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 50, \\ \alpha_1 + \beta_3 = c_{13} = 15, \\ \alpha_2 + \beta_3 = c_{23} = 40, \\ \alpha_2 + \beta_4 = c_{24} = 60, \\ \alpha_3 + \beta_4 = c_{34} = 11. \end{array} \right.$$

Значение одного из данных неизвестных можно выбирать произвольно. Например, можно принять, что  $\alpha_1 = 0$ .

Тогда решение системы примет вид:

Значение одного из данных неизвестных можно выбирать произвольно. Например, можно принять, что  $\alpha_1 = 0$ .

Тогда решение системы примет вид:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0, & \beta_1 = 70, \\ \alpha_2 = 25, & \beta_2 = 50, \\ \alpha_3 = -24, & \beta_3 = 15, \\ & \beta_4 = 35 \end{array}$$

Посчитаем алгебраические суммы свободных клеток

$$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 80 - (0 + 35) = 45$$

$$s_{21} = c_{21} - c'_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 80 - (25 + 70) = -15,$$

$$s_{22} = c_{22} - c'_{22} = c_{22} - (\alpha_2 + \beta_2) = 90 - (25 + 50) = 15,$$

$$s_{31} = c_{31} - c'_{31} = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 50 - (-24 + 70) = 4,$$

$$s_{32} = c_{32} - c'_{32} = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 10 - (-24 + 50) = -16,$$

$$s_{33} = c_{33} - c'_{33} = c_{33} - (\alpha_3 + \beta_3) = 90 - (-24 + 15) = 99.$$



Тариф свободной клетки обозначают как  $c'_{ij}$  и называют **косвенным тарифом**.

Сравнение тарифов свободной клетки определяется разностью истинного и косвенного тарифов.

$$s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$$

Новая стоимость перевозок находится по формуле:

$$F_{\text{нов}} = F_{\text{нач}} - m \cdot \left| s_{ij} \right|$$

Т.е стоимость перевозок уменьшится на число:

$$m \cdot \left| s_{ij} \right|$$

### **3. Циклы пересчета в таблице перевозок**

Для уменьшения стоимости перевозок используются **циклы пересчета**.

***Циклом пересчета в таблице перевозок называется последовательность переменных  $x_{ij}$ , удовлетворяющих следующим условиям:***

- 1) в каждый цикл может входить только одна **свободная переменная** (клетка с прочерком). Все остальные переменные должны **быть базисными** (заполненные клетки);
- 2) каждые две последовательные переменные, входящие в цикл, могут находиться только на одной строке или только в одном столбце;
- 3) каждая строка или столбец данного цикла может содержать только две переменные;
- 4) каждый цикл замкнут (т.е. при последовательном обходе выбранных переменных цикл начинается и заканчивается одной и той же клеткой).

*Если для свободной клетки исходной таблицы, заполненной методом северо-западного угла, можно построить цикл пересчета, то такой цикл является единственным. Число вершин в этом цикле чётно.*

*Если же для какой-либо свободной клетки исходной таблицы цикл пересчета построить нельзя, то для реализации этой возможности некоторые из свободных переменных обращаются в базисные переменные с нулевыми значениями (в пустых клетках записываются нули). Решение, содержащее нулевые значения базисных переменных, называется вырожденным.*

Перераспределение груза происходит по следующим правилам:

а) снабдим свободную клетку знаком (+) и с каждым переходом к следующей клетке цикла будем изменять знак на противоположный;

б) в клетках, отмеченных знаком (-) выберем наименьшее из чисел. Это то количество груза, которое будет последовательно перевозиться из одной клетки в другую.

Из клеток, отмеченных знаком (-), зафиксированное количество груза вывозится; в клетках со знаком (+) – прибывает

# ***Циклы пересчета №1***

Выбрали свободную клетку, построил  
ЦИКЛ.

$$(1;4) \rightarrow (1;3) \rightarrow (2;3) \rightarrow (2;4) \rightarrow (1;4),$$



# ***Циклы пересчета***

## ***№1***

Расставили знаки –

$$(1;4) \rightarrow (1;3) \rightarrow (2;3) \rightarrow (2;4) \rightarrow (1;4),$$

# ***Циклы пересчета***

## ***№1***

В клетках, отмеченных знаком (-)  
выберем наименьшее из чисел

$$\begin{array}{ccccccc} + & & [20] & - & + & & 70 & - \\ (1;4) & \rightarrow & (1;3) & \rightarrow & (2;3) & \rightarrow & (2;4) & \rightarrow (1;4), \end{array}$$

# *Циклы пересчета*

**№1**

Из клеток, отмеченных знаком (-), зафиксированное количество груза вычтем; в клетках со знаком (+) – прибавим. (результат запишем ниже)

$$\begin{array}{ccccccc} + & & 20 - & & 80 + & & 70 - \\ (1;4) \rightarrow & (1;3) \rightarrow & (2;3) \rightarrow & (2;4) \rightarrow & (1;4), & & \\ 20 & & 100 & & 50 & & \end{array}$$

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	-- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	100 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	50 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	50 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

$$F = 70 \cdot 170 + 50 \cdot 110 + 80 \cdot 20 + 40 \cdot 100 + 60 \cdot 50 + 11 \cdot 50 = 26\,550 \text{ (т.км.)};$$

Следует сравнить стоимость перевозок в каждом цикле со стоимостью перевозок по опорному (первоначальному) плану

$$F_{\text{нач}} = 25650 \text{ (т.км.)}$$

***и выбрать наименьший из всех результатов***

**Примечание. Если минимальное значение среди базисных переменных содержится в цикле пересчета в нескольких отрицательных вершинах цикла, то свободной (с прочерком) оставляют только одну из них, а в других клетках с таким же минимальным значением записываются нули. Эти нули являются новыми значениями базисных переменных. Образуется**

**4. Критерий оптимальности  
решения транспортной  
задачи**

Изменение стоимости перевозок в каждом цикле связано с числом  $m$  (фиксированное число цикла)

(Если вершина снабжена знаком (+), то это количество груза на  $m$  увеличивается; (-) – на  $m$  уменьшается.)

**Стоимость перевозок можно пересчитать по формуле:**

$$m \cdot c_{14} - m \cdot c_{13} + m \cdot c_{23} - m \cdot c_{24} = (c_{14} - c_{13} + c_{23} - c_{24}) \cdot m$$

$$= (80 - 15 + 40 - 60) \cdot 20 = 45 \cdot 20 = 900$$

$$900 = 26\,550 - 25\,650 \text{ (Т.КМ.)}$$



***Факт увеличения или  
уменьшения стоимости  
перевозок определяется не  
количеством перевозимого  
груза, а знаком  
алгебраической суммы  
тарифов по данному циклу***

# Критерий оптимальности решения

**Очередное решение определяет оптимальный план перевозок, если алгебраические суммы тарифов для всех возможных циклов пересчета больше или равны нулю или в наилучшем цикле пересчета при отрицательном значении алгебраической суммы тарифов количество перевозимого груза равно нулю**

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	
A <sub>1</sub>	170 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">70</span>	110 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	20 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	300 т.
A <sub>2</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">80</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	80 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">40</span>	70 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">60</span>	150 т.
A <sub>3</sub>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	— <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">90</span>	50 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">11</span>	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. <hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>

**Циклы пересчета** строятся только для тех свободных клеток, для которых алгебраические суммы тарифов отрицательны.

$$\begin{array}{ccccccc} + & & 80 - & & 20 + & & 170 - \\ (2;1) \rightarrow & (2;3) \rightarrow & (1;3) \rightarrow & (1;1) \rightarrow & (2;1), \\ 80 & & & 100 & & & 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} + & & 50 - & & 70 + & & 80 - & & 20 + & & 110 - \\ (3;2) \rightarrow & (3;4) \rightarrow & (2;4) \rightarrow & (2;3) \rightarrow & (1;3) \rightarrow & (1;2) \rightarrow & (3;2) \\ 50 & & & 120 & & 30 & & 70 & & & 60 \end{array}$$

$$m \cdot |s_{21}| = 80 \cdot 15 = 1200$$

$$m \cdot |s_{32}| = 50 \cdot 16 = 800$$

***Принимается наибольшее  
уменьшение стоимости перевозок.  
Строим таблицу,  
соответствующую самому  
выгодному циклу:***

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	70 90	50 110	15 100	80 —	300 т.
$A_2$	80 80	90 —	40 —	60 70	150 т.
$A_3$	50 —	10 —	90 —	11 50	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

***К новой таблице применяют еще раз метод потенциалов для минимизации стоимости перевозок до тех пор, пока алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток таблицы не окажутся положительными.***

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	70 140	50 60	15 100	80 -	300 т.
$A_2$	80 30	90 -	40 -	60 120	150 т.
$A_3$	50 -	10 50	90 -	11 -	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

$$F_{\text{опт.}} = 70 \cdot 140 + 50 \cdot 60 + 15 \cdot 100 + 80 \cdot 30 + 60 \cdot 120 + 10 \cdot 50 = 24400 \text{ (т.км.)},$$

**что меньше стоимости перевозки по первоначальному плану ( $F_{\text{нач.}} = 25650 \text{ т.км.}$ ) на 1250 т.км**



