Транспортная задача

Пример № 1

На трех базах находится однородный груз. На базе A_1 в количестве 300 т., на базе A_2 в количестве 150 т., на базе A_3 в количестве 50 т. Весь этот груз необходимо развести четырем заказчикам так, чтобы стоимость перевозок была наименьшей. Заказчику в пункте B_1 должно поступить 170 т., в пункте B_2 – 110 т., в пункте B_3 – 100 т., в пункте B_4 – 120 т. Расстояния между базами и пунктами назначения приведены в таблице 1 в угловых скобках.

Описание транспортной задачи

Решить транспортную задачу – это найти ***оптимальный*** план перевозок (x_{11}, x_{12},…, x_{34}), который минимизирует его стоимость перевозок.

Общая стоимость перевозок F, выраженная в тонно-километрах

- $x_{ij}c_{ij}$ - количество тонно-километровая характеристика перевозки.

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} c_{ij}$$

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{c_{11}}$ X_{11}	$\boxed{c_{12}}$ X_{12}	$\boxed{c_{13}}$ X_{13}	$\boxed{c_{14}}$ X_{14}	300 т.
A_2	$\boxed{c_{21}}$ X_{21}	$\boxed{c_{22}}$ X_{22}	X_{23}	X_{24}	150 т.
A_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Нахождение оптимального плана перевозок (x_{11}, x_{12},….). Сводится к решению системы линейных уравнений, относительно определяемых переменных x_{ij}

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 300, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = \ \ 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 170, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 100, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120. \end{cases}$$

Примечание

- Если C_{ij} означает расстояния между базами и заказчиками, то **F** (общая стоимость) выражается в в тонно-километрах.
- Если C_{ij} означает стоимость перевозки одной тонны груза между базами и заказчиками, то **F** (общая стоимость) выражается в рублях.

Если суммарный объем груза, содержащийся на базах, равен суммарной потребности заказчиков, то транспортная задача называется <u>закрытой или сбалансированной.</u>

(то есть, при вывозе всего груза, имеющегося на базах, потребности всех заказчиков будут полностью удовлетворены)

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	70	50	15	80	300 т.
A_2	80	90	40	60	150 т.
A_3	50	10	90	11	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{c11}$ X_{11}	$\boxed{c12}$ X_{12}	$\boxed{c13}$ X_{13}	$\boxed{c14}$ X_{14}	300 т.
A_2	c21 X_{21}	c22 X_{22}	X_{23}	X_{24}	150 т.
A_3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. ~~500 т.~~

1. Формирование опорного решения

- ***Формирование опорного решения методом северо-западного угла***

Вначале заполняется левая верхняя клетка *(северо-западный угол)* исходной таблицы или её оставшейся части.

После заполнения северо-западного угла с учетом предельных возможностей базы, из таблицы исключается или очередной столбец слева, или очередная строка сверху.

Базы	**Заказчики**				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$	$\boxed{15}$	$\boxed{80}$	300 т.
A_2	$\boxed{80}$ —	$\boxed{90}$	$\boxed{40}$	$\boxed{60}$	150 т.
A_3	$\boxed{50}$ —	$\boxed{10}$	$\boxed{90}$	$\boxed{11}$	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$ 110	$\boxed{15}$	$\boxed{80}$	300 т.
A_2	$\boxed{80}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{40}$	$\boxed{60}$	150 т.
A_3	$\boxed{50}$ —	$\boxed{10}$ —	$\boxed{90}$	$\boxed{11}$	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$ 110	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{80}$ —	300 т.
A_2	$\boxed{80}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{40}$	$\boxed{60}$	150 т.
A_3	$\boxed{50}$ —	$\boxed{10}$ —	$\boxed{90}$	$\boxed{11}$	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$ 110	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{80}$ —	300 т.
A_2	$\boxed{80}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{40}$ 80	$\boxed{60}$	150 т.
A_3	$\boxed{50}$ —	$\boxed{10}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{11}$	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$ 110	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{80}$ —	300 т.
A_2	$\boxed{80}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{40}$ 80	$\boxed{60}$ 70	150 т.
A_3	$\boxed{50}$ —	$\boxed{10}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{11}$ 50	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Стоимость перевозок по опорному (первоначальному) плану составит:

$F_{нач} = 70 \cdot 170 + 50 \cdot 110 + 15 \cdot 20 + 40 \cdot 80 + 60 \cdot 70 + 11 \cdot 50 = 25650$ (т.км.)

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Пересчитывать опорный план можно с помощью потенциалов.

Тариф c_{ij} базисных переменных представляется в виде суммы

$$c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$$

α_i - потенциалы баз,

β_j – потенциалы заказчиков.

образуется система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = c_{11} = 70, \\ \alpha_1 + \beta_2 = c_{12} = 50, \\ \alpha_1 + \beta_3 = c_{13} = 15, \\ \alpha_2 + \beta_3 = c_{23} = 40, \\ \alpha_2 + \beta_4 = c_{24} = 60, \\ \alpha_3 + \beta_4 = c_{34} = 11. \end{cases}$$

Значение одного из данных неизвестных можно выбирать произвольно. Например, можно принять, что $\alpha_1 = 0$.

Тогда решение системы примет вид:

Значение одного из данных неизвестных можно выбирать произвольно. Например, можно принять, что $\alpha_1 = 0$.

Тогда решение системы примет вид:

$\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 70$,

$\alpha_2 = 25$, $\beta_2 = 50$,

$\alpha_3 = -24$, $\beta_3 = 15$,

$\beta_4 = 35$

.

Посчитаем алгебраические суммы свободных клеток

$$s_{14} = c_{14} - c'_{14} = 80 - (0 + 35) = 45$$

$$s_{21} = c_{21} - c'_{21} = c_{21} - (\alpha_2 + \beta_1) = 80 - (25 + 70) = -15,$$
$$s_{22} = c_{22} - c'_{22} = c_{22} - (\alpha_2 + \beta_2) = 90 - (25 + 50) = 15,$$
$$s_{31} = c_{31} - c'_{31} = c_{31} - (\alpha_3 + \beta_1) = 50 - (-24 + 70) = 4,$$

$$s_{32} = c_{32} - c'_{32} = c_{32} - (\alpha_3 + \beta_2) = 10 - (-24 + 50) = -16,$$
$$s_{33} = c_{33} - c'_{33} = c_{33} - (\alpha_3 + \beta_3) = 90 - (-24 + 15) = 99.$$

Тариф свободной клетки обозначают как c'_{ij} и называют **косвенным тарифом.**

Сравнение тарифов свободной клетки определяется разностью истинного и косвенного тарифов.

$$s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$$

Новая стоимость перевозок находится по формуле:

$$F_{нов} = F_{нач} - m \cdot \left| s_{ij} \right|$$

Т.е стоимость перевозок уменьшится на число: $m \cdot \left| s_{ij} \right|$

3. Циклы пересчета в таблице перевозок

Для уменьшения стоимости перевозок используются **циклы пересчета**.

Циклом пересчета в таблице перевозок называется последовательность переменных x_{ij}***, удовлетворяющих следующим условиям***:

1) *в каждый цикл может входить только одна* ***свободная переменная*** (клетка с прочерком). *Все остальные переменные должны* ***быть базисными*** (заполненные клетки);
2) *каждые две последовательные переменные, входящие в цикл, могут находиться только на одной строке или только в одном столбце;*
3) *каждая строка или столбец данного цикла может содержать только две переменные;*
4) *каждый цикл замкнут (т.е при последовательном обходе выбранных переменных цикл начинается и заканчивается одной и той же клеткой).*

Если для свободной клетки исходной таблицы, заполненной методом северо-западного угла, можно построить цикл пересчета, то такой цикл является единственным. Число вершин в этом цикле чётно.

Если же для какой-либо свободной клетки исходной таблицы цикл пересчета построить нельзя, то для реализации этой возможности некоторые из свободных переменных обращаются в базисные переменные с нулевыми значениями (в пустых клетках записываются нули). *Решение, содержащее нулевые значения базисных переменных, называется вырожденным.*

Перераспределение груза происходит по следующим правилам:

а) снабдим свободную клетку знаком (+) и с каждым переходом к следующей клетке цикла будем изменять знак на противоположный;

б) в клетках, отмеченных знаком (−) выберем наименьшее из чисел. Это то количество груза, которое будет последовательно перевозиться из одной клетки в другую.

Из клеток, отмеченных знаком (−), зафиксированное количество груза вывозится; в клетках со знаком (+) – прибывает

Циклы пересчета №1

Выбрали свободную клетку, построил цикл.

$$(1;4) \to (1;3) \to (2;3) \to (2;4) \to (1;4),$$

Циклы пересчета №1

Расставили знаки

$$(1;4) \xrightarrow{+} (1;3) \xrightarrow{-} (2;3) \xrightarrow{+} (2;4) \xrightarrow{-} (1;4),$$

Циклы пересчета №1

в клетках, отмеченных знаком (−) выберем наименьшее из чисел

$$\overset{+}{(1;4)} \to \overset{[20]-}{(1;3)} \to \overset{+}{(2;3)} \to \overset{70-}{(2;4)} \to (1;4),$$

Циклы пересчета №1

Из клеток, отмеченных знаком (−), зафиксированное количество груза вычтем; в клетках со знаком (+) – прибавим.(результат запишем ниже)

$$\underset{20}{\overset{+}{(1;4)}} \to \overset{20-}{(1;3)} \to \underset{100}{\overset{80+}{(2;3)}} \to \underset{50}{\overset{70-}{(2;4)}} \to (1;4),$$

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$ 110	$\boxed{15}$ --	$\boxed{80}$ **20**	300 т.
A_2	$\boxed{80}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{40}$ 100	$\boxed{60}$ 50	150 т.
A_3	$\boxed{50}$ —	$\boxed{10}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{11}$ 50	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

$$F = 70\cdot170 + 50\cdot110 + 80\cdot20 + 40\cdot100 + 60\cdot50 + 11\cdot50 = 26\,550 \text{ (т.км.)};$$

Следует сравнить стоимость перевозок в каждом цикле со стоимостью перевозок по опорному (первоначальному) плану

$F_{нач}$ = 25650 (т.км.)

и выбрать наименьший из всех результатов

Примечание. ***Если минимальное значение среди базисных переменных содержится в цикле пересчета в нескольких отрицательных вершинах цикла, то свободной (с прочерком) оставляют только одну из них, а в других клетках с таким же минимальным значением записываются нули. Эти нули являются новыми значениями базисных переменных. Образуется***

4. ***Критерий оптимальности решения транспортной задачи***

Изменение стоимости перевозок в каждом цикле связано с числом m (фиксированное число цикла)

(Если вершина снабжена знаком (+), то это количество груза на m увеличивается; (−) − на m уменьшается.)

Стоимость перевозок можно пересчитать по формуле:

$$\mathbf{m \cdot c_{14} - m \cdot c_{13} + m \cdot c_{23} - m \cdot c_{24} = (c_{14} - c_{13} + c_{23} - c_{24}) \cdot m}$$

$= (80 - 15 + 40 - 60) \cdot 20 = 45 \cdot 20 = 900$

900= 26 550 – 25 650 (т.км.).

Факт увеличения или уменьшения стоимости перевозок определяется не количеством перевозимого груза, а знаком алгебраической суммы тарифов по данному циклу

Критерий оптимальности решения

Очередное решение определяет оптимальный план перевозок, если алгебраические суммы тарифов для всех возможных циклов пересчета больше или равны нулю или в наилучшем цикле пересчета при отрицательном значении алгебраической суммы тарифов количество перевозимого груза равно нулю

Базы	**Заказчики**				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$\boxed{70}$ 170	$\boxed{50}$ 110	$\boxed{15}$ 20	$\boxed{80}$ —	300 т.
A_2	$\boxed{80}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{40}$ 80	$\boxed{60}$ 70	150 т.
A_3	$\boxed{50}$ —	$\boxed{10}$ —	$\boxed{90}$ —	$\boxed{11}$ 50	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. / 500 т.

Циклы пересчета строятся только для тех свободных клеток, для которых **алгебраические суммы тарифов отрицательны.**

$$\underset{80}{\overset{+}{(2;1)}} \to \overset{80-}{(2;3)} \to \underset{100}{\overset{20+}{(1;3)}} \to \underset{90}{\overset{170-}{(1;1)}} \to (2;1),$$

$$\underset{50}{\overset{+}{(3;2)}} \to \overset{50-}{(3;4)} \to \underset{120}{\overset{70+}{(2;4)}} \to \underset{30}{\overset{80-}{(2;3)}} \to \underset{70}{\overset{20+}{(1;3)}} \to \underset{60}{\overset{110-}{(1;2)}} \to (3;2)$$

$$m \cdot \left| s_{21} \right| = 80 \cdot 15 = 1200$$

$$m \cdot \left| s_{32} \right| = 50 \cdot 16 = 800$$

Принимается наибольшее уменьшение стоимости перевозок. Строим таблицу, соответствующую самому выгодному циклу:

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	70 90	50 110	15 100	80 —	300 т.
A_2	80 80	90 —	40 —	60 70	150 т.
A_3	50 —	10 —	90 —	11 50	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

К новой таблице применяют еще раз метод потенциалов для минимизации стоимости перевозок до тех пор, пока алгебраические суммы тарифов для всех свободных клеток таблицы не окажутся положительными.

Базы	Заказчики				Запасы на базах
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	70 140	50 60	15 100	80 –	300 т.
A_2	80 30	90 –	40 –	60 120	150 т.
A_3	50 –	10 50	90 –	11 –	50 т.
Потребности заказчика	170 т.	110 т.	100 т.	120 т.	500 т. 500 т.

$F_{опт.} = 70 \cdot 140 + 50 \cdot 60 + 15 \cdot 100 + 80 \cdot 30 + 60 \cdot 120 + 10 \cdot 50 = 24400$ (т.км.),

что меньше стоимости перевозки по первоначальному плану ($F_{нач.}$= 25650 т.км.) на 1250 т.км