

# Транспортная задача

- Постановка задачи:

- Имеется  $m$  пунктов отправления (поставщиков) грузов:

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_i, \dots, A_m,$$

- на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно:

- Величины  $a_t$  определяют максимально возможные размеры вывоза отправления.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_m,$$

$$\sum_i^m a_i$$

- Суммарный запас груза поставщиков составляет

- Кроме того имеется  $n$  пунктов назначения:

$$B_1, B_2, B_3, \dots, B_j, \dots, B_n,$$

- которые подали заявки на доставку грузов в объемах соответственно

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_j, \dots, b_n.$$

- Суммарная величина заявок составляет

$$\sum_j^n b_j$$

- Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика  $A_t$  к потребителю  $B_j$  обозначим через  $c_{ij}$  (транспортный тариф). Общая стоимость перевозок составляет матрицу транспортных издержек  $C$ . В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные издержки по перевозке грузов.
- Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план, т. е. найти такие значения объема перевозок грузов от поставщиков  $A_i$  к потребителям  $B_j$ , чтобы вывести все грузы от поставщиков; удовлетворить заявки каждого потребителя и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

- Все исходные данные транспортной задачи можно записать в виде таблице, которая называется транспортной:  $C$  и  $X$ .

Пункты отправления	Пункты назначения						
	B1	B2	B3			Bп	запасы
A1	X11 c11						a1
A2	X21 c21						a2
Aк							ак
заявки	b1	b2	b3			вп	сумма

- Задача заключается в определении плана перевозок - матрицы  $X$ , которая удовлетворяет условиям:

- $\sum x_{ij} = a_i$

- $\sum x_{ij} = b_j$

- $F = \sum \sum c_{ij} * x_{ij} \rightarrow \min$

- Рассмотрим транспортную задачу, где критерием оптимальности является стоимость перевозок всех грузов, которая должна быть минимальной.
- Экономико-математическая модель транспортной задачи содержит системы линейных уравнений, условие неотрицательности переменных  $x_{ij}$  и целевую функцию.
- Следует иметь в виду, что:
  1. Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений, определяемое матрицей  $X = (x_{ij})$ ,  $i = 1, k; j = 1, л$ ; называется допустимым планом транспортной задачи.
  2. Ранг матрицы, составленный из коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений транспортной задачи, на единицу меньше числа уравнений, т. е. равен  $(m + n - 1)$ . Следовательно, число линейно независимых уравнений равно  $(m + n - 1)$ , они образуют базис, а соответствующие им  $(m + n - 1)$  переменных будут являться базисными.
  3. Допустимый план транспортной задачи, имеющий не более  $(m + n - 1)$  отличных от нуля величин  $x_{ij}$  называется опорным.

- 4. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности  $(m + n - 1)$ , то план является невырожденным, если меньше, то план называется вырожденным.
- 5. План  $X = (x_{ij})$  ( $i = 1, m; j = 1, n$ ), при котором функция принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом транспортной задачи.
- 6. Для решения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы груза в пунктах отправления были равны сумме заявок пунктов назначения.
 

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$
- 7. Модель транспортной задачи, удовлетворяющая условию, называется закрытой. Если же указанное условие не выполняется, то модель называется открытой.

- В случае превышения запаса над заявками

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j,$$

- вводится фиктивный  $(n + 1)$  пункт назначения с потребностью  $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$  и соответствующие тарифы считаются равными нулю  $c_{i,n+1} = 0$ .

- При

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

- вводится фиктивный  $(m + 1)$  пункт отправления с запасом

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

- и соответствующие тарифы принимаются равными нулю:

$$c_{m+1,j} = 0, j = \overline{1, n}.$$



- Наилучшим элементом матрицы тарифов  $C$  называется наименьший тариф, если задача поставлена на минимум, наибольший тариф - если задача поставлена на максимум целевой функции.
- Алгоритм построения первого опорного плана методом наименьшей стоимости включает следующие этапы:
  - а) среди тарифов находится наименьший;
  - б) клетка с выбранным тарифом заполняется величиной, равной максимально возможному объему груза с учетом ограничений по строке и столбцу. При этом либо весь груз вывозится от соответствующего поставщика, либо полностью удовлетворяется заявка потребителя. Строка или столбец таблицы вычеркивается и в дальнейшем распределении не участвует;
  - в) из оставшихся тарифов вновь находится наилучший (наименьший), и процесс продолжается до тех пор, пока не будет распределен весь груз.

- **Замечание:**
- Если модель транспортной задачи открытая и введены фиктивный поставщик или потребитель, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей, и в последнюю очередь нераспределенный груз направляется от фиктивного поставщика или к фиктивному потребителю.
- Дальнейшее улучшение первого опорного плана и получение оптимального плана производим методом потенциалов, который основан на теории двойственности.

- План  $X = (x_{ij})$  транспортной задачи будет являться оптимальным, если существует система  $m + n$  чисел  $\alpha_i, \beta_j$  называемых потенциалами, удовлетворяющая условиям:
- 
- **1.  $F(X) \rightarrow \min$**
- $a_i + b_j = c_{ij}$  для занятых клеток, где  $x_{ij} > 0$
- $a_i + b_j \leq c_{ij}$  для занятых клеток, где  $x_{ij} = 0$
- 
- **2.  $F(X) \rightarrow \max$**
- $a_i + b_j = c_{ij}$  для занятых клеток, где  $x_{ij} > 0$
- $a_i + b_j \geq c_{ij}$  для занятых клеток, где  $x_{ij} = 0$
- Потенциалы  $a_i$  и  $b_j$  являются переменными двойственной транспортной задачи и обозначают оплату за перевозку единицы груза в пунктах отправления (поставщиками) и назначения (потребителями) соответственно, поэтому их сумма равна транспортному тарифу  $a_i + b_j = c_{ij}$ , а условия получены на основании второй теоремы двойственности.

- Введем обозначение оценки свободной клетки таблицы

$$\Delta_{ij} = a_i + b_j - c_{ij}.$$

- Если среди  $\Delta_{ij}$  оценок нет положительных (задача поставлена на минимум), то опорный план является оптимальным.
- Алгоритм оценки оптимальности плана методом потенциалов включает следующие этапы.
  - а. Построение первого опорного плана.
  - б. Проверка вырожденности плана. Потенциалы  $a_i$  и  $b_j$  могут быть рассчитаны только для невырожденного плана. Если число занятых клеток в опорном плане меньше, чем  $(m + n - 1)$ , то не хватит количества уравнений для определения потенциалов, поэтому вносим нуль в одну из свободных клеток таблицы так, чтобы общее число занятых клеток стало равным  $(m + n - 1)$ . Нуль вводят в клетку с наименьшим тарифом, например в клетку одновременно вычеркиваемых строки и столбца таблицы при составлении нового плана. При этом фиктивно занятая нулем клетка не должна образовывать замкнутого прямоугольного контура с другими клетками таблицы.

- в. Определение значения функции цели путем суммирования произведений тарифов (удельных затрат) на объем перевозимого груза по всем занятым клетками таблицы.
- г. Проверка условия оптимальности. Определяем потенциалы  $a_i$  и  $b_j$ . Для каждой занятой клетки таблицы записываем уравнение  $a_i + b_j = c_{ij} (i = 1, m; j = 1, n)$
- Получим систему  $(m + n - 1)$  уравнений с  $(m + n)$  переменными.
- Так как число переменных больше числа уравнений, то система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений. Поэтому одному из неизвестных потенциалов  $a_i, b_j$  задают произвольное значение, например, для простоты вычислений полагаем  $a_1 = 0$ . Тогда остальные потенциалы определяются из приведенных соотношений.
- В транспортную таблицу добавляются дополнительная строка и столбец, куда заносятся потенциалы.
- Определяем оценки свободных клеток

- Если все  $\Delta_{ij} \leq 0$  (задача решается на минимум целевой функции)  $\Delta_{ij} \geq 0$  все (задача решается на максимум целевой функции), то оптимальный план найден. Если хотя бы одна оценка свободной клетки  $\Delta_{ij} > 0$  (задача поставлена на минимум) или  $\Delta_{ij} < 0$  (задача поставлена на максимум), план не является оптимальным, его можно улучшить, осуществив перераспределение груза.
- д. Построение нового опорного плана. Из всех положительных оценок свободных клеток выбираем наибольшую (если задача поставлена на минимум), из отрицательных — наибольшую по абсолютной величине (если задача поставлена на максимум). Клетку, которой соответствует наибольшая оценка, следует заполнить, т. е. направить груз. Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых и связанных с заполняемой так называемым циклом.

- Циклом, или прямоугольным контуром, в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья - вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, другое - в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки пересечения не являются вершинами. Для каждой свободной клетки таблицы можно построить единственный цикл.
- Вершинам цикла, начиная от вершины, находящейся в свободной клетке, присваиваем поочередно знаки « + » и « - ».
- Из объемов груза, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее и обозначим его  $\gamma$ . Перераспределяем величину  $\gamma$  по циклу, прибавляя  $\gamma$  к соответствующим объемам груза, стоящим в плюсовых клетках и вычитая  $\gamma$  из объемов груза, находящихся в минусовых клетках таблицы. В результате клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а одна из занятых клеток цикла становится свободной.
- Полученный новый опорный план проверяется на оптимальность, т. е. возвращаемся к четвертому этапу

- *Примечания:*
- Если в минусовых клетках построенного цикла находятся два (или несколько) одинаковых минимальных значения то при перераспределении объемов груза освобождаются две (или несколько) клеток, и план становится вырожденным. Для продолжения решения необходимо одну или несколько освобождающихся клеток таблицы занять нулем, причем предпочтение отдается клетке с наилучшим тарифом. Нулей вводится столько, чтобы во вновь полученном опорном плане число занятых клеток было равно  $(m + n - 1)$ .
- Если в оптимальном плане транспортной задачи оценка свободной клетки равна нулю, то задача имеет множество оптимальных планов. Для клетки с нулевой оценкой можно построить цикл и перераспределить груз. В результате полученный оптимальный план будет иметь такое же значение целевой функции.



- Значение целевой функции на каждой итерации можно рассчитать следующим образом:
- $F(\bar{X}_k) = F(\bar{X}_{k-1}) - \gamma \Delta_{ij}$  (задача поставлена на минимум);
- $F(\bar{X}_k) = F(\bar{X}_{k-1}) + \gamma \Delta_{ij}$  (задача поставлена на максимум),
- где  $\gamma$  - величина перемещаемого по циклу объема груза;
- $\Delta_{ij}$  - оценка свободной клетки, в которую направляется груз при переходе к новому плану;
- $F(\bar{X}_k)$  значение целевой функции на  $k$ -й итерации;
- $F(\bar{X}_{k-1})$  значение целевой функции на предыдущей итерации.

- 
- Пример 1. На три базы  $A_1, A_2, A_3$  поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 6, 8, 10 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре магазина  $B_1, B_2, B_3, B_4$  соответственно в количествах 4, 6, 8, 8 ед. Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов (тыс. руб. за ед. груза):

$$C = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & 4 & 3 & 8 & 5 \\ & 2 & 7 & 6 & 3 \end{matrix}$$

- $i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3, 4$

- $\sum a_i = 6 + 8 + 10 = 24$

- $\sum b_j = 4 + 6 + 8 + 8 = 26$

- Отсюда следует, что транспортная задача является открытой. Введем дополнительную базу  $A_4$  с запасом груза  $26 - 24 = 2$  ед. Тарифы перевозки полагаем равными нулю.

## Второй план

$B_j$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Запасы $a_i$		
$A_i$	$\beta_j$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = -1$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 1$			
$A_1$	$\alpha_1 = 0$	4	- 1	2	+	4	3	6
$A_2$	$\alpha_2 = 4$		4	3		8	5	8
$A_3$	$\alpha_3 = 2$		2	7		6	3	10
$A_4$	$\alpha_4 = -4$		0	0		0	0	2
Потребности $b_j$		4	6	8	8	8	26	26

- $F(X_1) = 4 - 1 + 2 - 2 + 4 - 3 + 4 - 8 + 2 - 6 + 8 - 3 + 2 - 0 = 88$  тыс.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 8, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 6, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 3, \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ 0 + \beta_1 = 1, \\ 0 + \beta_2 = 2, \\ \alpha_2 + 2 = 3, \\ 1 + \beta_3 = 8, \\ \alpha_3 + 7 = 6, \\ -1 + \beta_4 = 3, \\ \alpha_4 + 7 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \beta_1 = 1, \\ \beta_2 = 2, \\ \alpha_2 = 1, \\ \beta_3 = 7, \\ \alpha_3 = -1, \\ \beta_4 = 4, \\ \alpha_4 = -7. \end{cases}$$

$$\Delta_{ij} = (\beta_j + \alpha_i) - c_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{13} &= 7 + 0 - 4 = 3; \Delta_{14} = 4 + 0 - 3 = 1; \Delta_{21} = 1 + 1 - 4 = -2; \\
 \Delta_{24} &= 4 + 1 - 5 = 0; \Delta_{31} = 1 + (-1) - 2 = -2; \Delta_{32} = 2 + (-1) - 7 = -6; \\
 \Delta_{41} &= 1 + (-7) - 0 = -6; \Delta_{42} = 2 + (-7) - 0 = -5; \Delta_{44} = 4 + (-7) - 0 = -3.
 \end{aligned}$$

### Опорный план 3

$$F(\bar{X}_2) = F(\bar{X}_1) - \gamma \Delta_{13} = 88 - 2 \cdot 6 = 82 \text{ (тыс. руб.)}$$

$B_j$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Запасы $a_i$
$A_i$	$\beta_i$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = -1$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 2$	
$A_1$	$\alpha_1 = 0$	2	1	4	3	6
$A_2$	$\alpha_2 = 4$	4	3	8	5	8
$A_3$	$\alpha_3 = 1$	2	7	6	3	10
$A_4$	$\alpha_4 = -4$	0	0	0	0	2
Потребности $b_j$		4	6	8	8	26

$$F(X_3) = F(X_2) - \gamma \cdot \Delta_{31} = 82 - 2 \cdot 1 = 80 \text{ тыс. руб.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 8, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 3, \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \\ 0 + \beta_1 = 1, \\ 0 + \beta_3 = 4, \\ \alpha_2 + 4 = 8, \\ 4 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_3 + 1 = 2, \\ 1 + \beta_4 = 3, \\ \alpha_4 + 4 = 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \\ \beta_1 = 1, \\ \beta_3 = 4, \\ \alpha_2 = 4, \\ \beta_2 = -1, \\ \alpha_3 = 1, \\ \beta_4 = 2, \\ \alpha_4 = -4. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= -1 + 0 - 2 = -3; \Delta_{14} = 2 + 0 - 3 = -1; \Delta_{21} = 1 + 4 - 4 = 1; \\ \Delta_{24} &= 2 + 4 - 5 = 1; \Delta_{32} = -1 + 1 - 7 = -7; \Delta_{33} = 4 + 1 - 6 = -1; \\ \Delta_{41} &= 1 + (-4) - 0 = -3; \Delta_{42} = -1 + (-4) - 0 = -5; \Delta_{44} = 2 + (-4) - \\ &- 0 = -2. \end{aligned}$$

# Опорный план 4

$B_j$		$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Запасы $a_i$
$A_i$	$\beta_i$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 0$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 2$	
$A_1$	$\alpha_1 = 0$	1	2	4	3	6
	$\alpha_i$	0	6			
$A_2$	$\alpha_2 = 3$	4	3	8	5	8
		2	6			
$A_3$	$\alpha_3 = 1$	2	7	6	3	10
		2			8	
$A_4$	$\alpha_4 = -4$	0	0	0	0	2
			2			
Потребности $b_j$		4	6	8	8	26
						26

$$F(\bar{X}_4) = F(\bar{X}_3) - \gamma \cdot \Delta_{21} = 80 - 2 \cdot 1 = 78 \text{ тыс. руб.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 3, \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \\ 0 + \beta_1 = 1, \\ 0 + \beta_3 = 4, \\ \alpha_2 + 1 = 4, \\ 3 + \beta_2 = 3, \\ \alpha_3 + 1 = 2, \\ 1 + \beta_4 = 3, \\ \alpha_4 + 4 = 0, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \\ \beta_1 = 1, \\ \beta_3 = 4, \\ \alpha_2 = 3, \\ \beta_2 = 0, \\ \alpha_3 = 1, \\ \beta_4 = 2, \\ \alpha_4 = -4. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= 0 + 0 - 2 = -2; \Delta_{14} = 2 + 0 - 3 = -1; \Delta_{23} = 4 + 3 - 8 = \\ &= -1; \Delta_{24} = 2 + 3 - 5 = 0; \Delta_{32} = 0 + 1 - 7 = -6; \Delta_{33} = 4 + 1 - 6 = \\ &= -1; \Delta_{41} = 1 + (-4) - 0 = -3; \Delta_{42} = 0 + (-4) - 0 = -4; \Delta_{44} = 2 + \\ &+ (-4) - 0 = -2. \end{aligned}$$



- Поскольку все оценки неположительны, меньше или равны нулю, то план IV является оптимальным, что можно представить в виде матрицы:

... в виде следующей матрицы

$$X_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$F(X_4^*) = 78 \text{ тыс. руб.}$$

- **Анализ плана.** С первой базы необходимо весь груз направить в третий магазин, со второй базы направить в первый и второй магазины в количестве 2 ед. и 6 ед., а груз с третьей базы следует вывозить в первый и четвертый магазины в количестве 2 и 8 ед. соответственно. При этом потребность третьего магазина  $V_3$  остается неудовлетворенной в объеме 2 ед. Общая стоимость доставки груза потребителям будет минимальной и составляет 78 тыс. руб. Так как оценка свободной клетки  $\Delta_{24} = 0$ , то задача имеет множество оптимальных планов.

- Пример выполнения задачи в Excel.
- **Задача организации оптимального снабжения.**
- Три фермерских хозяйства  $L_1, L_2, L_3$  ежедневно могут доставлять в город соответственно 60, 60 и 50 ц молока для обеспечения пяти торговых точек:  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$ . Стоимость перевозки 1 ц

Фермерские хозяйства	Затраты на перевозку 1 ц к торговым точкам					Запас молока, ц
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	7	6	8	10	12	60
$A_2$	9	5	7	4	6	60
$A_3$	6	8	4	9	7	50
Потребности в молоке, ц	30	20	55	20	25	

Определить оптимальный план поставки молока в каждую точку для удовлетворения потребностей, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

- Экономико-математическая модель задачи
- **Переменные:**  $x_{ij}$  ( $i = 1,3; j = 1,5$ ) — количество молока, поставляемое фермерским хозяйством  $J$  в  $I$ -ю торговую точку.
- **Целевая функция** — суммарные транспортные издержки, которые необходимо минимизировать:

$$f(\bar{X}) = 7x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 10x_{14} + 12x_{15} + \\ + 9x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{25} + \\ + 6x_{31} + 8x_{32} + 4x_{33} + 9x_{34} + 7x_{35} \rightarrow \min.$$

*Функциональные ограничения:*  
по поставщикам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 50; \end{cases}$$

по потребителям:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 25. \end{cases}$$

- 1. Указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения.

Изменяемые ячейки — В11: F13. В эти ячейки в результате решения задачи будут записаны оптимальные значения  $X_{ij}$ .

- 2

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г
1		Затраты на перевозку 1ц к торговым точкам					Запас молока (ц)
2	Фермерские хозяйства	В1	В2	В3	В4	В5	
3	А1	7	6	8	10	12	60
4	А2	9	5	7	4	6	60
5	А3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке(ц)	30	20	55	20	25	

- 3. Ввести зависимости для ограничений.

$$a_i = \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

Поместите курсор в ячейку G11.

Выберите функцию СУММ.

Выделите необходимые для суммирования ячейки В11:F11.

Нажмите кнопку ОК для подтверждения ввода формулы для суммирования

- Аналогичные действия выполните для ячеек С14 и F14.

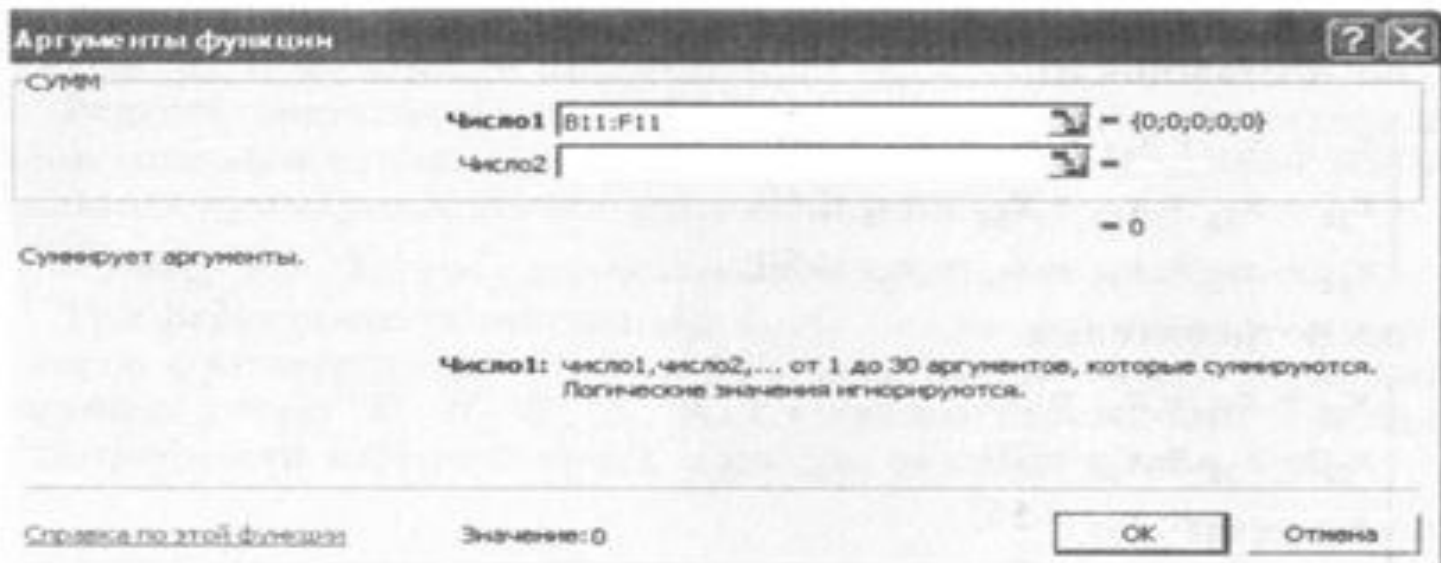


Рис. 1.27

Затем введите условия удовлетворения запросов потребителей:

$$b_j = \sum x_{ij}$$

- Для вычисления значения целевой функции, соответствующей минимальным суммарным затратам на доставку груза, зарезервируйте ячейку и введите формулу для ее вычисления:
- Запустите **Мастер функций** (значок  $f_x$ ).
- В окне **Категория** выберите **Математические**.
- В окне **Функция** выберите **СУММПРОИЗВ**.
- Нажмите кнопку ОК.
- В окне **СУММПРОИЗВ** укажите адреса массивов, элементы которых обрабатываются этой функцией
- В нашей задаче целевая функция представляет собой произведение затрат на доставку молока (ячейки B3:F5) и объемов поставок для каждого потребителя (содержимое ячеек B11 :F13). В поле Массив1 укажите адреса B3:F5.
- В поле Массив2 укажите адреса B11:F13.
- Нажмите кнопку ОК.
- В поле ячейки G14 появится некоторое числовое значение, равное произведению поставок на коэффициенты затрат по до ставке грузов

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц к торговым точкам:					Запас молока (ц)
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке(ц)	30	20	55	20	25	
7							
8							
9		Количество перевезенного молока от фермерского хозяйства Ai к торговой точке Bj:					
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						0
13	A3						0
14		0	0	0	0	0	0



Фермерские хозяйства	Количество перевезенного молока от фермерского хозяйства Ai к торговой точке Bj:					
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1						=СУММ(B11:F11)
A2						=СУММ(B12:F12)
A3						=СУММ(B13:F13)
	=СУММ(B11:B13)	=СУММ(C11:C13)	=СУММ(D11:D13)	=СУММ(E11:E13)	=СУММ(F11:F13)	=СУММПРОИЗВ(B3:F5,B11:F13)

- Запустить команду Поиск решений.





- Ввести ограничения.
- Поместите указатель мыши на кнопку **Добавить**. Появится диалоговое окно **Добавление ограничения**.
- Первая запись в поле **В соответствии с ограничениями** представляет собой *ограничения по уровню спроса*, вторая запись — *ограничения по уровню запасов*.
- После ввода всех ограничений нажмите кнопку ОК.
- Ввести параметры для решения ЗЛП.
- Установите флажок: Сделать переменные без ограничений неотрицательными.
- В окне **Выберите метод решения** укажите **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**.
- Нажмите кнопку **Найти решение** — на экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения**

Фермерские хозяйства	Количество перевезенного молока от фермерского хозяйства $A_i$ к торговой точке $B_j$ :					
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	30	5	5	0	0	40
A2	0	15	0	20	25	60
A3	0	0	50	0	0	50
	30	20	55	20	25	785

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Сохранить найденное решение  
 Восстановить исходные значения

Вернуться в диалоговое окно параметров

Отчеты
 

- Результаты
- Устойчивость
- Пределы

 Отчеты со

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Если используется модуль ОПГ, то найдено по крайней мере локально оптимальное решение. Если используется модуль поиска решений линейных задач симплекс-методом, то найдено глобально оптимальное решение.

- Ответ: Общие затраты на перевозку продукции составят 785 ден. ед. Спрос торговых точек удовлетворен полностью — они получают 150 ц молока. У первого фермерского хозяйства останется нереализованным 20 ц молока.
- Следует иметь в виду, что при решении задач в Excel результаты иногда выдаются в экспоненциальной форме записи. Данный формат используется для отображения и вывода очень больших (45 000 000 000 000, в Excel это  $4.5E+13$ ) или очень малых чисел (0,000 000 002 1, в Excel это  $2.1E-09$ ).
- Надстройка **Поиск решения** при заданной точности решения такие числа (например,  $2.1E-09$ ) не отличает от нуля.

- Задача о назначениях** — это распределительная задача, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.) и каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе, т.е. ресурсы неделимы между работами, а работы неделимы между ресурсами. Таким образом, задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Задача о назначениях имеет место при распределении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабора

ТО

Ресурсы \ Работы	$B_1$	$B_2$	...	$B_m$	Количество ресурсов
$A_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1m}$	1
$A_2$	$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2m}$	1
...	...	...	...	...	...
$A_n$	$c_{n1}$	$c_{n2}$	...	$c_{nm}$	1
Количество работ	1	1	...	1	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

- Экономико-математическая модель задачи

$$f(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, & i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j = 1, \dots, m, \\ x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

По сравнению с **транспортной задачей** процесс приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду имеет свои особенности (принимают значение «0» или «1»). Для этого необходимо при вводе ограничений указать тип переменных **Двоичное**. При добавлении ограничений на целочисленность справа вводят адреса изменяемых ячеек

