Дисциплина:
Исследование операций

Лекция. Линейное программирование. Транспортная задача.

Первухин Михаил Александрович

Доцент кафедры
математики и моделирования

Транспортная задача (ТЗ)

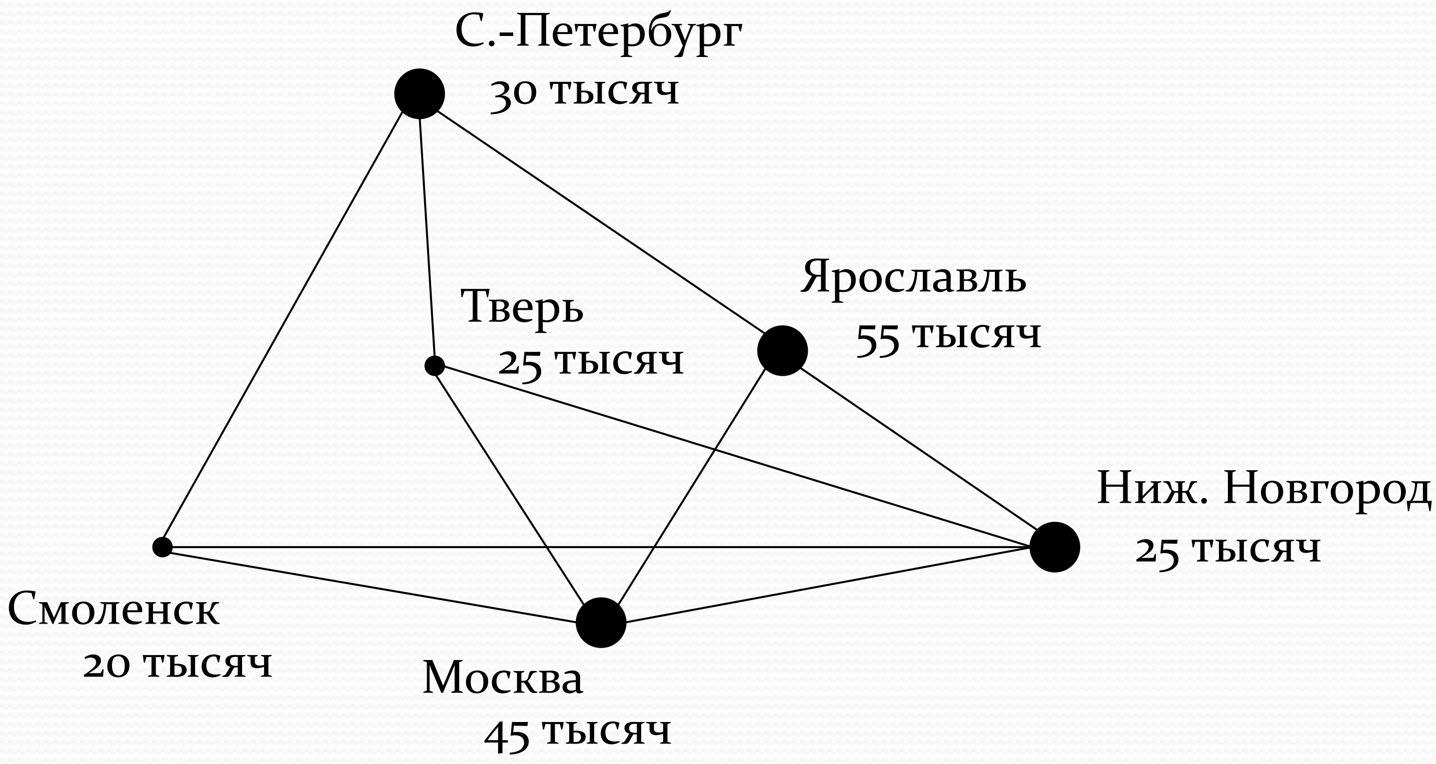
В этих задачах, рассматривается операция по перевозке некоторых однородных грузов из пунктов отправления в пункты назначения, причём известны стоимости перевозки единицы груза между любыми двумя пунктами отправления и назначения.

Требуется составить оптимальный план перевозок, то есть определить количество груза перевозимого из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения, при котором суммарная стоимость всех перевозок будет минимальной.

Математическая модель ТЗ

Логистическая компания располагает тремя пунктами упаковки косметики расположенными в Твери, Ярославле и Смоленске, откуда сформированные наборы перевозятся на грузовиках к трём оптовым поставщикам, расположенным в Москве, Санкт-Петербурге и Нижнем Новгороде.

Недельная производительность по формированию косметических наборов и потребности в наборах в городах приведены на схеме.



Стоимость доставки (транспортные тарифы) одного набора *(ед.)* из пунктов упаковки к каждому оптовому поставщику приведены в таблице.

Пункты упаковки наборов	Стоимость доставки одного набора из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения, у. е.		
	Москва	Санкт-Петербург	Нижний Новгород
Тверь	9	5	3
Ярославль	6	3	8
Смоленск	3	8	4

Логистическая компания должна принять решение, сколько наборов с косметикой необходимо отправлять из каждого пункта упаковки каждому оптовому поставщику, чтобы:

1) все наборы с каждого пункта упаковки были вывезены;

2) спрос на наборы с косметикой каждого оптового поставщика был полностью удовлетворён;

3) суммарные затраты на транспортировку всех наборов были минимальными.

Составление математической модели

- Обозначим пункты отправления индексом i, так что $i = 1$ соответствует Твери, $i = 2$ — Ярославлю и $i = 3$ — Смоленску, а пункты назначения — индексом j, при этом $j = 1$ соответствует Москве, j = 2 — Санкт-Петербургу, $j = 3$ — Нижнему Новгороду.

Переменными x_{ij} математической модели являются объёмы ежедневных перевозок наборов между пунктами отправления i ($i = 1, 2, 3$) и пунктами назначения j ($j = 1, 2, 3$).

Математическая модель задачи

- Цель: Минимизировать суммарные затраты на транспортировку.

$$F = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 3x_{22} + 8x_{23} +$$
$$+3x_{31} + 8x_{32} + 4x_{33} \rightarrow min$$

Математическая модель задачи

- С условиями:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 25\,000, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 55\,000, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20\,000, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45\,000, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30\,000, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25\,000, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3 \text{ и } j = 1,2,3. \end{cases}$$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Рассмотрим задачу.

Склады	Магазины			Запасы
	9	5	3	25
	6	3	8	55
	3	8	4	20
Потребности	45	30	25	

Алгоритм решения

1. Проверяем условие баланса: запасы должны равняться потребностям.
2. Составляем опорный план методом «северо-западного» угла.

Проверка условия баланса

Склады	Магазины			Запасы
	9	5	3	25
	6	3	8	55
	3	8	4	20
Потребности	45	30	25	**100\100**

Метод северо-западного угла

- При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге заполняют клетку транспортной таблицы, находящуюся в левом верхнем углу, т.е. на пересечении первого из оставшихся складов и первого из оставшихся магазинов.

Поиск опорного плана методом «северо-западного» угла

Склады	Магазины			Запасы
	25 9	5	3	~~25~~ 0 ?
	6	3	8	55
	3	8	4	20
Потребности	~~45~~ 20	30	25	**100\100**

Северо-западная клетка.

В клетку (1;1) записали 25 ед., поэтому на первом складе осталось 25-25=0 ед.

В неё записываем наименьшее из чисел 25 и 45.

Вычеркиваем израсходованные запасы и потребности.

Склады	Магазины			Запасы
	25 9	— 5	— 3	~~25~~ 0
	6	3	8	55
	3	8	4	20
Потребности	~~45~~ 20	30	25	100\100

25 ед. товара поедет из склада A_1 в магазин B_1. Тогда на складе A_1 больше не останется товара. Этот значит, в магазины B_1, B_2 товар поедет с других складов.

В таблице этот факт мы обозначаем при помощи прочерков.

Склады	Магазины			Запасы
	9 25	5 –	3 –	~~25~~ 0
	6 20	3	8	55
	3	8	4	20
Потребности	~~45~~ 20	30	25	100\100

Следующая северо-западная клетка.

Записываем в неё наименьшее из чисел 20 и 55.

Склады	Магазины			Запасы
	9 25	5 –	3 –	~~25~~ 0
	6 20	3	8	~~55~~ 35
	3 –	8	4	20
Потребности	~~45~~ ~~20~~ 0	30	25	100\100

Потребности магазина B_1 полностью выполнены. Ставим в клетку (3,1) прочерк.

Пересчитываем запасы и потребности

Продолжаем находить опорный план

Склады	**Магазины**			**Запасы**
	25 *9*	- *5*	- *3*	~~25~~
	20 *6*	30 *3*	*8*	~~55~~ 5
	- *3*	- *8*	*4*	20
Потребности	~~45~~	~~30~~	25	**100\100**

Продолжаем находить опорный план

Склады	Магазины			Запасы
	25 *9*	- *5*	- *3*	25
	20 *6*	**30** *3*	**5** *8*	55
	- *3*	- *8*	**20** *4*	20
Потребности	45	30	25	**100\100**

Шаг 3

- 3. Проверяем, чтобы число **<u>заполненных</u>** клеток равнялось $n + m - 1$, где n – число складов, m – число магазинов.

В нашем примере, $n = 3, m = 3$. Значит, число заполненных клеток должно равняться $3 + 3 - 1 = 5$.

Проверка невырожденности опорного плана

Склады	Магазины			Запасы
	9 **25**	*5* **-**	*3* **-**	25
	6 **20**	*3* **30**	*8* **5**	55
	3 **-**	*8* **-**	*4* **20**	20
Потребности	45	30	25	**100\100**

У нас 5 заполненных клеток

Шаг 4

- 4. **<u>По заполненным</u>** клеткам находим потенциалы поставщиков $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и потенциалы потребителей $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ из следующей формулы:

$$\beta_j - \alpha_i = c_{ij},$$

где c_{ij} - тарифы на перевозку с i-го склада в j-й магазин.

Вычисление потенциалов

Склады	Магазины						Потенциалы
	25	9		5		3	$\alpha_1=0$
	20	6	30	3	5	8	$\alpha_2=3$
		3		8	20	4	$\alpha_3=7$
Потенциалы	$\beta_1=9$		$\beta_2=6$		$\beta_3=11$		

- $$\begin{cases} \beta_1 - \alpha_1 = 9, \\ \beta_1 - \alpha_2 = 6, \\ \beta_2 - \alpha_2 = 3, \\ \beta_3 - \alpha_2 = 8, \\ \beta_3 - \alpha_3 = 4\ . \end{cases}$$

Полагаем $\alpha_1 = 0$ (ВСЕГДА!!!) и находим значение остальных потенциалов. Из системы получаем:
$\beta_1 = 9, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 6, \beta_3 = 11, \alpha_3 = 7.$

Шаг 5

- 5. <u>**Для пустых клеток**</u> находим оценки по следующей формуле:

$$\Delta_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}.$$

Вычисление оценок

Склады	Магазины						Потенциалы
	25	*9*		*5*		*3*	
	20	*6*	30	*3*	5	*8*	
		3		*8*	20	*4*	
Потенциалы							

- $$\Delta_{12} = \beta_2 - \alpha_1 - 5 = 6 - 0 - 5 = 1,$$
  $$\Delta_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - 3 = 11 - 0 - 3 = 8,$$
  $$\Delta_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - 3 = 9 - 7 - 3 = -1,$$
  $$\Delta_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - 8 = 6 - 7 - 8 = -9.$$

Шаги 6-7

- 6. Если среди чисел Δ_{ij} нет положительных, то получен оптимальный план; если же они имеются, то переходят к новому плану.
- 7. Среди положительных чисел Δ_{ij} выбираем максимальное. Пусть максимальная из оценок - Δ_{kl}. Строим для клетки (k,l) (обозначим ее *) цикл пересчёта.

Цикл пересчета

Циклом пересчета в таблице ТЗ называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья идут вдоль строк и столбцов, причём в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое — в столбце. Цикл всегда начинается и заканчивается в клетке *.

Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами.

Построение цикла

Склады	Магазины						Потенциалы
	25	9		5	*	3	
	20	6	30	3	5	8	
		3		8	20	4	
Потенциалы							

Шаг 8

8. Производят сдвиг по циклу пересчёта. Для этого каждой клетке таблицы, <u>в которой находится вершина цикла пересчёта</u>, приписывают определённый знак, причём свободной клетке (клетке *) приписывают знак плюс, а всем остальным клеткам – поочерёдно знак плюс или минус.

В данную свободную клетку переносят меньшее из чисел, стоящих в клетках со знаком минус. Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в клетках со знаком плюс, и вычитают из чисел, стоящих в клетках со знаком минус. <u>После пересчета число заполненных клеток должно остаться тем же</u>.

Расстановка знаков

Склады	Магазины						Потенциалы
	- 25	9		5	* +	3	
	+ 20	6	30	3	5 -	8	
		3		8	20	4	
Потенциалы							

В клетках цикла с минусами выбираем наименьшую из загрузок min(25,5). Это число 5. Теперь в клетках со знаком + нужно прибавить 5, а в клетках со знаком минус отнять 5.

Сдвиг по циклу пересчета

Склады	Магазины						Потенциалы
	20	*9*		*5*	**5**	*3*	
	25	*6*	**30**	*3*		*8*	
		3		*8*	**20**	*4*	
Потенциалы							

- 9. Повторяем шаги 4-7.

Вновь вычисляем потенциалы

Склады	Магазины						Потенциалы
	20	*9*		*5*	5	*3*	
	25	*6*	30	*3*		*8*	
		3		*8*	20	*4*	
Потенциалы							

- $$\beta_1 - \alpha_1 = 9, \quad \beta_3 - \alpha_1 = 3,$$
  $$\beta_1 - \alpha_2 = 6, \quad \beta_2 - \alpha_2 = 3,$$
  $$\beta_3 - \alpha_3 = 4.$$

Пересчитываем оценки

Склады	Магазины						Потенциалы
	20	*9*		*5*	**5**	*3*	
	25	*6*	**30**	*3*		*8*	
		3		*8*	**20**	*4*	
Потенциалы							

$$\Delta_{12} = \beta_2 - \alpha_1 - 5 = 6 - 0 - 5 = 1$$
$$\Delta_{23} = \beta_3 - \alpha_2 - 8 = 3 - 3 - 8 = -8$$
$$\Delta_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - 3 = 9 + 1 - 3 = 7$$
$$\Delta_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - 8 = 6 + 1 - 8 = -1$$

Склады	Магазины						Потенциалы
	- 20	9		5	5 +	3	
	25	6	30	3		8	
	+ *	3		8	20 -	4	
Потенциалы							

В клетках с минусами две одинаковые «загрузки» по 20 ед., когда мы будем отнимать 20, то в этих клетках получатся нули, но число заполненных клеток на протяжении всей задачи должно оставаться тем же. Поэтому в одной из них мы поставим прочерк, а в другой нарисуем ноль и будем считать ее условно заполненной. Ноль лучше нарисовать в той клетке, где тариф меньше.

Пересчет потенциалов и оценок для нового плана

Склады	Магазины						Потенциалы
		9		*5*	**25**	*3*	
	25	*6*	**30**	*3*		*8*	
	20	*3*		*8*	**0**	*4*	
Потенциалы							

$$\Delta_{11} = \beta_1 - \alpha_1 - 9 = 2 - 0 - 9 = -7,$$
$$\Delta_{12} = \beta_2 - \alpha_1 - 5 = -1 - 0 - 5 = -6,$$
$$\Delta_{23} = \beta_3 - \alpha_2 - 8 = 3 + 4 - 8 = -1,$$
$$\Delta_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - 8 = -1 + 1 - 8 = -8.$$

- Среди чисел Δ_{ij} нет положительных, значит получен оптимальный план.

- Ответ:

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 \\ 25 & 30 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_{min} = 3 \cdot 25 + 6 \cdot 25 + 3 \cdot 30 + 3 \cdot 20 = 375.$$

Замечание 1

Склады	Магазины			Запасы
	25 (9)	- (5)	- (3)	25
	20 (6)	30 (3)	- (8)	50
	- (3)	- (7)	20 (4)	20
Потребности	45	30	20	

Если при составлении опорного плана число заполненных клеток меньше, чем $n+m-1$, то необходимо заполнить еще одну клетку. Важно, чтобы при этом не получился цикл из заполненных клеток. Заполнить можно, например, любую из клеток.

Замечание 1

Склады	Магазины			Запасы
	25 9	- 5	- 3	25
	20 6	30 3	- 8	50
	- 3	0 7	20 4	20
Потребности	45	30	20	

Так как мы решаем задачу минимизации, то из двух клеток стоит выбрать ту, где тариф меньше. В нее записываем 0 и считаем эту клетку условно заполненной.

Замечание 2

- Если на шаге 7 получилось несколько максимальных оценок Δ_{ij}, то лучше выбрать ту в соответствующей клетке которой тариф меньше.

Если соответствующих клеток с наименьшим тарифом несколько, то можно выбрать любую из них.