ТРАПЕЦИЯ. СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ.

15. а) Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

б) Если окружность вписана в равнобедренную трапецию, то боковая сторона трапеции равна её средней линии.

в) Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное (среднее геометрическое) отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

16. а) *Замечательное свойство трапеции.* Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

б) Отрезок прямой, параллельной основаниям трапеции, заключённый внутри трапеции, разбивается её диагоналями на три части. Тогда отрезки, прилегающие к боковым сторонам, равны.

в) Если через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами трапеции, равен $\frac{2ab}{a+b}$.

г) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две равновеликие трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

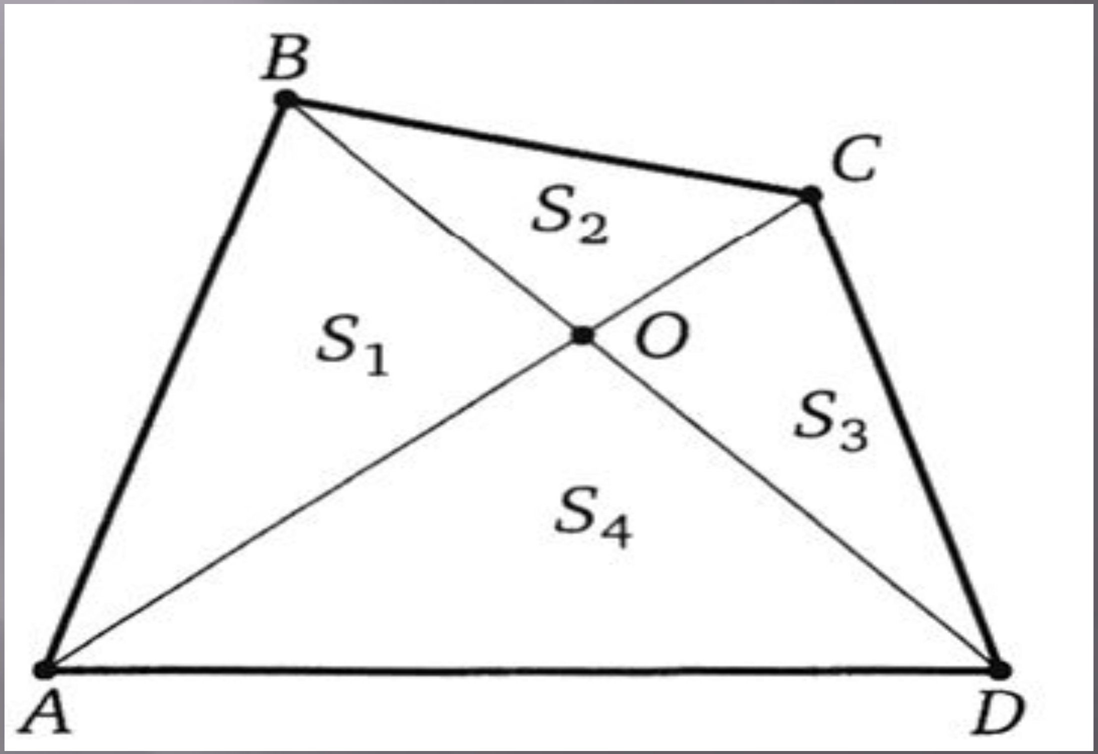
д) Если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен $\sqrt{ab}$.

31. *Теорема Птолемея*. Сумма произведений противоположных сторон вписанного четырёхугольника равна произведению его диагоналей.

Теорема 1. *Для того чтобы около четырёхугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его двух противоположных углов была равна* 180°.

Теорема 2. *Для того чтобы в выпуклый четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противоположных сторон были равны.*

Пример 3. Диагонали разбивают выпуклый четырёхугольник на треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 и S_4 (S_1 и S_3 — площади треугольников, прилежащих к противоположным сторонам четырёхугольника). Докажите, что $S_1S_3 = S_2S_4$.



25. а) Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, причём площадь параллелограмма вдвое меньше площади четырёхугольника.

б) Середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей либо являются вершинами параллелограмма, либо лежат на одной прямой.

26. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны.

27. Если диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R с центром O, пересекаются в точке P и перпендикулярны, то

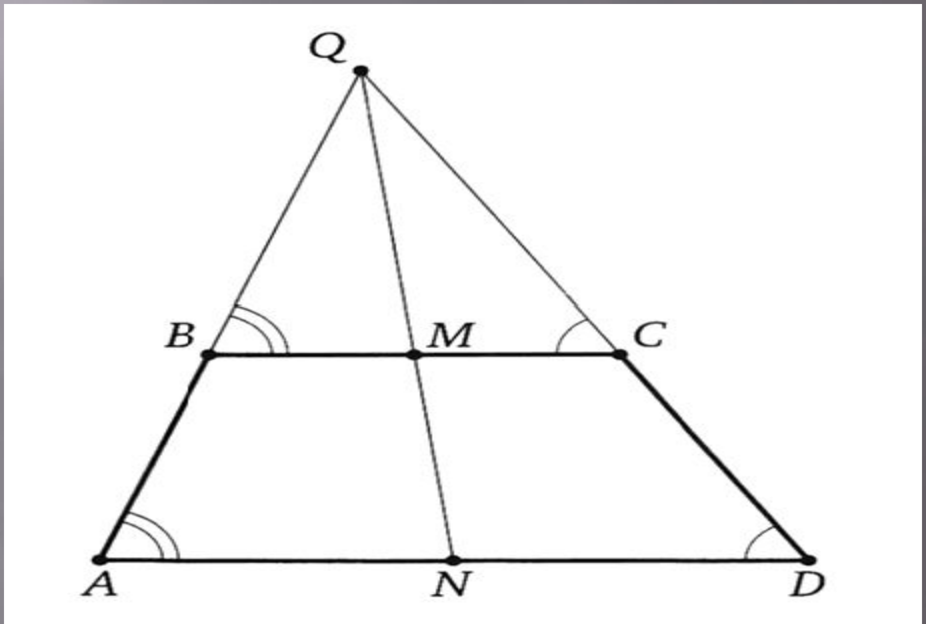
а) расстояние от точки O до стороны AB вдвое меньше стороны CD;

б) медиана PM треугольника APD перпендикулярна стороне BC;

в) $AB^2+CD^2+AD^2+BC^2=8R^2, \quad PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4R^2$;

г) площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD)$, причём для любого другого четырёхугольника $ABCD$ с теми же сторонами площадь меньше, чем $\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD)$.

Теорема. *Точка пересечения диагоналей любой трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.*



4. а) Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

б) Если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

1.15. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

Пример 5. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен $2p$. Найдите проекцию диагонали трапеции на большее основание.

4. Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.

Ответ: 37,2.

Пример 1. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 7 и 8, а основания — 3 и 6.

Ответ: $12\sqrt{5}$.

Пример 2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC $(AD > BC)$ вписана в окружность с центром O. Известно, что $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$, а средняя линия трапеции равна a. Найдите высоту трапеции.

Ответ: $3a$ или $\frac{1}{3}a$.

Подготовительные задачи

4.1. Найдите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные — 17 и 25.

4.2. Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

4.3. В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

4.4. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 5.

4.5. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

4.6. Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол 60° с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

4.7. Окружность с центром O вписана в трапецию с боковой стороной AB. Найдите угол AOB.

4.8. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а бóльшая образует угол 30° с одним из оснований. Найдите это основание, если на нём лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

4.9. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?

4.10. Основания трапеции равны a и b $(a > b)$. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.