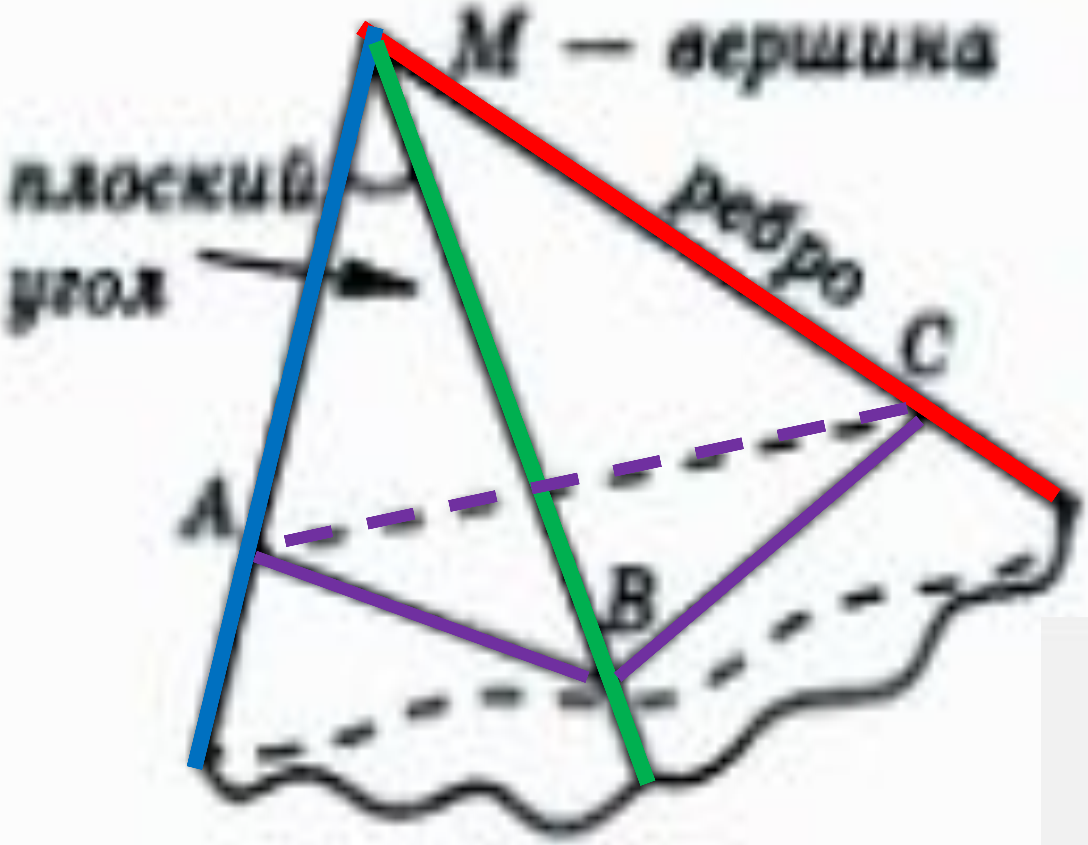
Трехгранный угол

- ***Трехгранный угол*** – это часть пространства, ограниченная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, не лежащими в одной плоскости (чертеж 4.4.1). Общая вершина O этих углов называется ***вершиной*** трехгранного угла. Стороны углов называются ***ребрами***, плоские углы при вершине трехгранного угла называются его ***гранями***. Грани трехгранного угла образуют двугранные углы.



$\angle AMB = C$

$\angle AMC = B$

$\angle BMC = A$

$A + B > C, A + C > B$

$B + C > A$

$A + B + C < 360°$

Трёхгранный угол $MABC$

M - вершина;

MA, MB, MC - ребра;

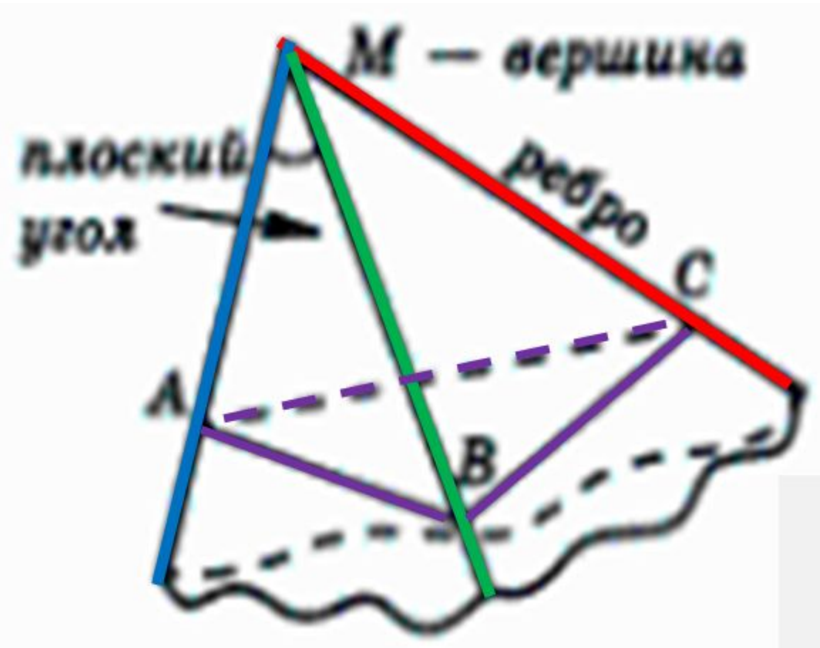
$\angle AMB, \angle AMC, \angle BMC$ - плоские углы трехгранного угла.

Теорема синусов

Для данного трехгранного угла отношение **синуса двугранного угла** к **синусу противолежащего ему плоского угла** есть величина постоянная

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin A} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin B} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin C}$$

Теорема синусов

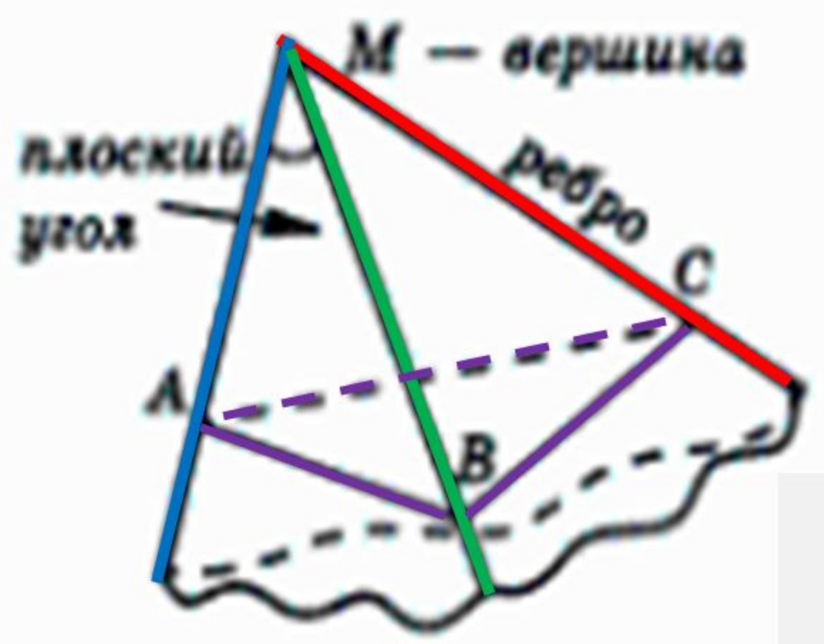


$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin A} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin B} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin C}$$

($\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ - величины двугранных углов при ребрах MA, MB, MC соответственно;

C, B, A - величины плоских углов, противолежащих соответственно AB, AC, BC)

Теорема косинусов

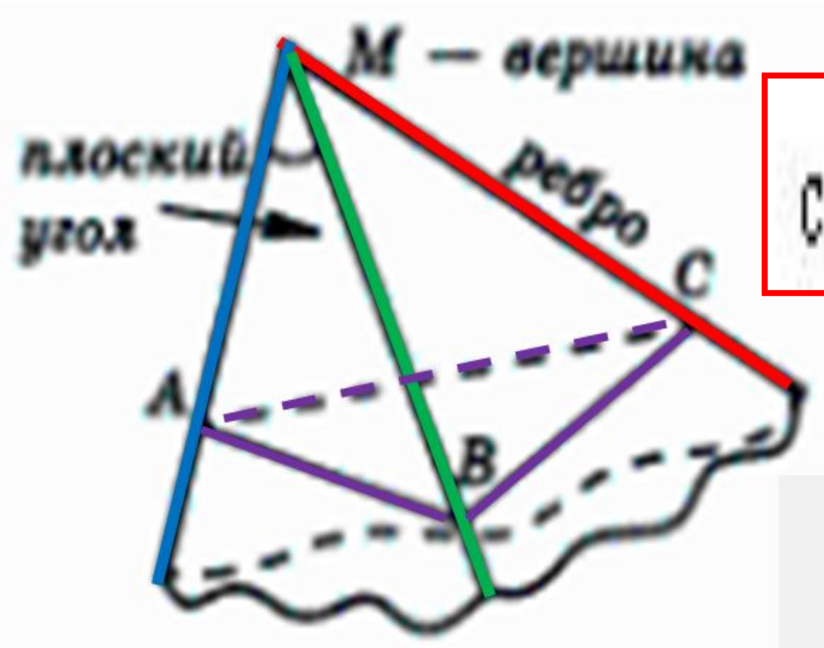


Пусть **C,B,A – величины плоских углов** трехгранного угла MABCD,

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ -**противолежащие им двугранные углы**, тогда

$$\boxed{\cos C = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos \hat{C}}$$

Теорема косинусов



$$\cos C = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos \widehat{C}$$

($\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ - величины двугранных углов при ребрах MA, MB, MC соответственно;

C, B, A - величины плоских углов, противолежащих соответственно AB, AC, BC)

- С помощью теоремы косинусов можно вычислить величину двугранного угла, зная плоские углы трехгранного угла:

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

- Если грани плоских углов взаимно перпендикулярны, получаем формулу трех косинусов: **$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$.**

где α, β, γ – плоские углы трехгранного угла;
A, *B*, *C* – противолежащие им двугранные углы.

Задача 12. В трехгранном угле два двугранных угла равны по $135°$, их общий плоский угол прямой. Найдите третий двугранный угол.

Решение.

$A = B = 135°$; по теореме косинусов $\cos A = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \cos B = \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$\cos\alpha < 0,\ \cos\beta < 0, \ldots,\ \cos\alpha = \cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \cos C = \dfrac{0-1/3}{2/3} = -\dfrac{1}{2}.$

Ответ. $120°$.

Задача 14 (вторая теорема косинусов для трехгранного угла). Докажите, что

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos\alpha .$$

Доказательство. Опустим из внутренней точки трехгранного угла перпендикуляры на грани трехгранного угла – получим новый (двойственный или **полярный** к данному) трехгранный угол с плоскими углами $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ и двугранными $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$. Применим 1-ю теорему косинусов.

Задача 15. Двугранные углы трехгранного угла равны $60°, 120°, 90°$. Найдите его плоские углы.

Решение. См. задачу 14.

Ответ. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}}), \arccos\frac{1}{3}$.