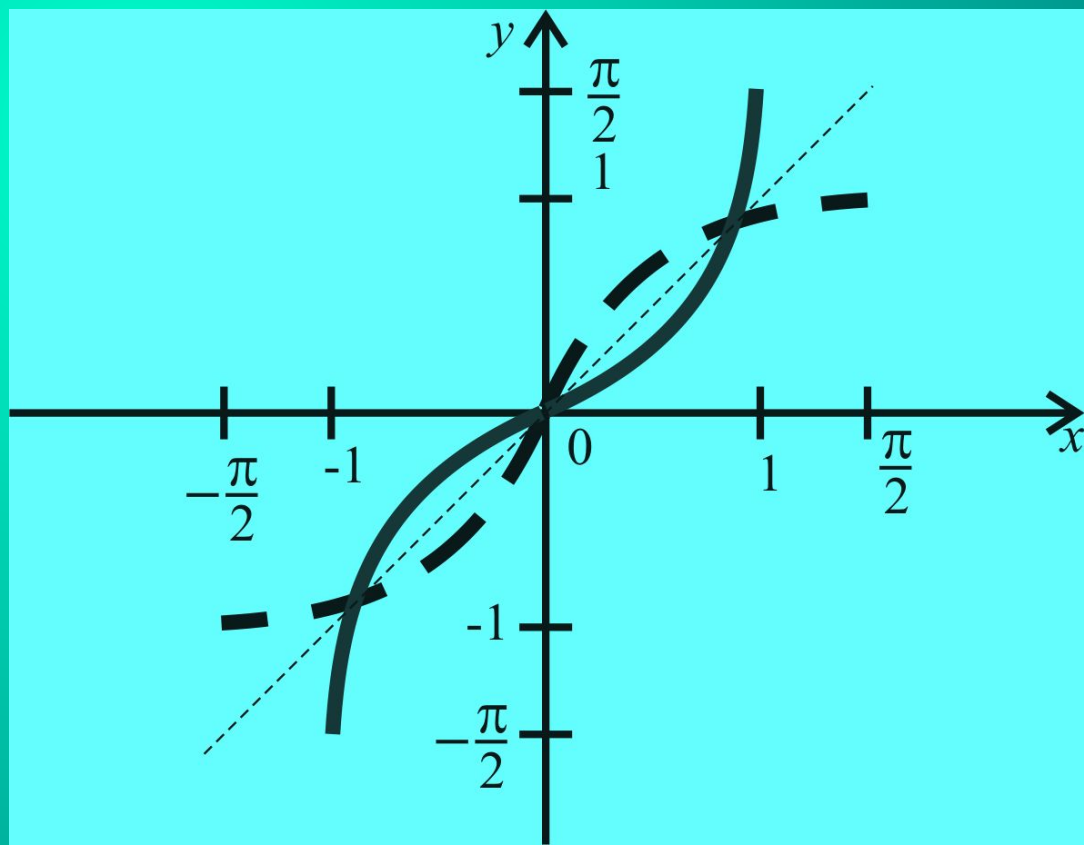
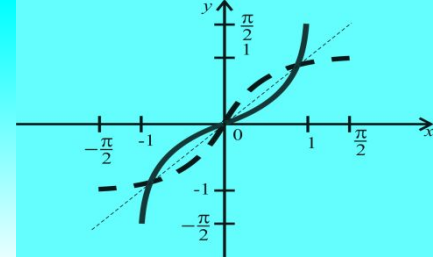


Тригонометрические функции

Автор
Календарева Н.Е.
© 2011 г.

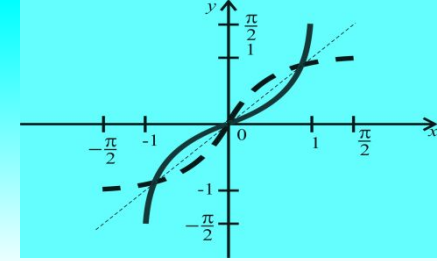


План



1. Функция $y = \sin x$, ее исследование и график
2. Функция $y = \cos x$, ее исследование и график
3. Функции тангенс и котангенс, их исследование и графики
4. Функции секонс и косеконс, определение

Функция $y = \sin x$



Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой.

$$\text{Def}(\sin x) = (-\infty; +\infty);$$

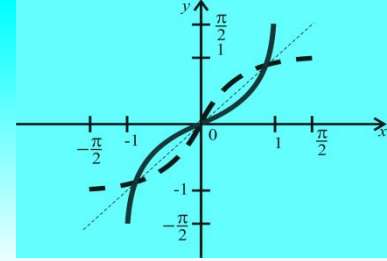
$$\text{E}(\sin x) = [-1; 1].$$

Так как О.О. симметрична относительно 0, то проверим равенство

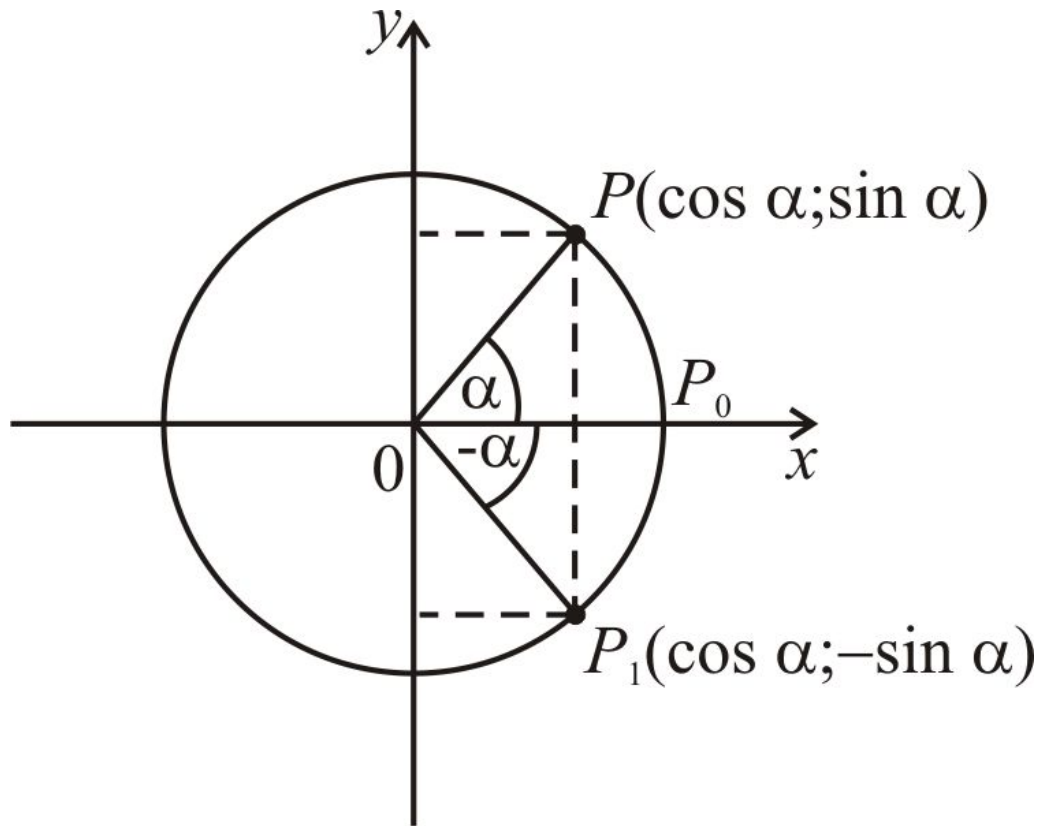
$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Функция нечетная. В самом деле.

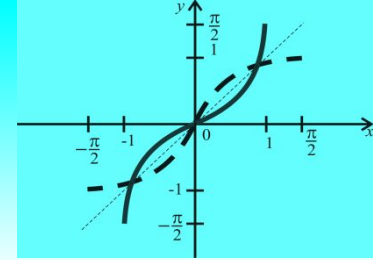
Нечетность функции $y = \sin x$



$$\sin(-x) = -\sin x;$$

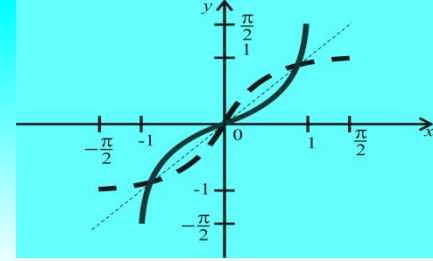


Периодические функции



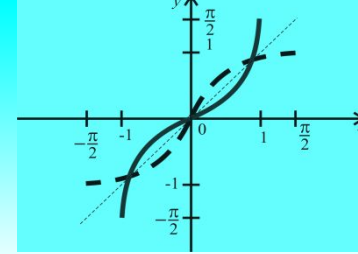
Посмотрим на единичную окружность и заметим, что $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Аналогично $\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$. О таких функциях говорят, что они *периодические* с *периодом* 2π . Если сделать несколько оборотов, например $2\pi \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$, то значения функции синуса не изменятся:



$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)$. Число $2\pi n$ также *период* функции. Число 2π – *наименьший положительный период*.

Максимальное и минимальное значения



Функция $y = \sin x$ принимает максимальное значение, равное 1. Это в точках $x = \pi/2 + 2\pi k$,

где $k \in \mathbf{Z}$.

И минимальное значение, равное -1 , в точках

$x = -\pi/2 + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

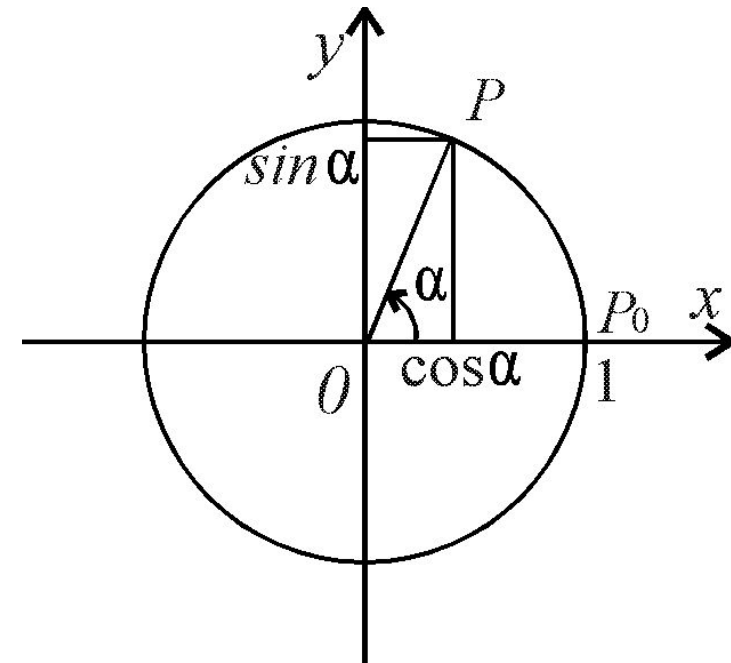
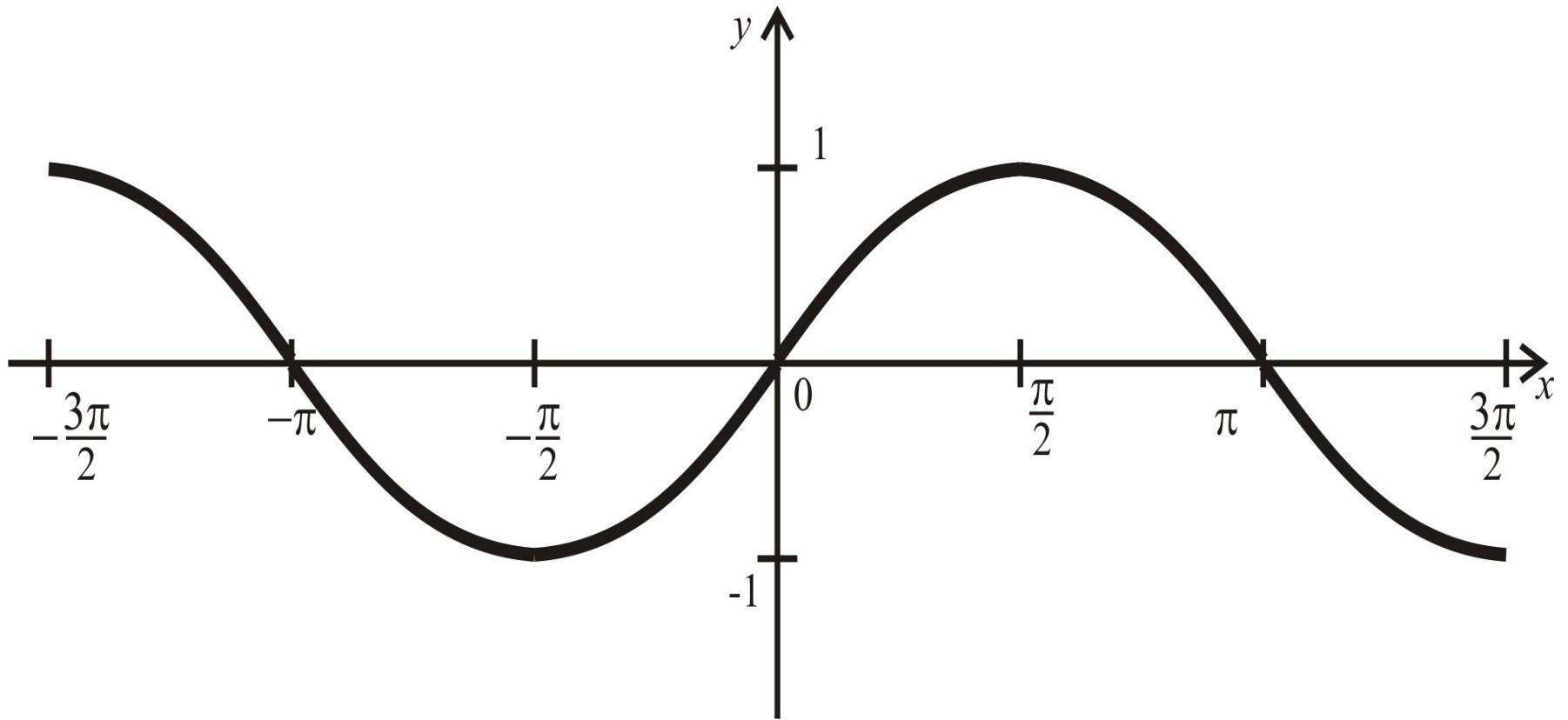
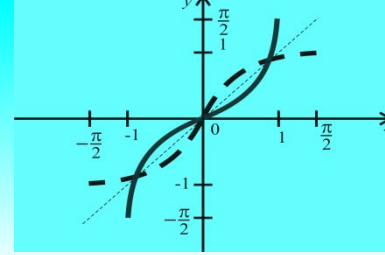
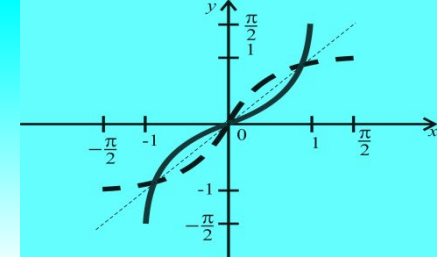


График функции $y = \sin x$



Функция $y = \cos x$



Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой.

$$\text{Def}(\cos x) = (-\infty; +\infty);$$

$$\text{E}(\cos x) = [-1; 1].$$

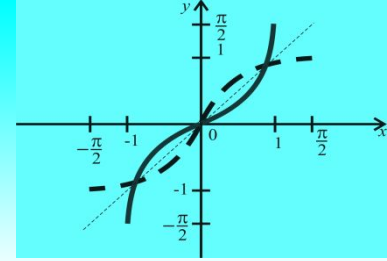
Так как О.О. симметрична относительно 0, то проверим равенство

$$\cos(-x) = \cos x.$$

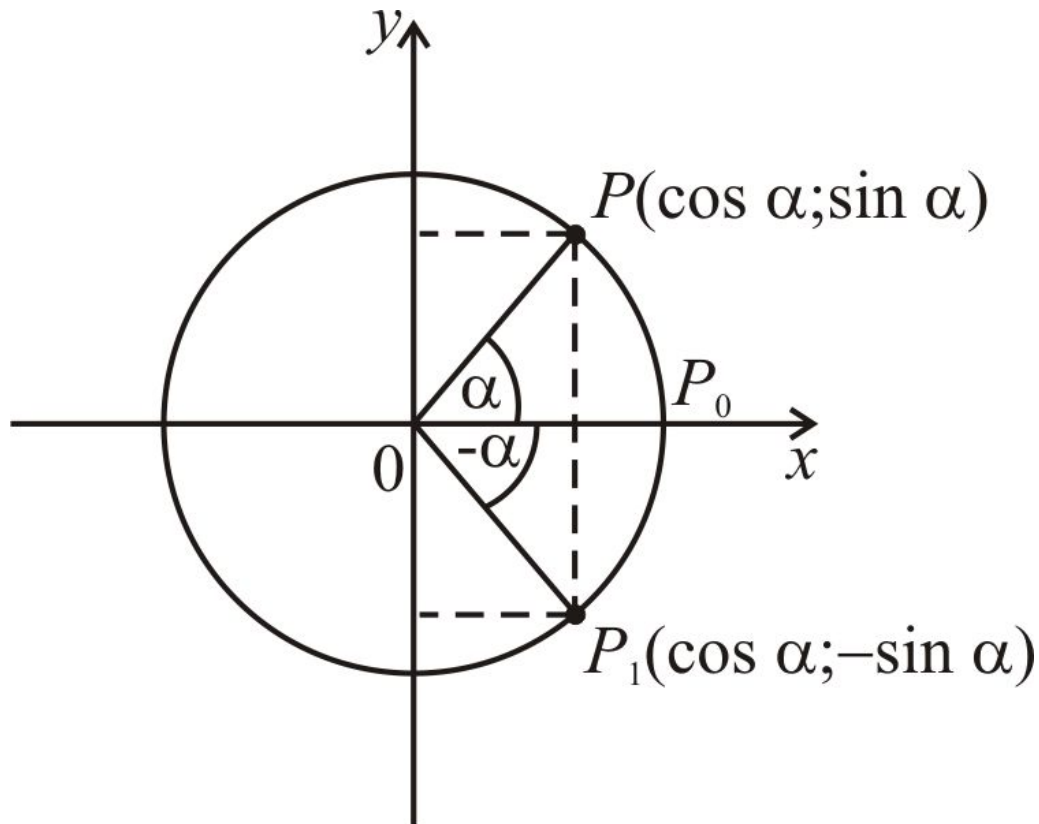
Функция четная. В самом деле.

Четность функции

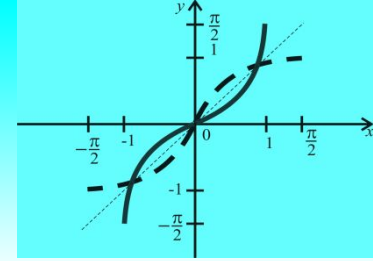
$$y = \cos x$$



$$\cos(-x) = \cos x;$$



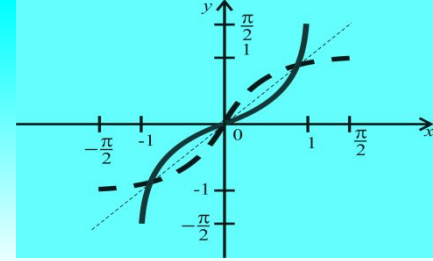
Периодичность $y = \cos x$



Посмотрим на единичную окружность и заметим, что $\cos (x + 2\pi) = \cos (x)$.

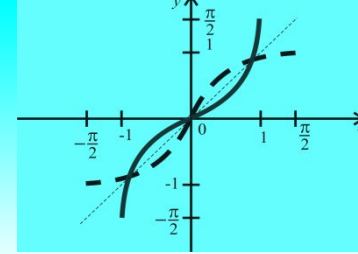
Аналогично $\cos (x - 2\pi) = \cos (x)$.

О таких функциях говорят, что они *периодические* с *периодом* 2π . Если сделать несколько оборотов, например $2\pi \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$, то значения функции косинуса не изменится:



$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$. Число $2\pi n$ также *период* функции. Число 2π – *наименьший положительный период*.

Максимальное и минимальное значения



Функция $y = \cos x$ принимает максимальное значение, равное 1. Это в точках $x = 2\pi k$,

где $k \in \mathbf{Z}$.

И минимальное значение, равное -1 , в точках $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

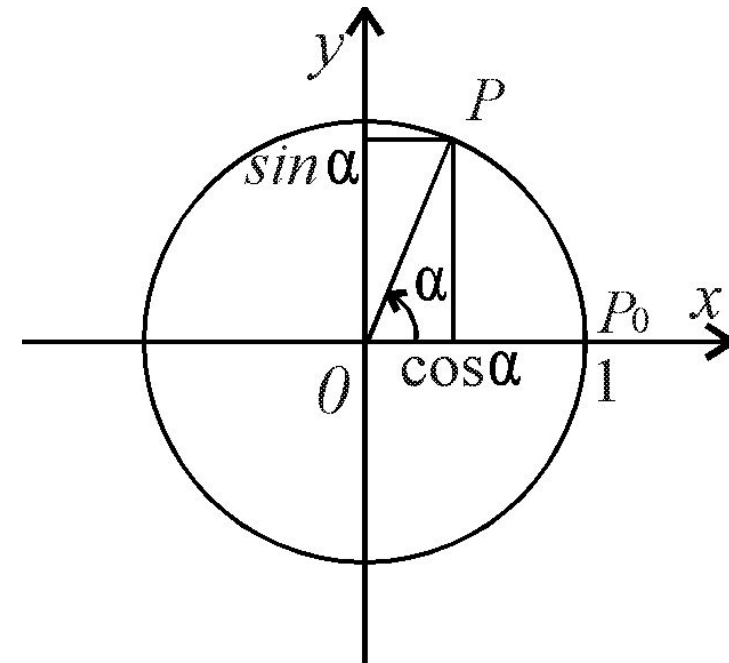
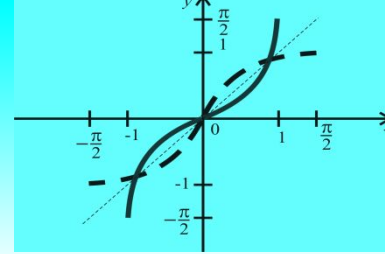
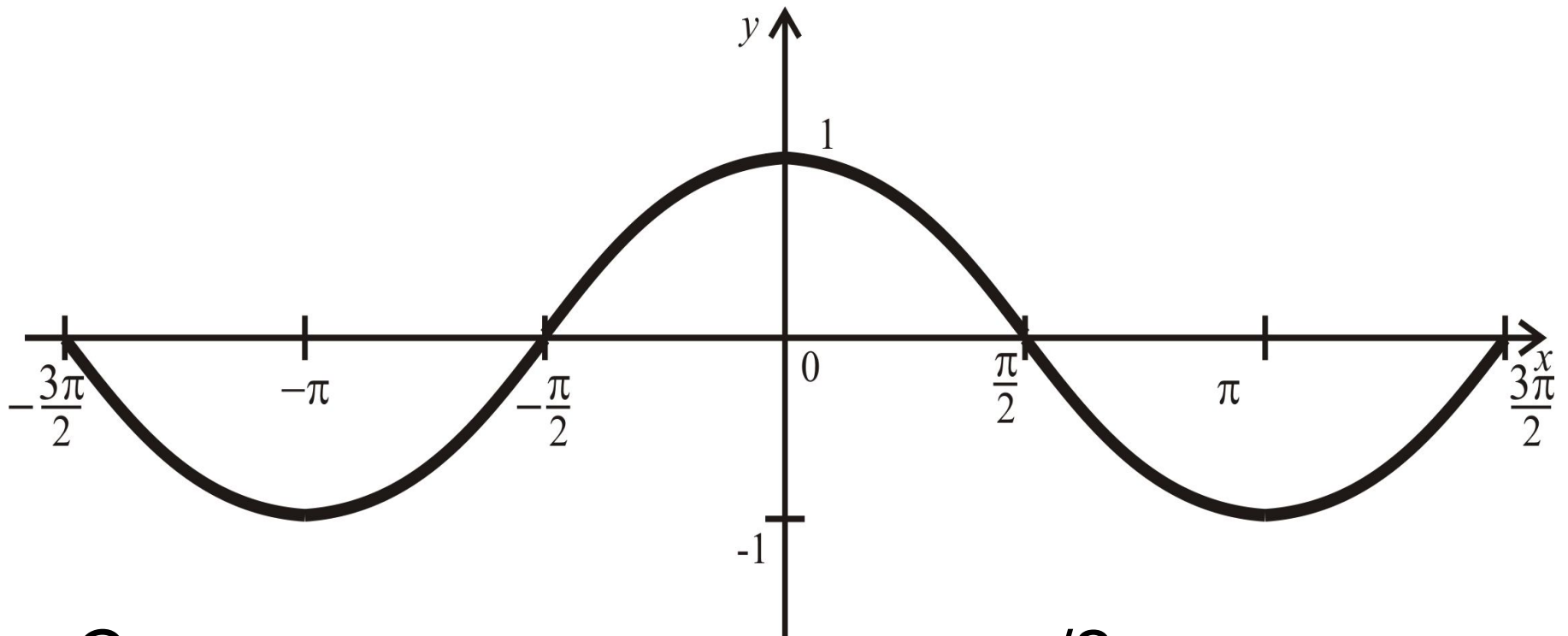


График функции $y = \cos x$

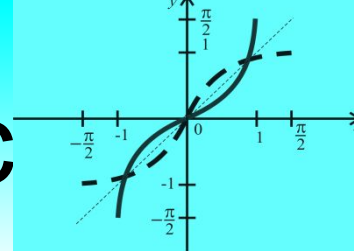


$$\cos(x) = \sin(\pi/2 + x) \text{ или } \cos(x) = \sin(x + \pi/2)$$



Сдвиг синусоиды влево на $\pi/2$

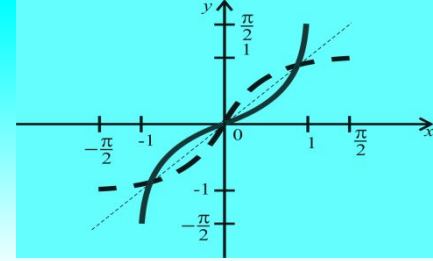
Функции тангенс и котангенс



Числовые функции, заданные равенствами $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, называются соответственно *тангенсом* и *котангенсом*.

Областью определения тангенса является множество всех чисел x , для которых $\cos x \neq 0$.

Областью определения котангенса является множество всех чисел x , для которых $\sin x \neq 0$.



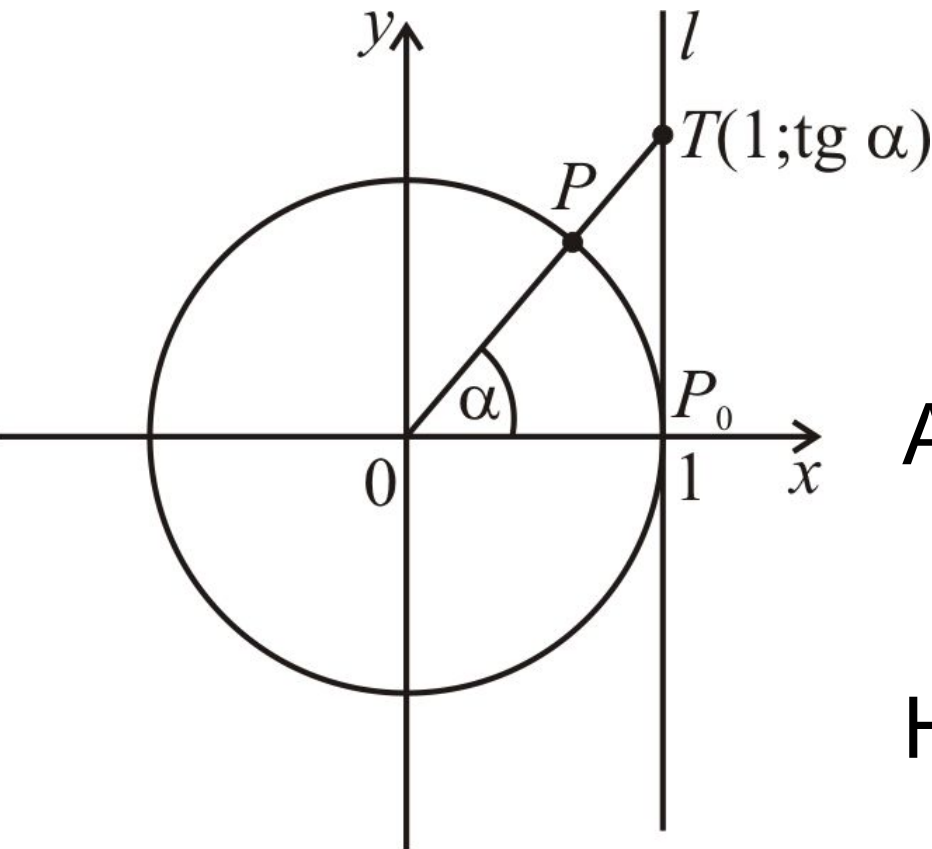
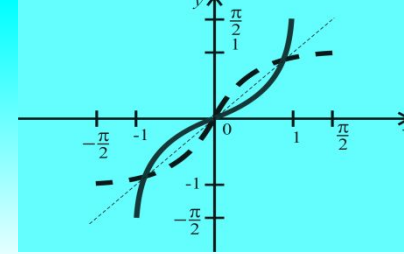
Множество значений тангенса и котангенса – вся числовая прямая, т.е. \mathbf{R} .

Тангенс и котангенс являются нечетными функциями

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Линия тангенсов



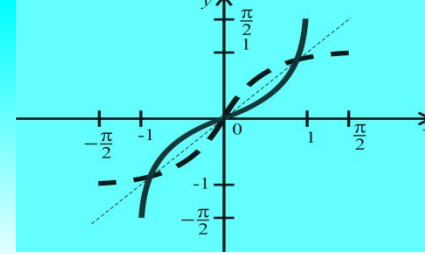
Прямая OP проходит через начало координат и точку P ($\cos \alpha$; $\sin \alpha$). Ее уравнение $y = \text{tg } \alpha \cdot x$.

Абсцисса точки T , лежащей на этой прямой, равна 1.

Найдем ординату из уравнения прямой.

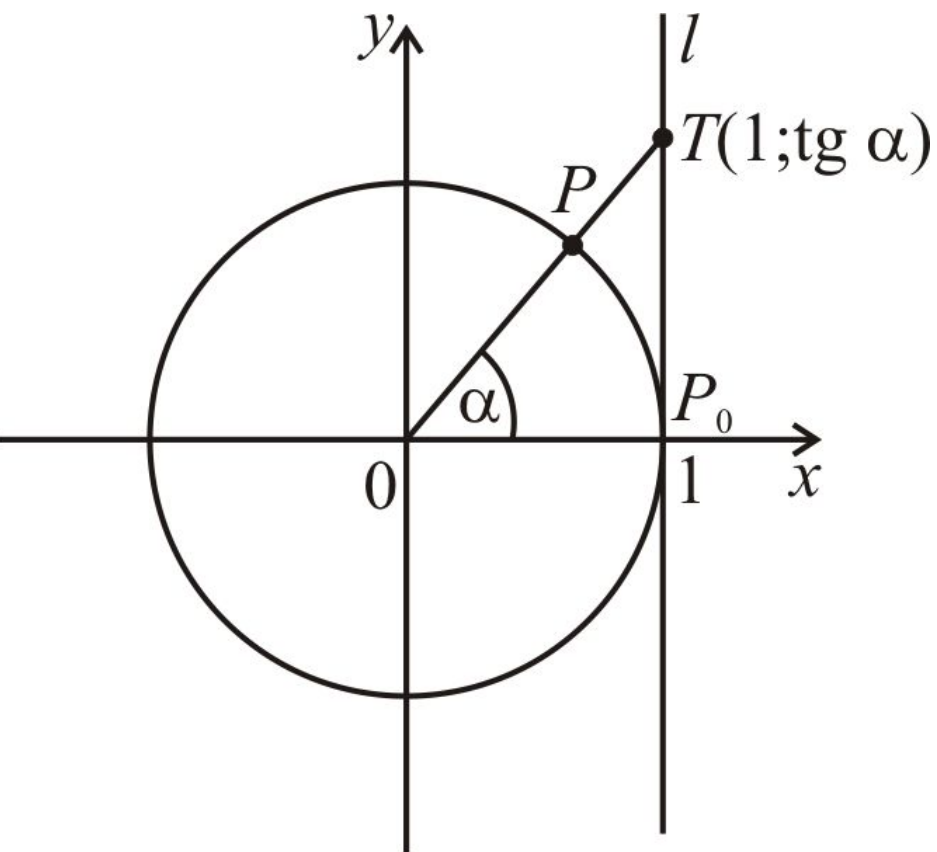
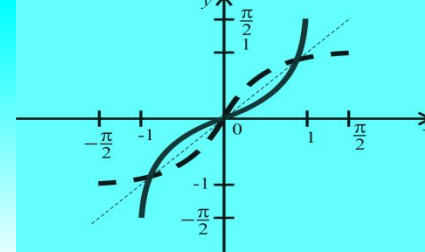
Получим $\text{tg } \alpha$.

Вывод



Чтобы найти значение тангенса для конкретного аргумента x , надо изобразить линию тангенсов, отложить на единичной окружности аргумент x , через полученную точку и начало координат провести прямую до пересечения с линией тангенсов, ордината полученной точки будет значением тангенса.

Табличные значения



$$\operatorname{tg} 0 = 0;$$

$$\operatorname{tg} \pi/4 = 1;$$

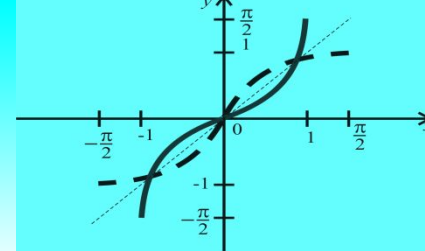
$$\operatorname{tg}(\pi/6) =$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3} .$$

Табличные значения



$$\operatorname{tg}(-\pi/4) = -1;$$

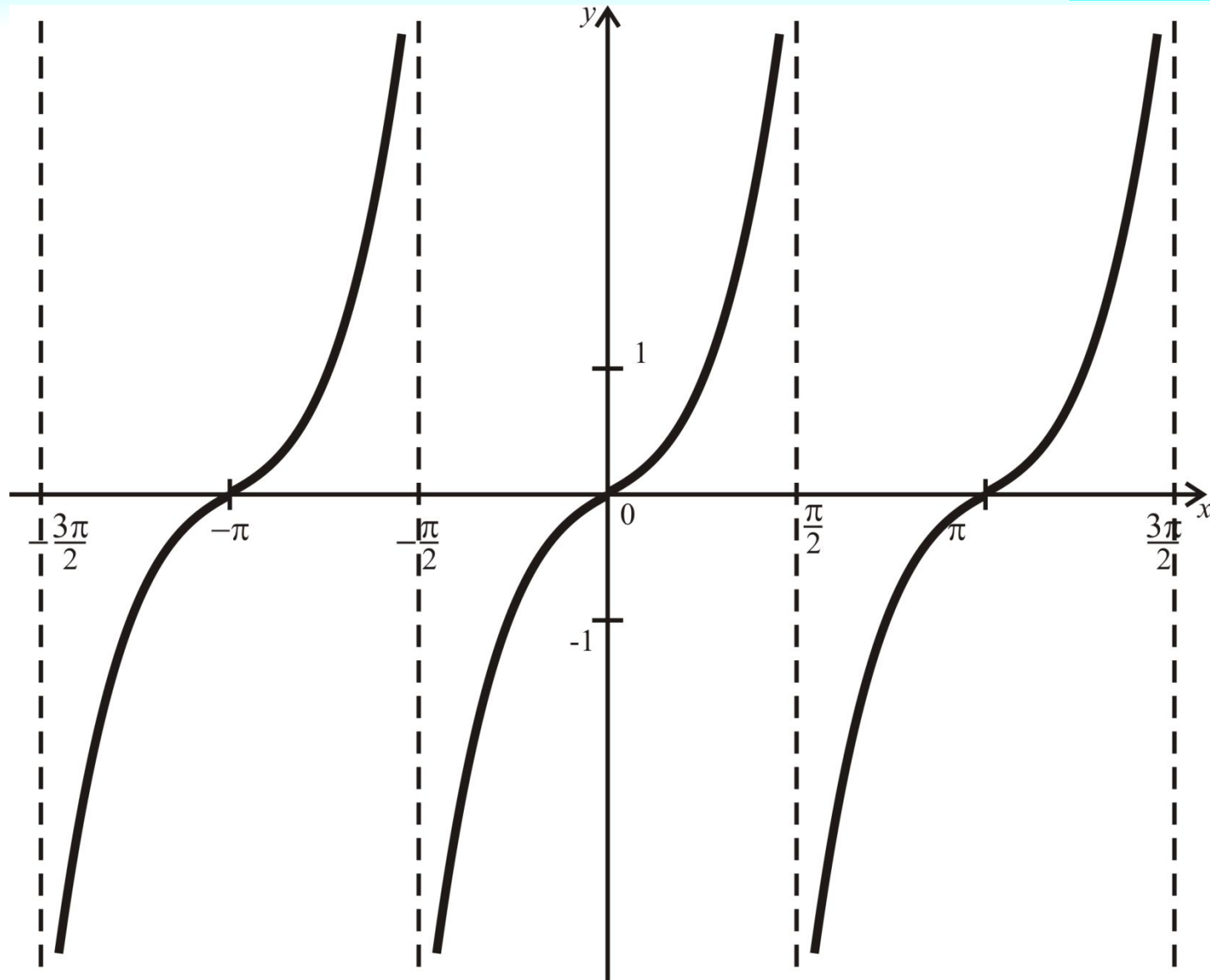
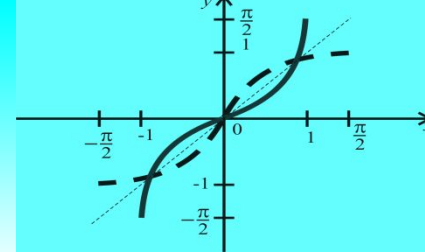
$$\operatorname{tg}(-\pi/6) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} ;$$

$$\operatorname{tg}(-\pi/3) = -\sqrt{3} .$$

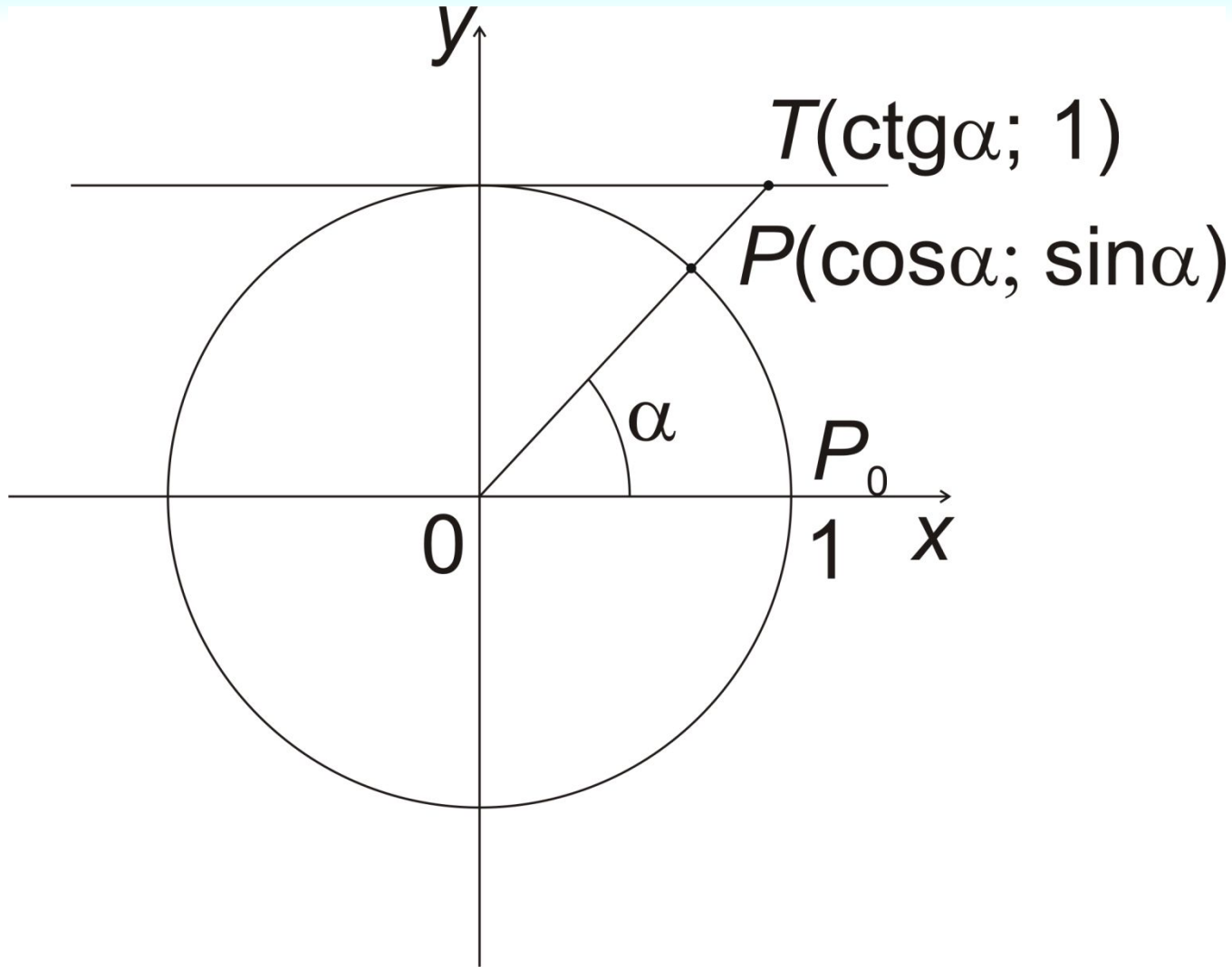
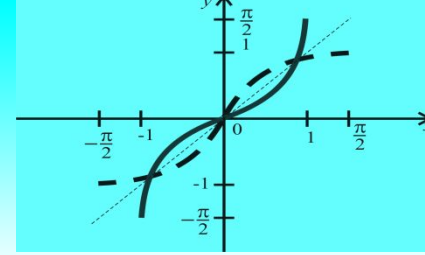
Период функции $y = \operatorname{tg}x$ равен πk ,
где $k \in \mathbf{Z}$.

Наименьший положительный период
равен π (при $k = 1$).

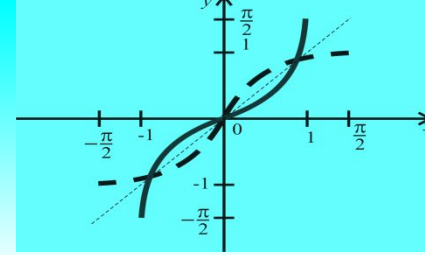
График функции $y = \operatorname{tg}x$



Линия котангенсов



Табличные значения



$\text{ctg } 0$ не существует.

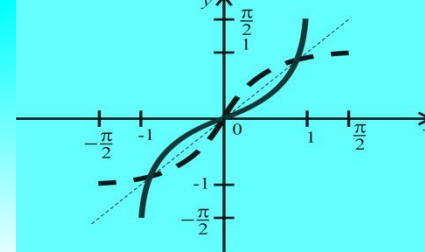
$$\text{ctg } (\pi/4) = 1;$$

$$\text{ctg}(\pi/6) = 1/\text{tg } (\pi/6) = \sqrt{3} \ ;$$

$$\text{ctg}(\pi/3) = 1/\text{tg}(\pi/3) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ ;$$

$$\text{ctg } (\pi/2) = 0.$$

Период функции $y = \operatorname{ctg} x$

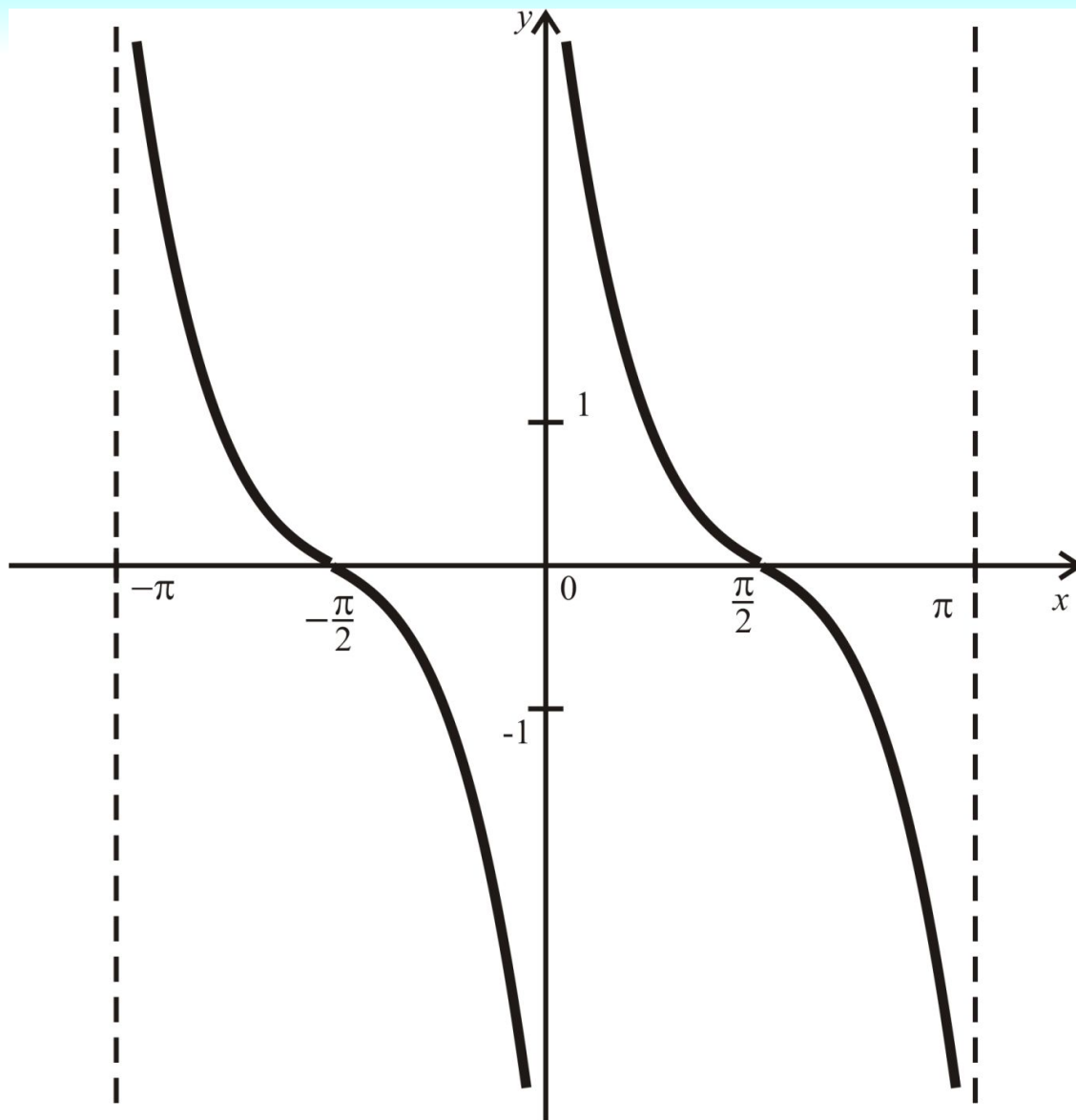
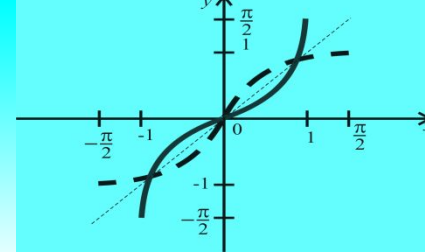


Период функции равен πk , где $k \in \mathbf{Z}$,
то есть

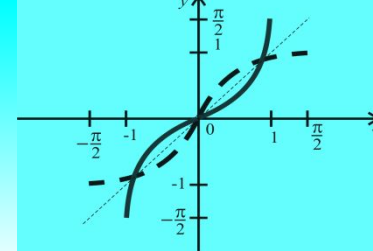
$$\operatorname{ctg}(x) = \operatorname{ctg}(x + \pi k), \text{ где } k \in \mathbf{Z}.$$

Наименьший положительный период
равен π (при $k = 1$).

График котангенса



Функции секонс и косеконс



Функция $y = 1/\cos x$ называется **секонсом**:

$$y = 1/\cos x = \sec x.$$

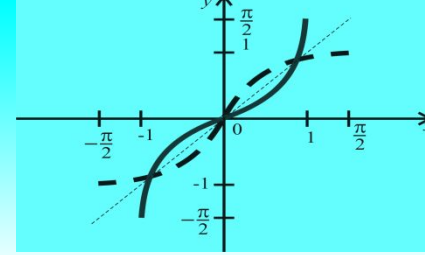
Ее область определения: все то множество x , где $\cos x \neq 0$, т.е.

$$x \neq \pi/2 + \pi k, \text{ где } k \in \mathbf{Z}.$$

Функция $y = 1/\sin x$ называется

косеконсом: $y = 1/\sin x = \operatorname{cosec} x.$

$\operatorname{Def}(1/\sin x)$ – это то множество x , где $\sin x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}.$



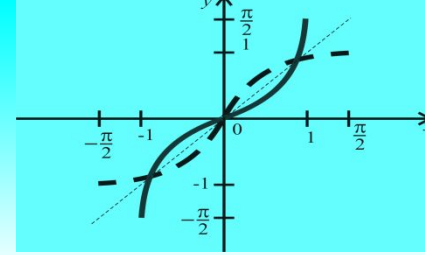
Шесть тригонометрических функций
 $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{sec} x$, $\operatorname{cosec} x$

Правило, как запомнить:

$$\sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1;$$

$$\cos x \cdot \operatorname{sec} x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$



Домашнее задание

1. Запомнить, какие функции нечетные, какие – четные
2. Запомнить графики синуса, косинуса и тангенса
3. Запомнить, что такое линия тангенса

