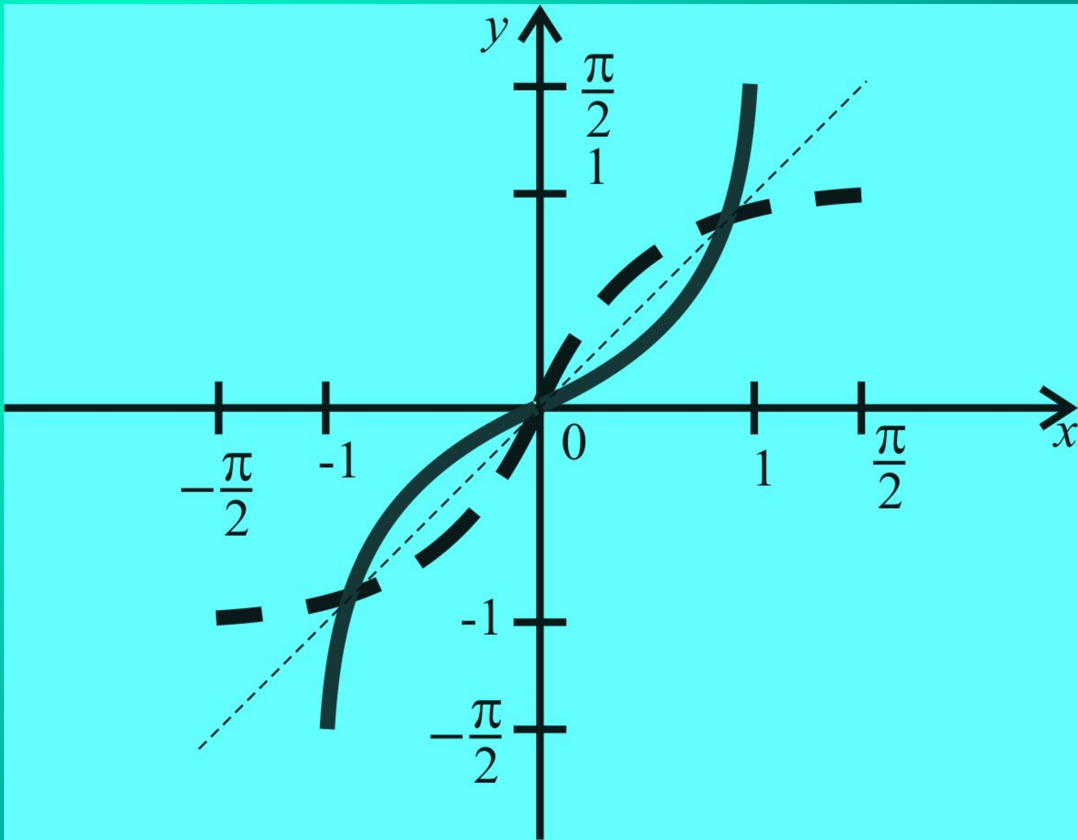
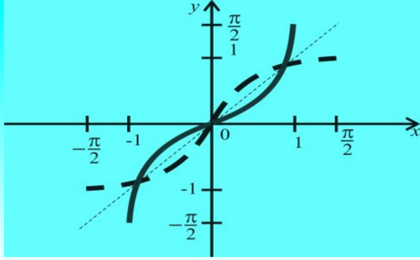
Тригонометрические функции

Автор
Календарева Н.Е.

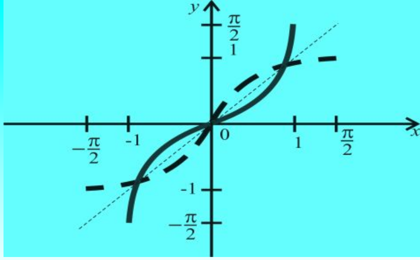


План



1. Функция *y* = sin*x*, ее исследование и график
2. Функция *y* = cos*x*, ее исследование и график
3. Функции тангенс и котангенс, их исследование и графики
4. Функции секонс и косеконс, определение

Функция *y* = sinx



Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой.

$\mathrm{Def}(\sin x) = (-\infty; +\infty)$;

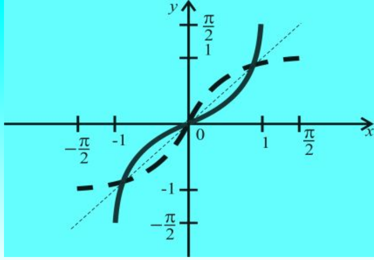
$E(\sin x) = [-1; 1]$.

Так как О.О. симметрична относительно 0, то проверим равенство

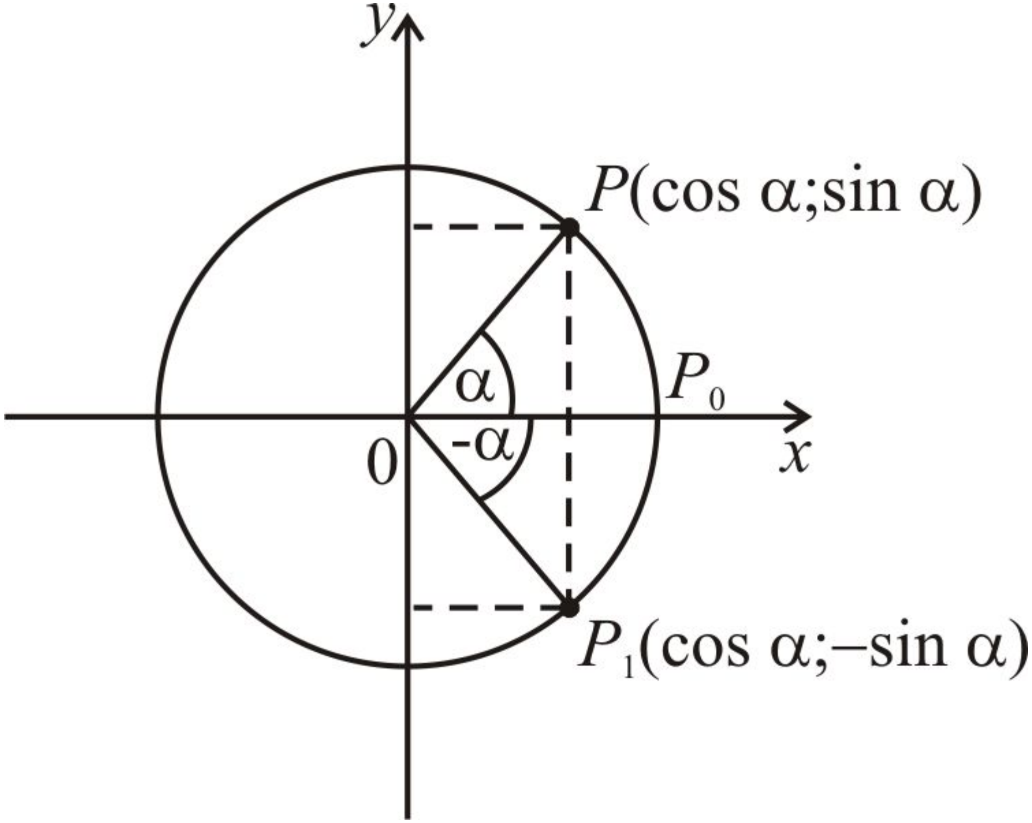
$\sin(-x) = -\sin x$.

Функция нечетная. В самом деле.

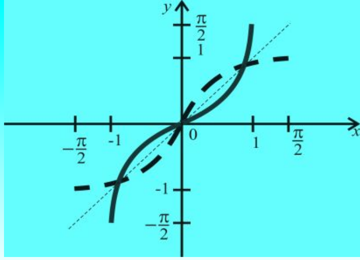
Нечетность функции
$y = \sin x$



$$\sin(-x) = -\sin x;$$



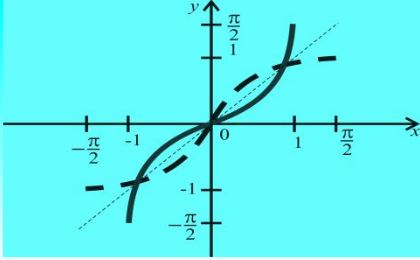
Периодические функции



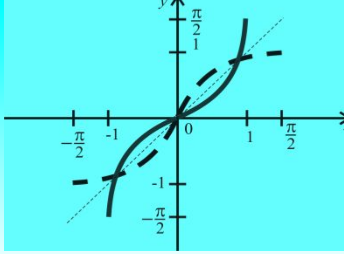
Посмотрим на единичную окружность и заметим, что sin(*x* + 2π) = sin(*x*).

Аналогично sin(*x* − 2π) = sin(*x*). О таких функциях говорят, что они *периодические* с *периодом* 2π. Если сделать несколько оборотов, например 2π·*n*, где *n* є **Z**, то значения функции синуса не изменится:

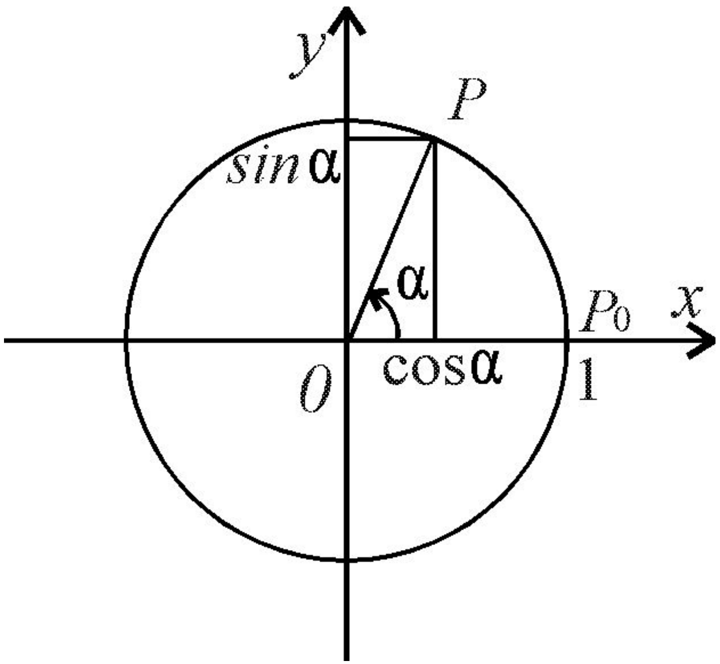
sin(*x* + 2π*n*) = sin(*x*). Число 2π*n* также *период* функции. Число 2π – *наименьший положительный период*.



Максимальное и минимальное значения



Функция y = sin$x$ принимает максимальное значение, равное 1. Это в точках x = π/2 + 2πk,



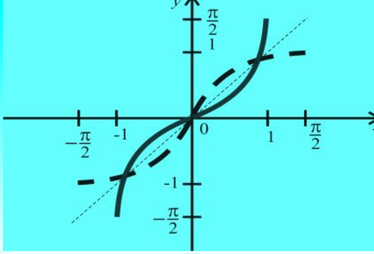
где $k \in \mathbf{Z}$.

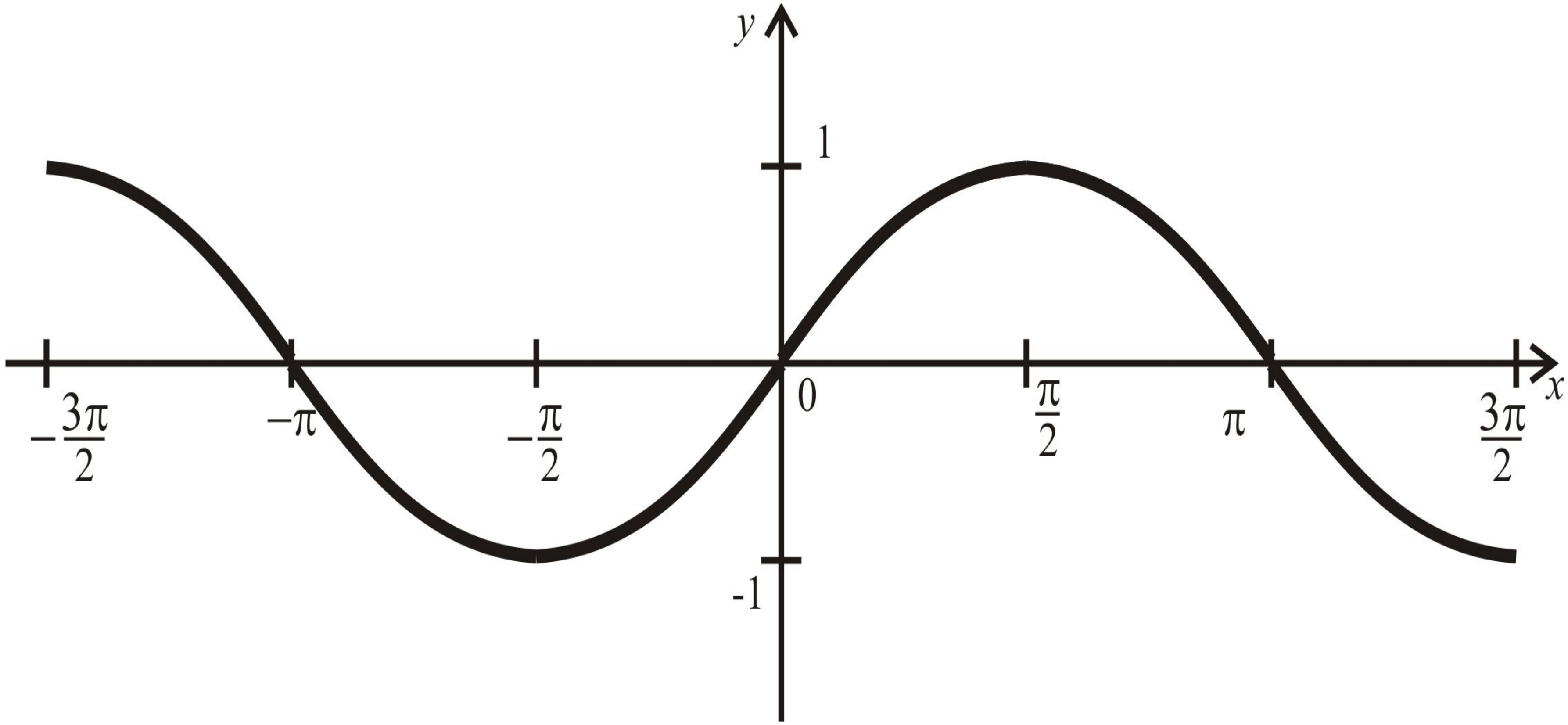
И минимальное значение,

равное –1, в точках

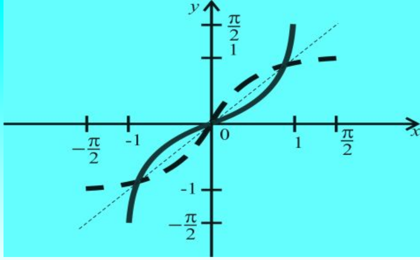
x = – π/2 + 2πk, где $k \in \mathbf{Z}$.

График функции y = sin$x$





Функция y = cos$x$



Функция y = cos$x$ определена на всей числовой прямой.

Def(cos$x$) = $(-\infty; +\infty)$;

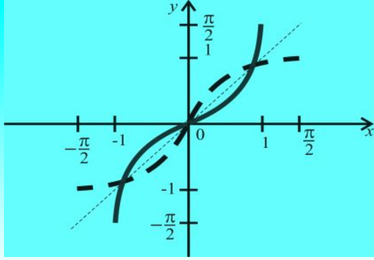
E(cos$x$) = $[-1; 1]$.

Так как О.О. симметрична относительно 0, то проверим равенство

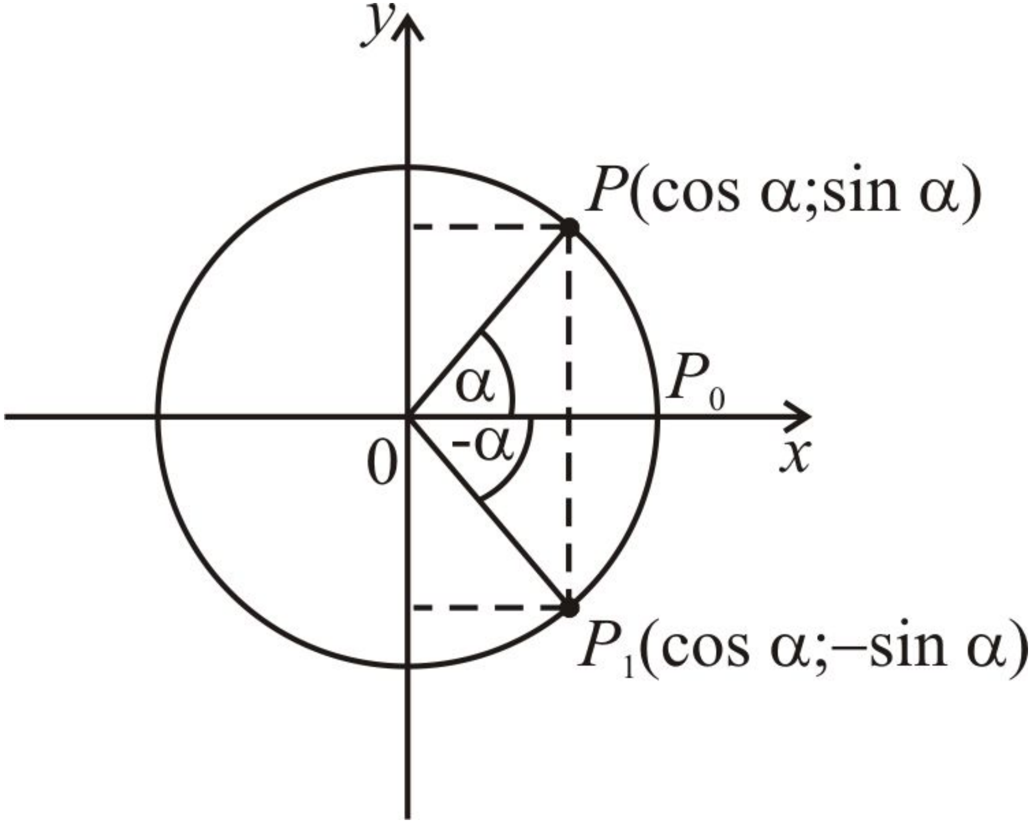
cos $(-x)$ = cos$x$.

Функция четная. В самом деле.

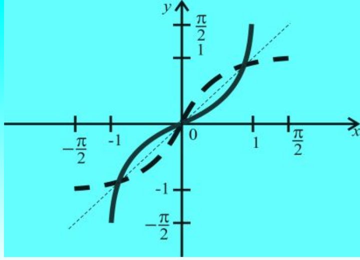
Четность функции
y = cos*x*



$$\cos(-x) = \cos x;$$



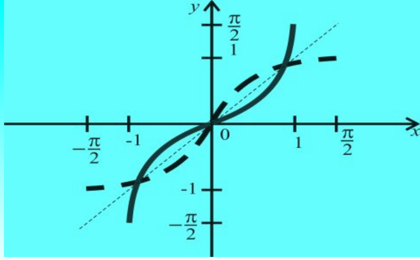
Периодичность y = cos$x$



Посмотрим на единичную окружность и заметим, что cos (x + 2π) = cos (x).

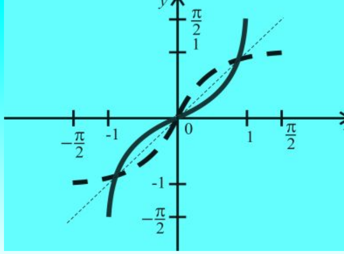
Аналогично cos (x − 2π) = cos (x).

О таких функциях говорят, что они ***периодические*** с ***периодом*** 2π. Если сделать несколько оборотов, например 2π·n, где $n \in \mathbf{Z}$, то значения функции косинуса не изменится:



$\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$. Число $2\pi n$ также *период* функции. Число 2π – *наименьший положительный период*.

Максимальное и минимальное значения



Функция $y = \cos x$ принимает максимальное значение, равное 1. Это в точках $x = 2\pi k$,

где $k \in \mathbf{Z}$.

И минимальное значение,

равное –1, в точках

$x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

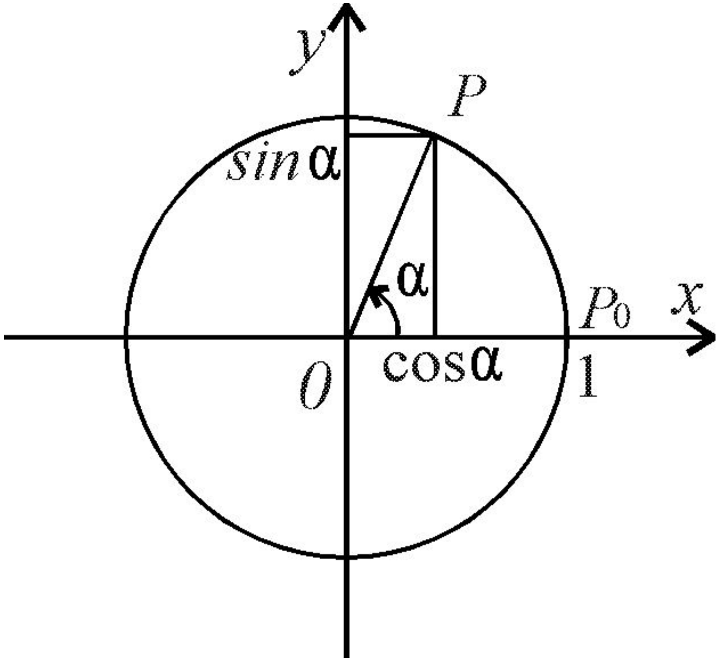
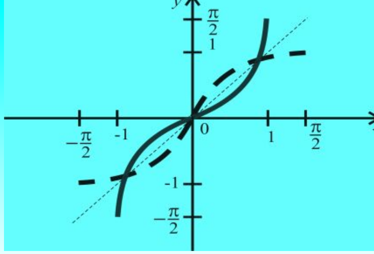
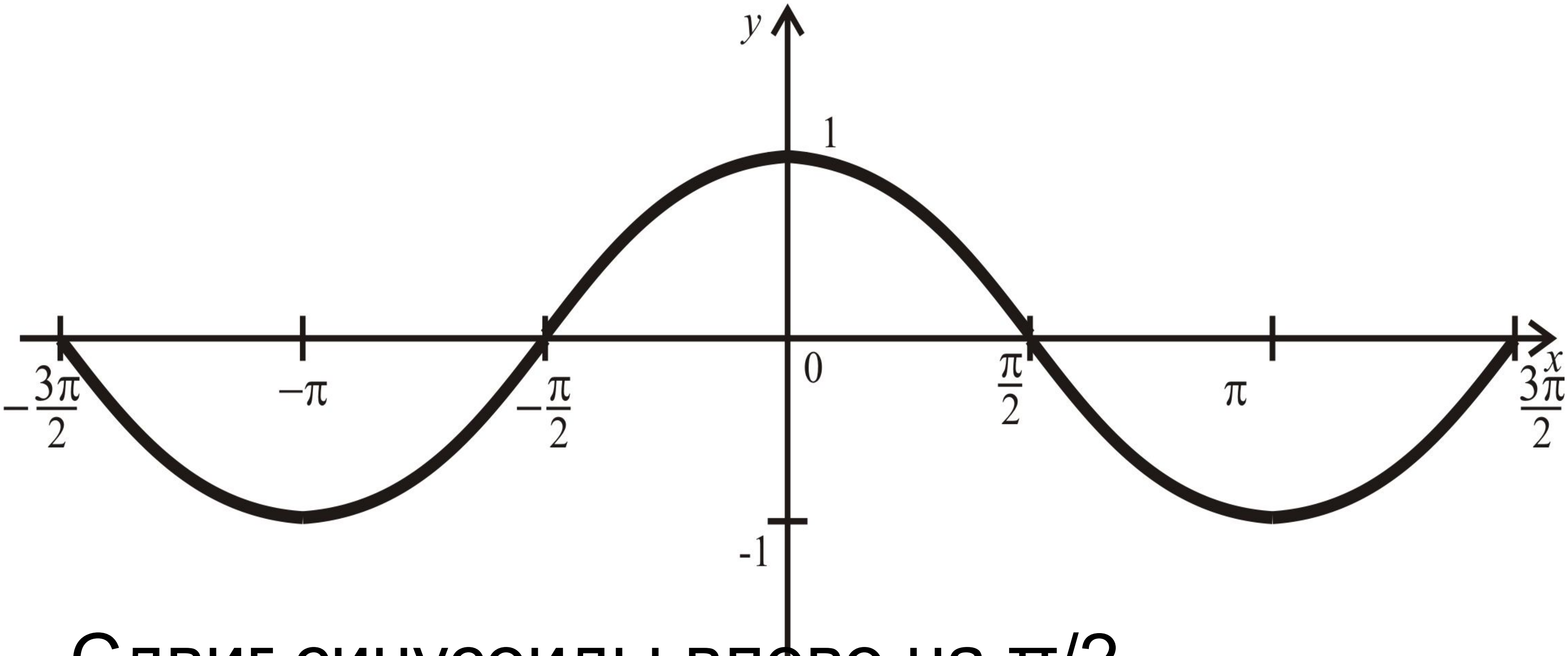


График функции $y = \cos x$

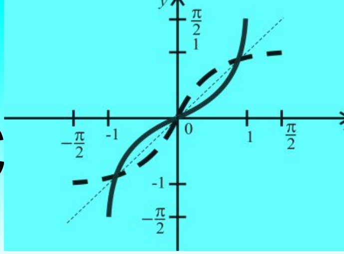


$\cos(x) = \sin(\pi/2 + x)$ или $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$



Сдвиг синусоиды влево на π/2

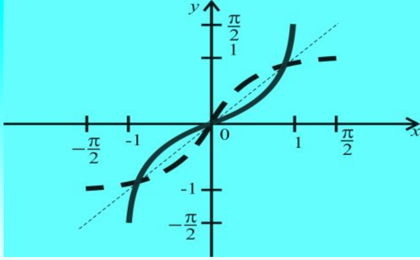
Функции тангенс и котангенс



Числовые функции, заданные равенствами $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, называются соответственно *тангенсом* и *котангенсом*.

Областью определения тангенса является множество всех чисел x, для которых $\cos x \neq 0$.

Областью определения котангенса является множество всех чисел х, для которых $\sin x \neq 0$.



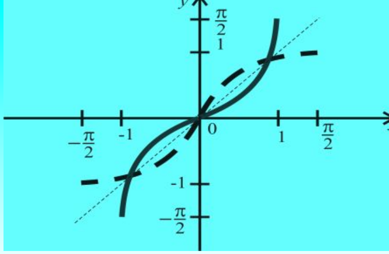
Множество значений тангенса и котангенса – вся числовая прямая, т.е. **R**.

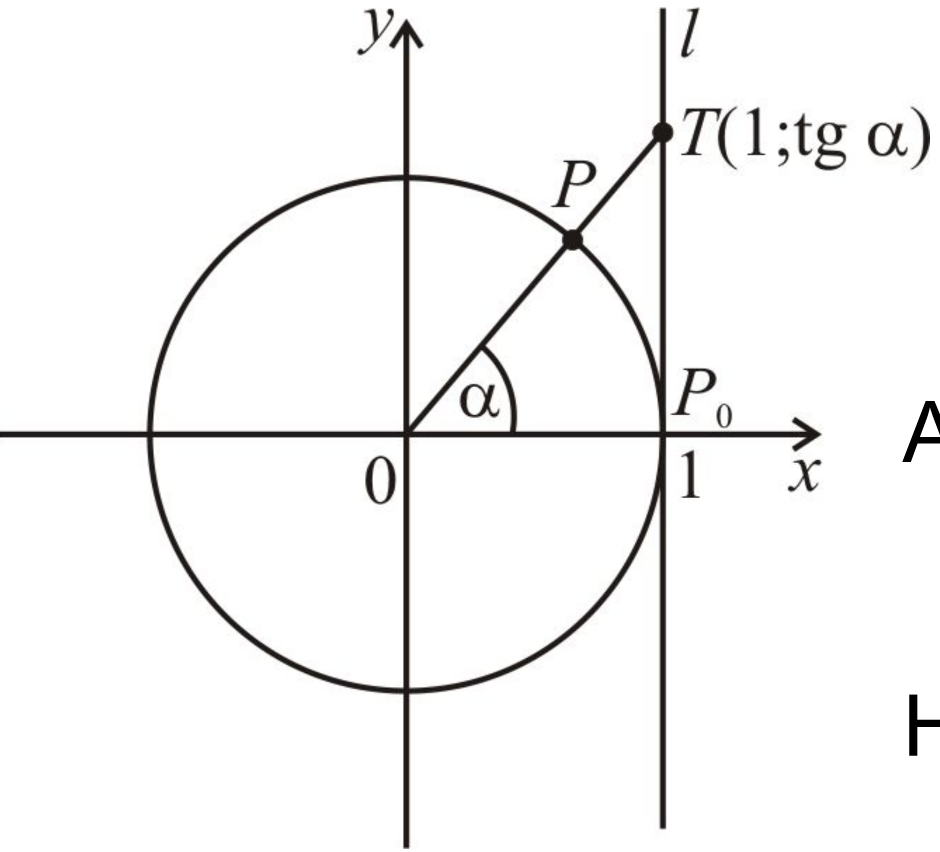
Тангенс и котангенс являются нечетными функциями

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\ \mathrm{tg}\ \alpha;$$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\ \mathrm{ctg}\ \alpha.$$

Линия тангенсов





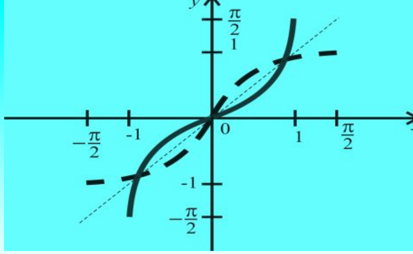
Прямая *OP* проходит через начало координат и точку *P* (cos*α* ; sin*α*). Ее уравнение *y* = tg α·*x*.

Абсцисса точки T, лежащей на этой прямой, равна 1.

Найдем ординату из уравнения прямой.

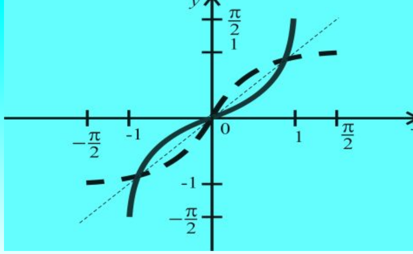
Получим tg α.

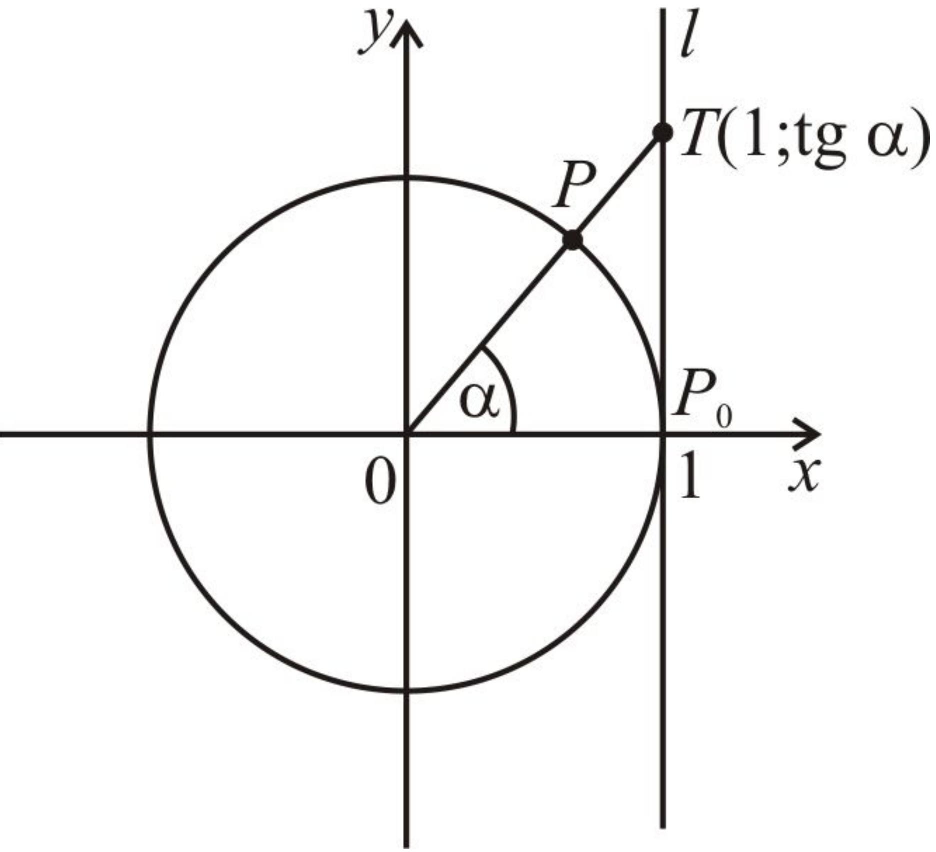
Вывод



Чтобы найти значение тангенса для конкретного аргумента *x*, надо изобразить линию тангенсов, отложить на единичной окружности аргумент х, через полученную точку и начало координат провести прямую до пересечения с линией тангенсов, ордината полученной точки будет значением тангенса.

Табличные значения





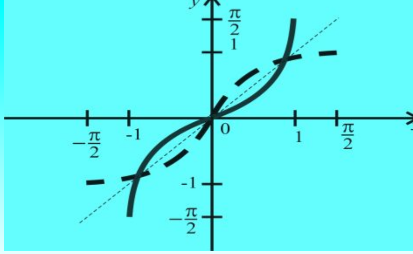
$\operatorname{tg} 0 = 0;$

$\operatorname{tg} \pi/4 = 1;$

$$\operatorname{tg}(\pi/6) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}.$$

Табличные значения



$\mathrm{tg}(-\pi/4) = -1;$

$\mathrm{tg}(-\pi/6) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3};$

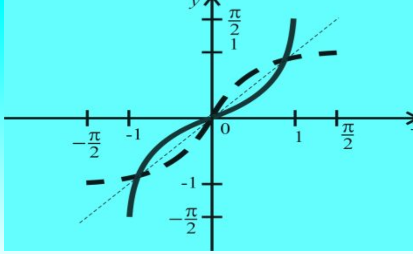
$\mathrm{tg}(-\pi/3) = -\sqrt{3}.$

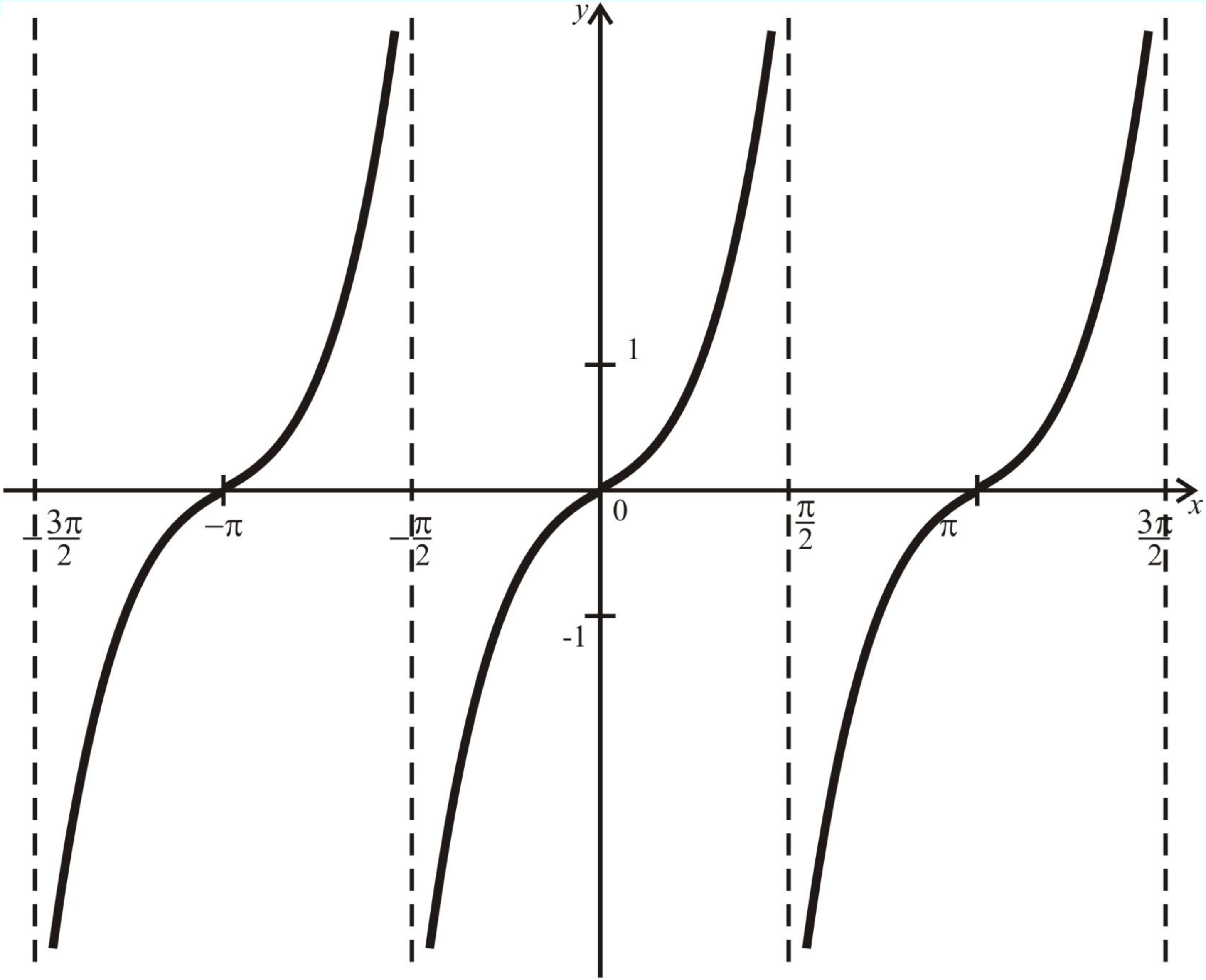
Период функции $y = \mathrm{tg}x$ равен πk,

где $k \in \mathbf{Z}$.

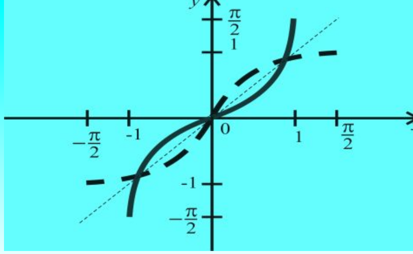
Наименьший положительный период равен π (при $k = 1$).

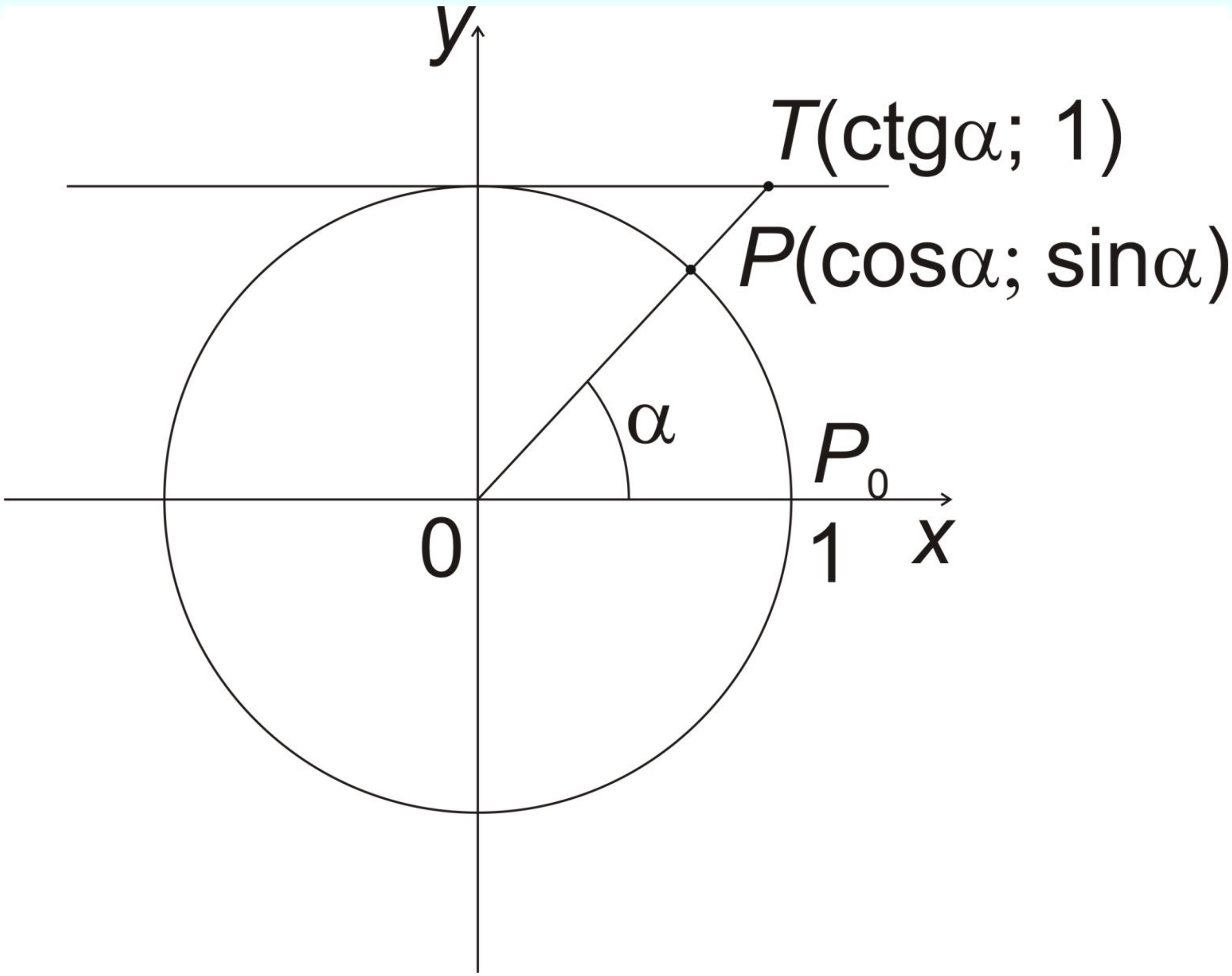
График функции y = tg$x$



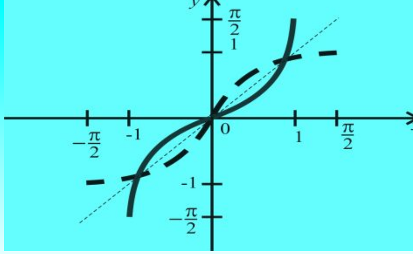


Линия котангенсов





Табличные значения



ctg 0 не существует.

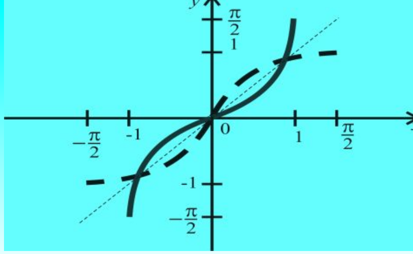
ctg (π/4) = 1;

ctg(π/6) = 1/tg (π/6) = $\sqrt{3}$;

ctg(π/3) = 1/tg(π/3) = $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

ctg (π/2) = 0.

Период функции y = ctg$x$



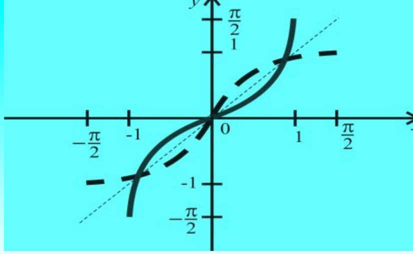
Период функции равен πk, где $k \in \boldsymbol{Z}$,

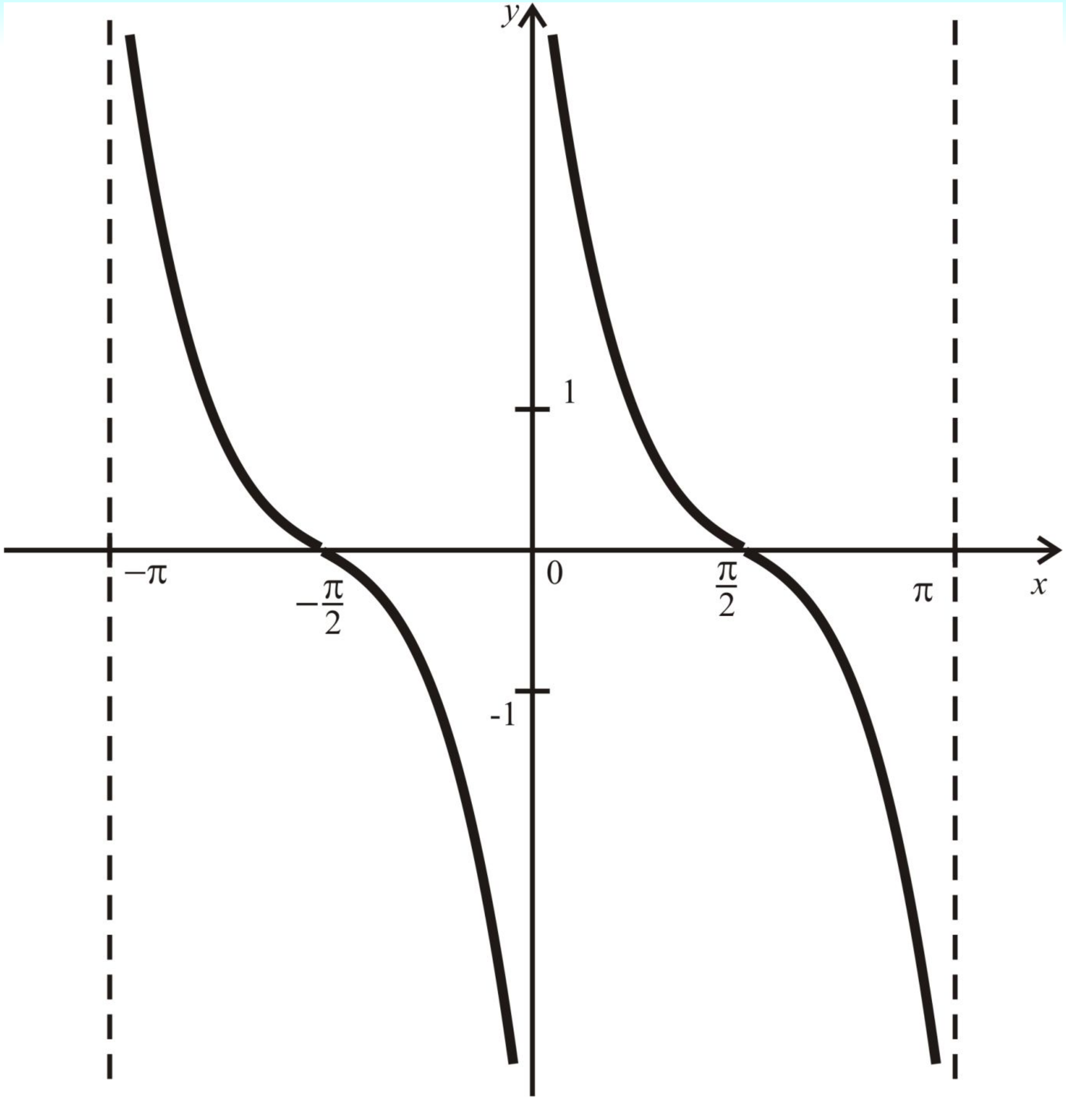
то есть

ctg(x) = ctg(x + πk), где $k \in \boldsymbol{Z}$.

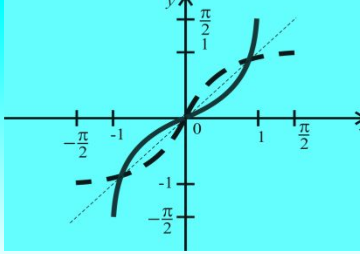
Наименьший положительный период равен π (при k = 1).

График котангенса





Функции секонс и косеконс



Функция $y = 1/\cos x$ называется *секонсом*:

$$y = 1/\cos x = \sec x.$$

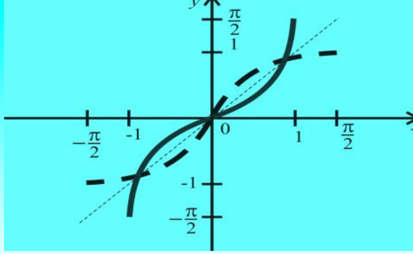
Ее область определения: все то множество x, где $\cos x \neq 0$, т.е.

$$x \neq \pi/2 + \pi k, \text{ где } k \in \mathbf{Z}.$$

Функция $y = 1/\sin x$ называется *косеконсом*: $y = 1/\sin x = \operatorname{cosec} x$.

Def($1/\sin x$) – это то множество x, где

$\sin x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.



Шесть тригонометрических функций

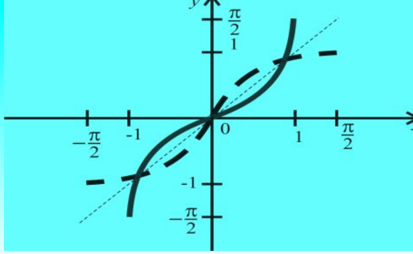
$\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}\,x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\,x$

Правило, как запомнить:

$$\sin x \cdot \mathrm{cosec}\,x = 1;$$

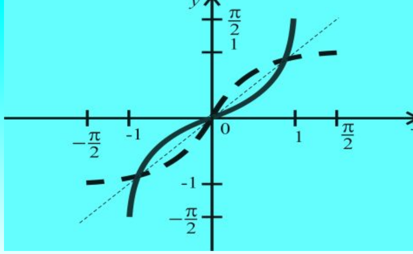
$$\cos x \cdot \sec x = 1;$$

$$\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,x = 1.$$



Домашнее задание

1. Запомнить, какие функции нечетные, какие – четные
2. Запомнить графики синуса, косинуса и тангенса
3. Запомнить, что такое линия тангенса


y
π/2
1
0
-1
1
-π/2
π/2
-1
-π/2