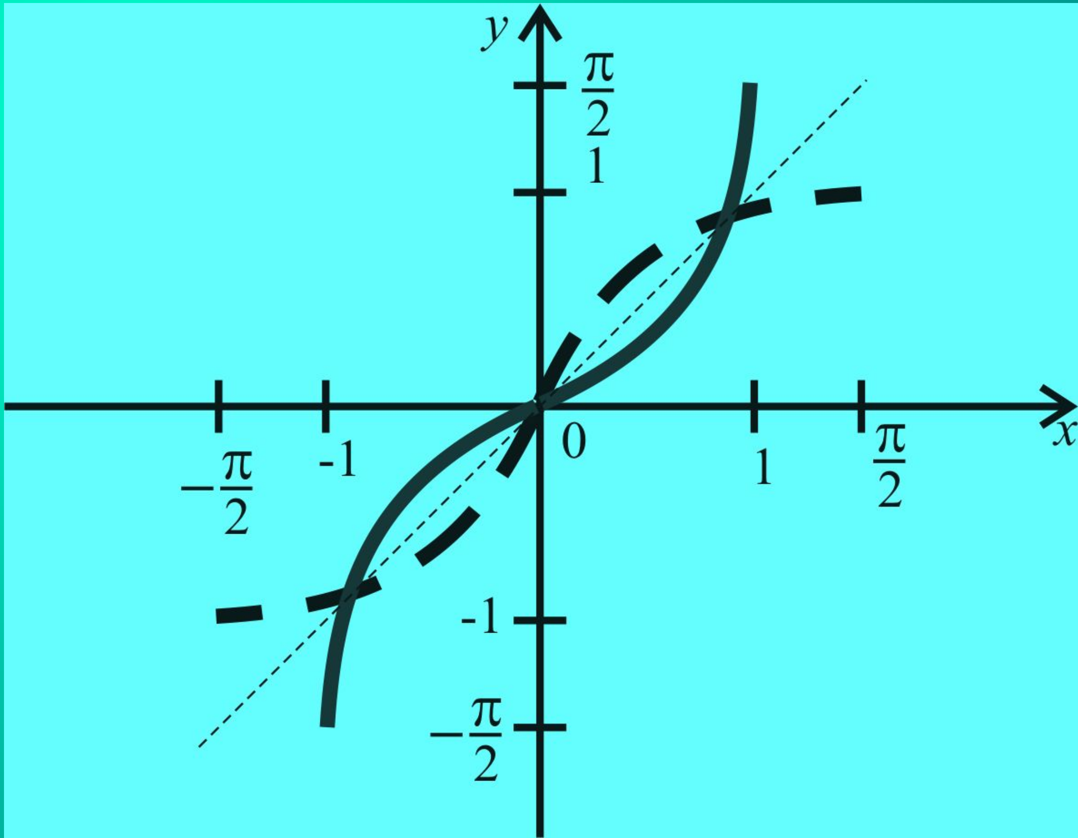
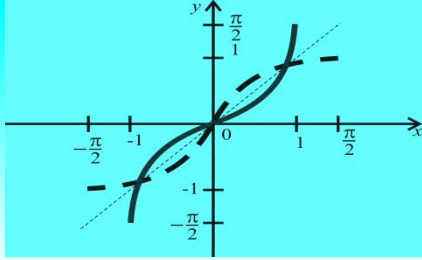
Тригонометрические функции



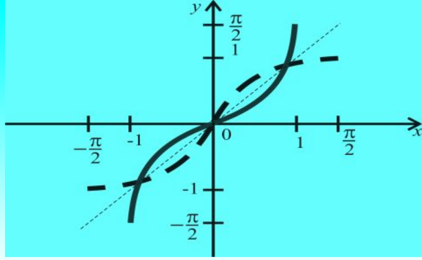
Автор
Календарева Н.Е.

План



1. Функция $y = \sin x$, ее исследование и график
2. Функция $y = \cos x$, ее исследование и график
3. Функции тангенс и котангенс, их исследование и графики
4. Функции секонс и косеконс, определение

Функция *y* = sin*x*



Функция *y* = sin*x* определена на всей числовой прямой.

Def(sin*x*) = (– ∞; + ∞);

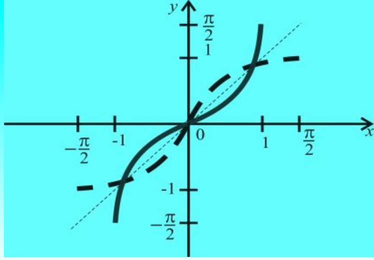
E(sin*x*) = [–1; 1].

Так как О.О. симметрична относительно 0, то проверим равенство

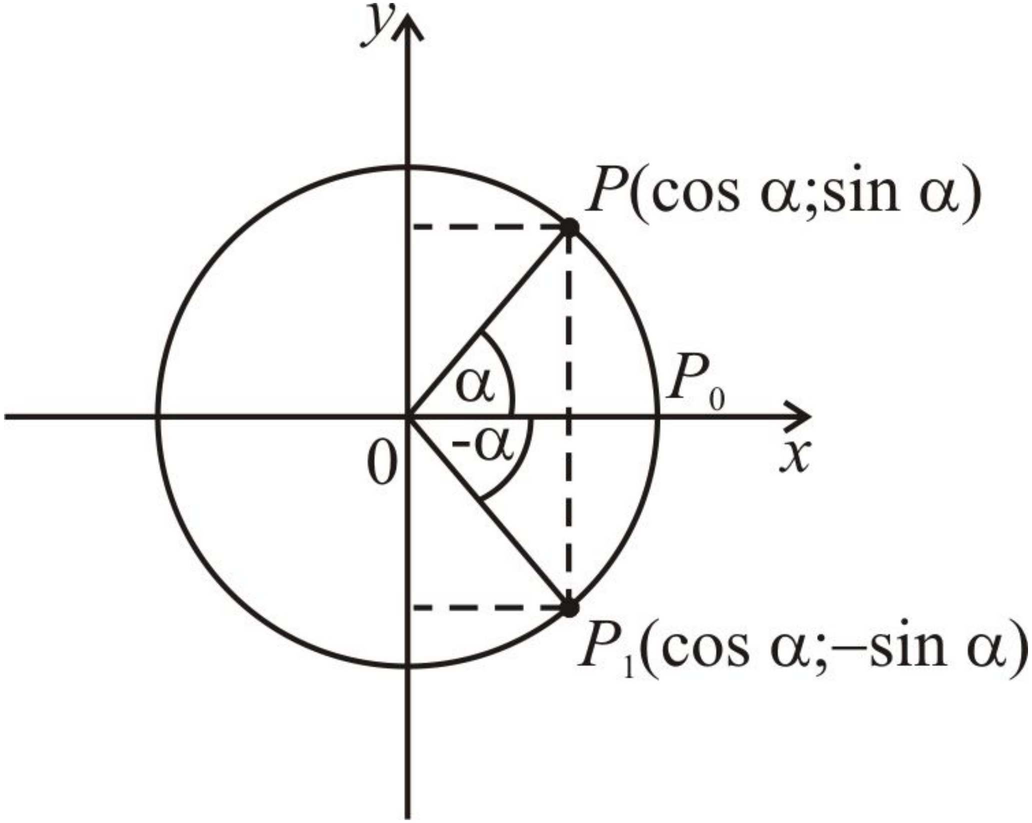
sin(–*x*) = –sin*x.*

Функция нечетная. В самом деле.

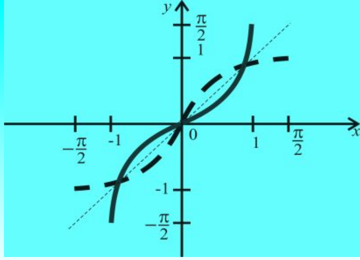
Нечетность функции
$y = \sin x$



$$\sin(-x) = -\sin x;$$

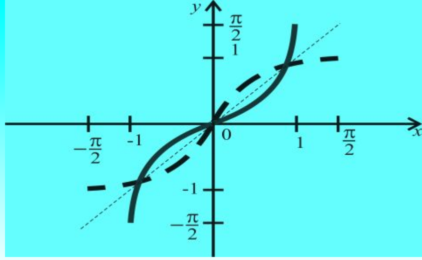


Периодические функции



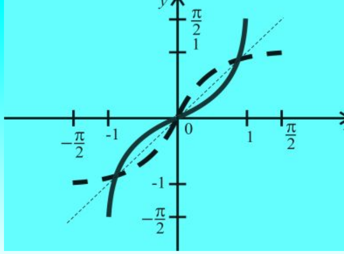
Посмотрим на единичную окружность и заметим, что sin(x + 2π) = sin(x).

Аналогично sin(x − 2π) = sin(x). О таких функциях говорят, что они *периодические* с *периодом* 2π. Если сделать несколько оборотов, например 2π·n, где n є **Z**, то значения функции синуса не изменится:



$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)$. Число $2\pi n$ также *период* функции. Число 2π – *наименьший положительный период*.

Максимальное и минимальное значения



Функция y = sin$x$ принимает максимальное значение, равное 1. Это в точках $x = \pi/2 + 2\pi k$,

где $k \in \mathbf{Z}$.

И минимальное значение,

равное –1, в точках

$x = -\pi/2 + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

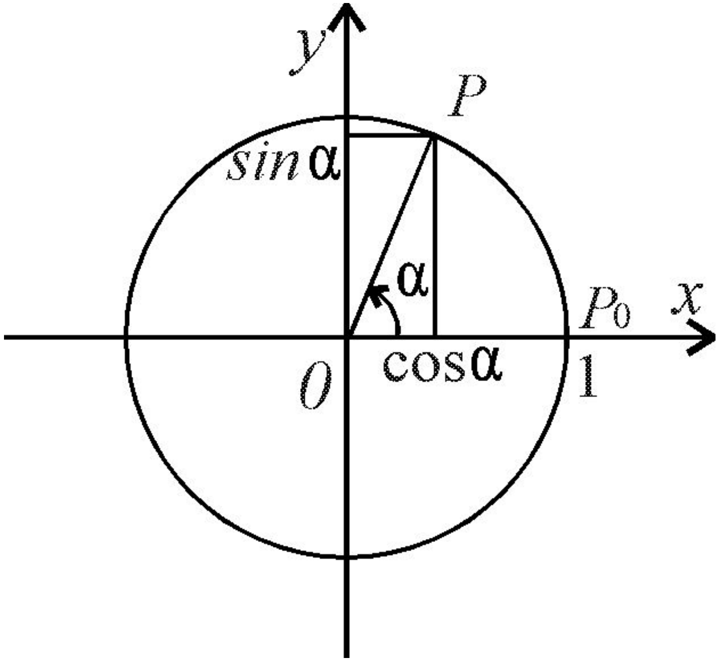
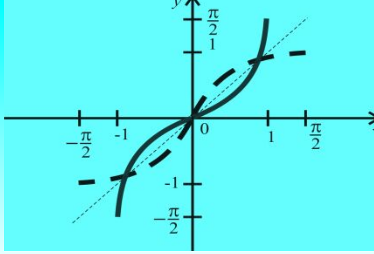
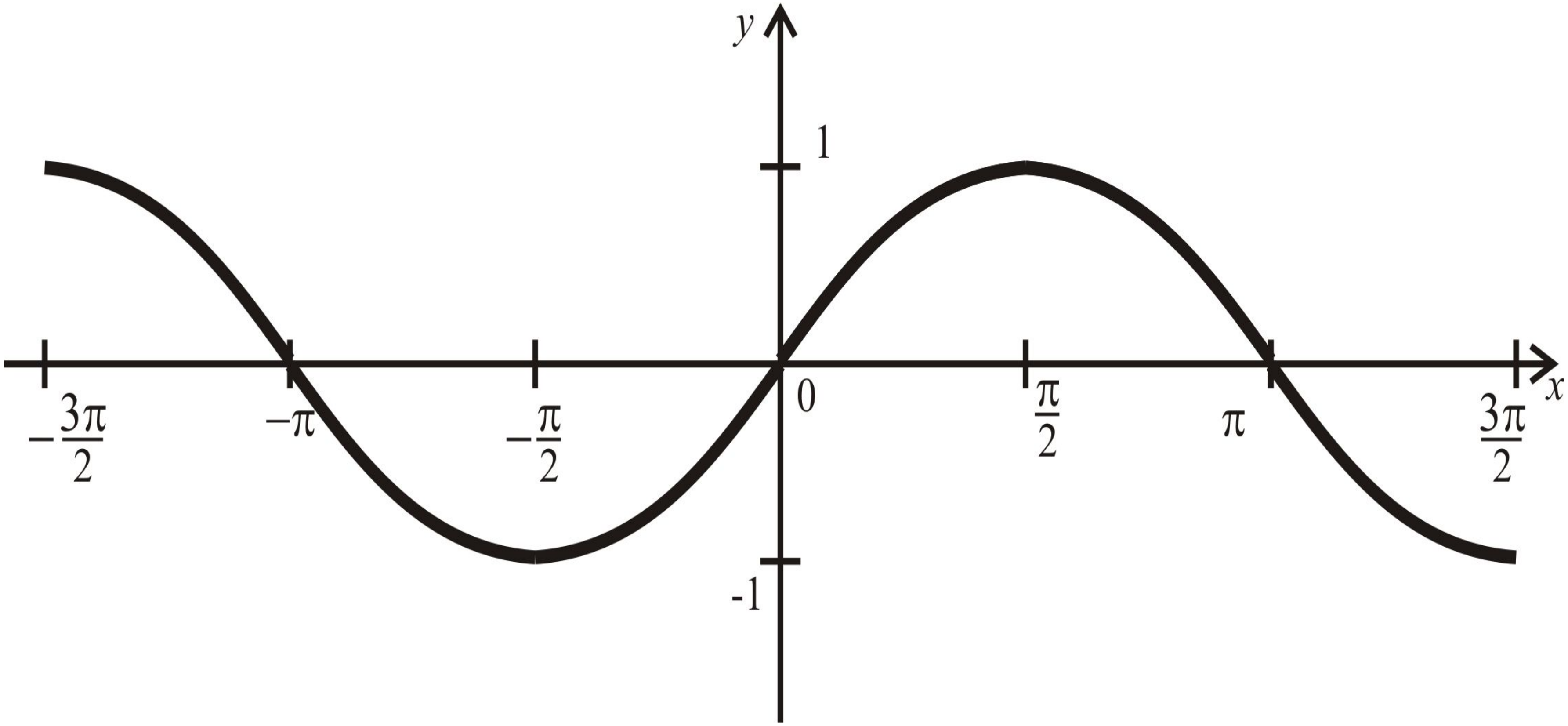
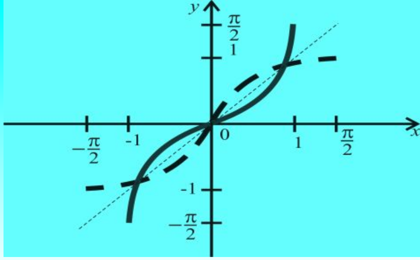


График функции y = sin$x$





Функция $y = \cos x$



Функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой.

$\mathrm{Def}(\cos x) = (-\infty; +\infty)$;

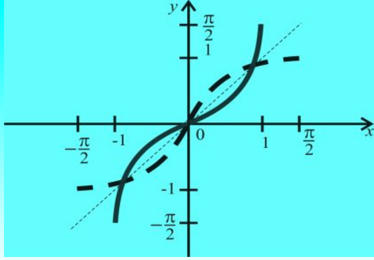
$E(\cos x) = [-1; 1]$.

Так как О.О. симметрична относительно 0, то проверим равенство

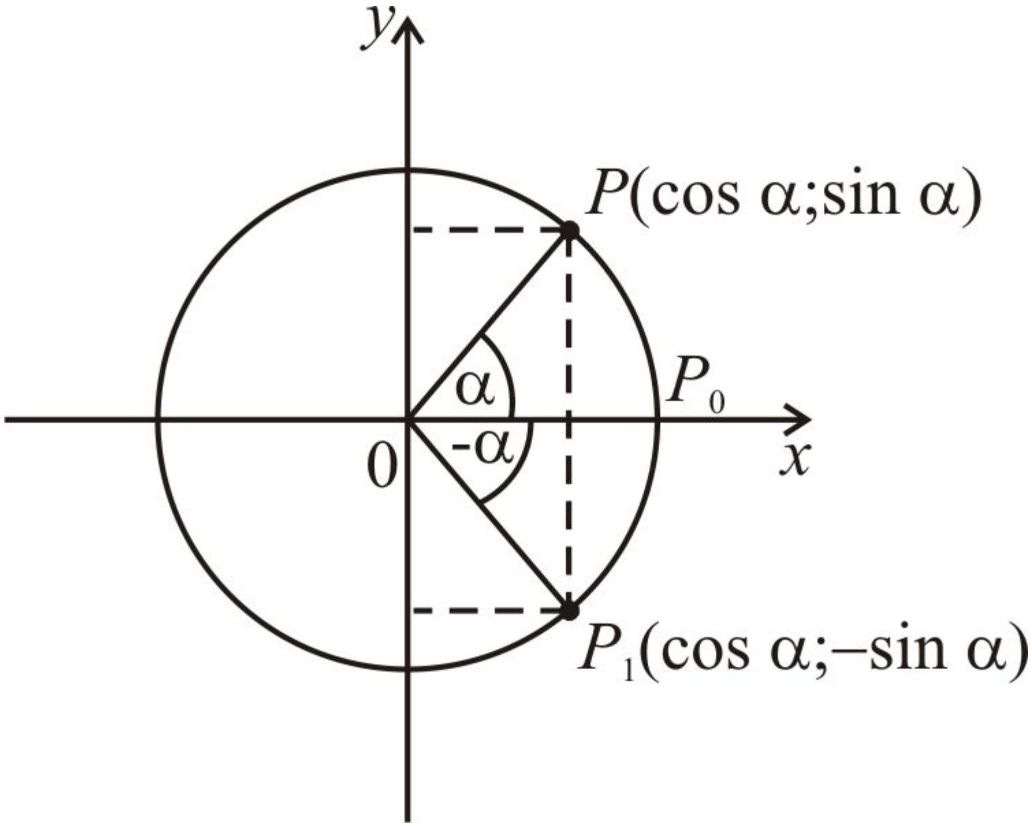
$\cos(-x) = \cos x$.

Функция четная. В самом деле.

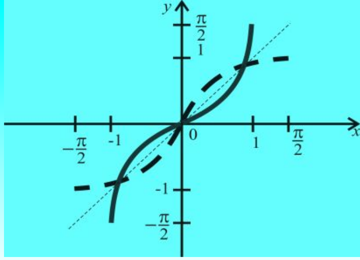
Четность функции
$y = \cos x$



$$\cos(-x) = \cos x;$$



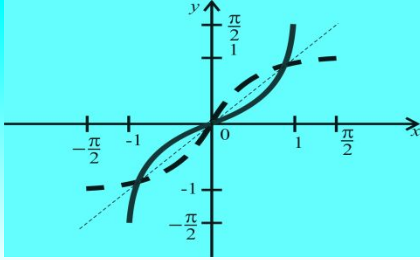
Периодичность *y* = cos*x*



Посмотрим на единичную окружность и заметим, что $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

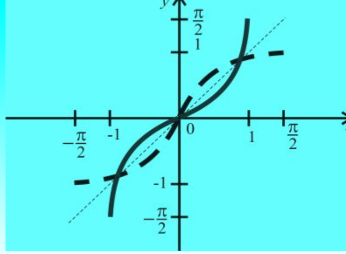
Аналогично $\cos(x - 2\pi) = \cos(x)$.

О таких функциях говорят, что они *периодические* с *периодом* 2π. Если сделать несколько оборотов, например $2\pi \cdot n$, где $n \in \mathbf{Z}$, то значения функции косинуса не изменится:



cos(x + 2πn) = cos (x). Число 2πn также *период* функции. Число 2π – *наименьший положительный период*.

Максимальное и минимальное значения



Функция y = cos$x$ принимает максимальное значение, равное 1. Это в точках $x = 2\pi k$,

где $k \in \mathbf{Z}$.

И минимальное значение,

равное –1, в точках

$x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

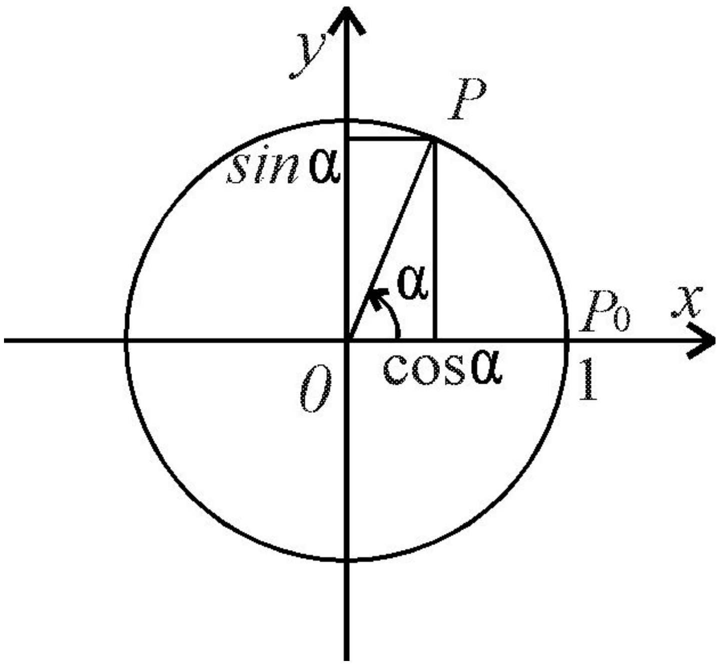
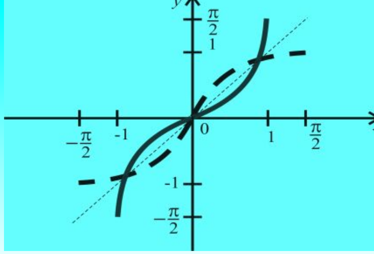
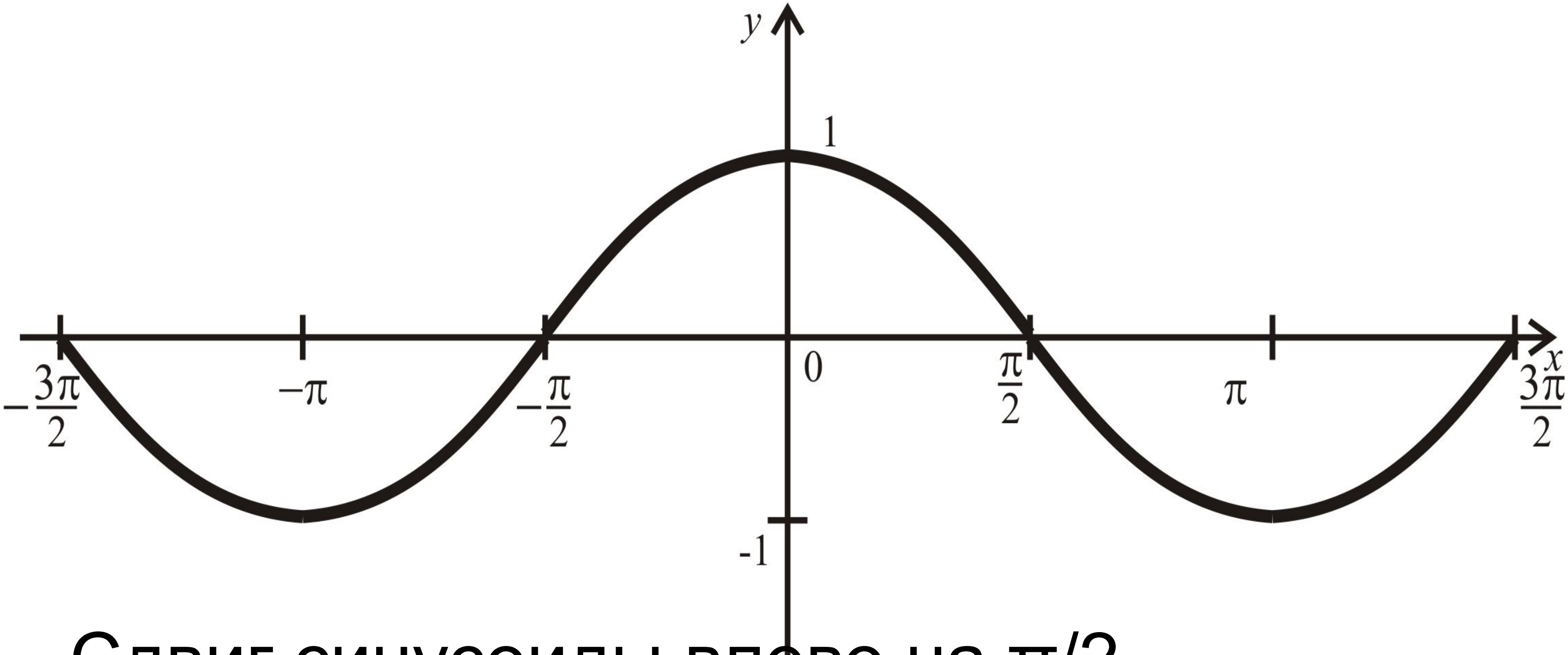


График функции y = cos$x$

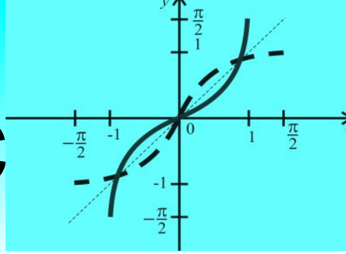


cos(x) = sin(π/2 + x) или cos(x) = sin(x + π/2)



Сдвиг синусоиды влево на π/2

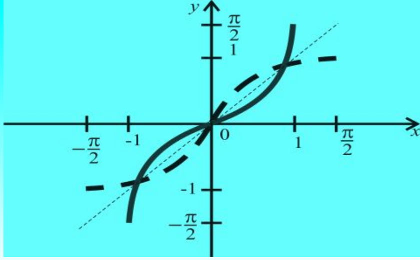
Функции тангенс и котангенс



Числовые функции, заданные равенствами y = tg x и y = ctg x, называются соответственно *тангенсом* и *котангенсом*.

Областью определения тангенса является множество всех чисел x, для которых cos $x \neq 0$.

Областью определения котангенса является множество всех чисел x, для которых sin $x \neq 0$.



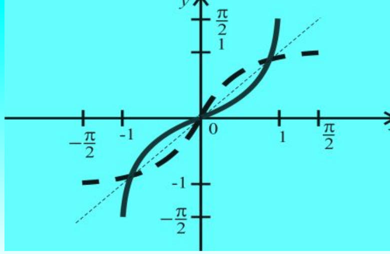
Множество значений тангенса и котангенса – вся числовая прямая, т.е. **R**.

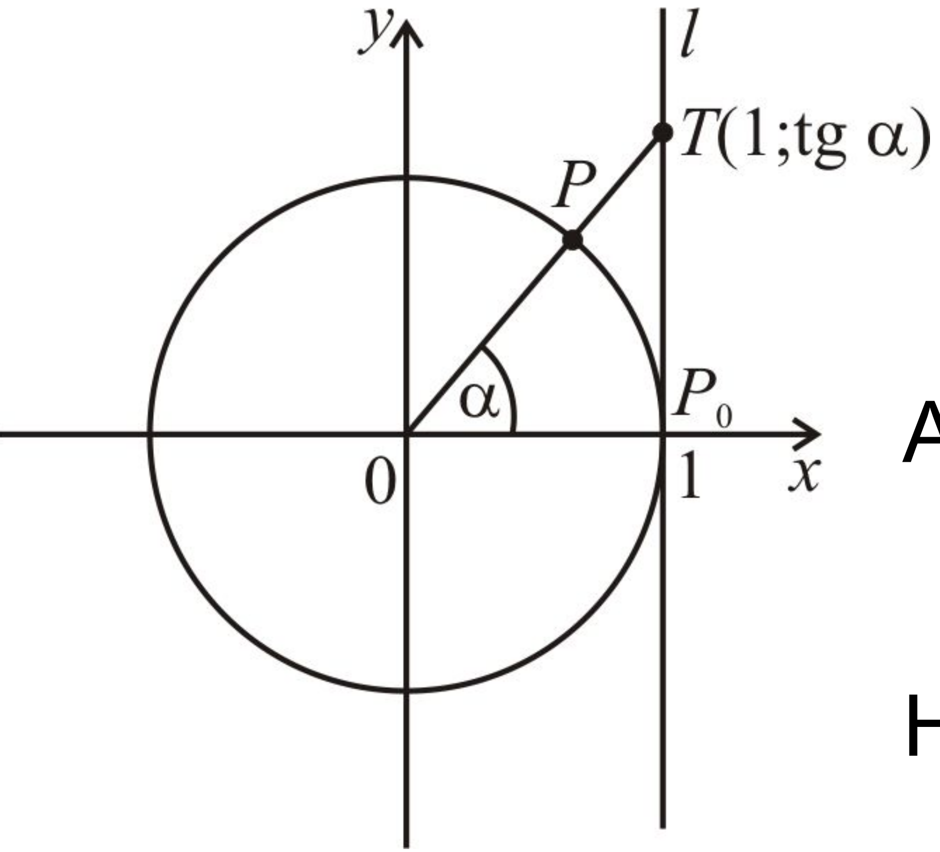
Тангенс и котангенс являются нечетными функциями

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Линия тангенсов





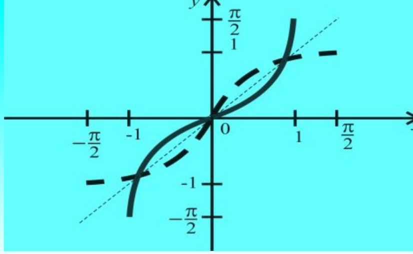
Прямая *OP* проходит через начало координат и точку *P* (cos*α* ; sin*α*). Ее уравнение $y = \mathrm{tg}\ \alpha \cdot x$.

Абсцисса точки T, лежащей на этой прямой, равна 1.

Найдем ординату из уравнения прямой.

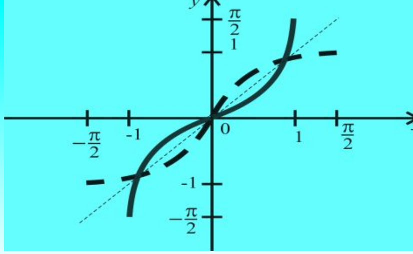
Получим tg α.

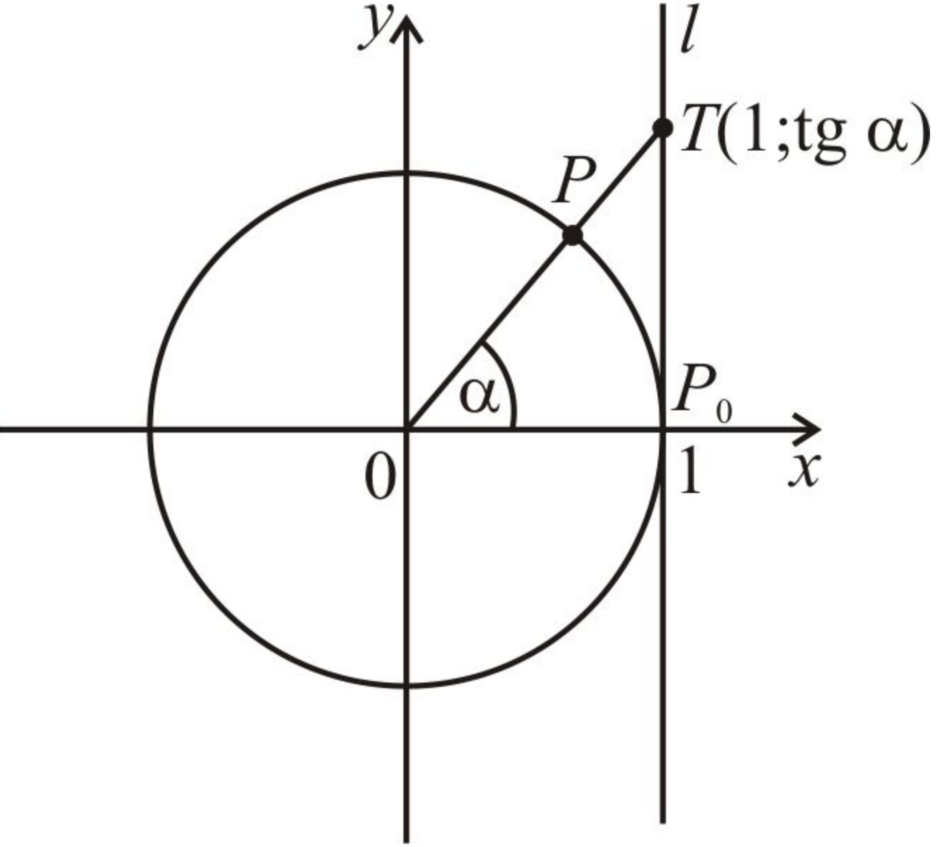
Вывод



Чтобы найти значение тангенса для конкретного аргумента *х*, надо изобразить линию тангенсов, отложить на единичной окружности аргумент х, через полученную точку и начало координат провести прямую до пересечения с линией тангенсов, ордината полученной точки будет значением тангенса.

Табличные значения





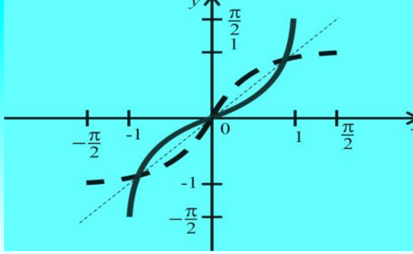
$\operatorname{tg} 0 = 0;$

$\operatorname{tg} \pi/4 = 1;$

$$\operatorname{tg}(\pi/6) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Табличные значения



$\operatorname{tg}(-\pi/4) = -1$;

$\operatorname{tg}(-\pi/6) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

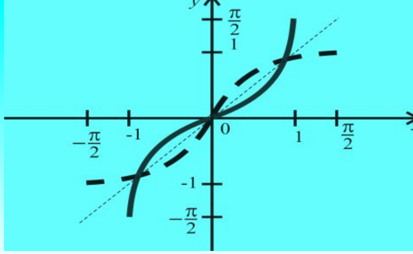
$\operatorname{tg}(-\pi/3) = -\sqrt{3}$.

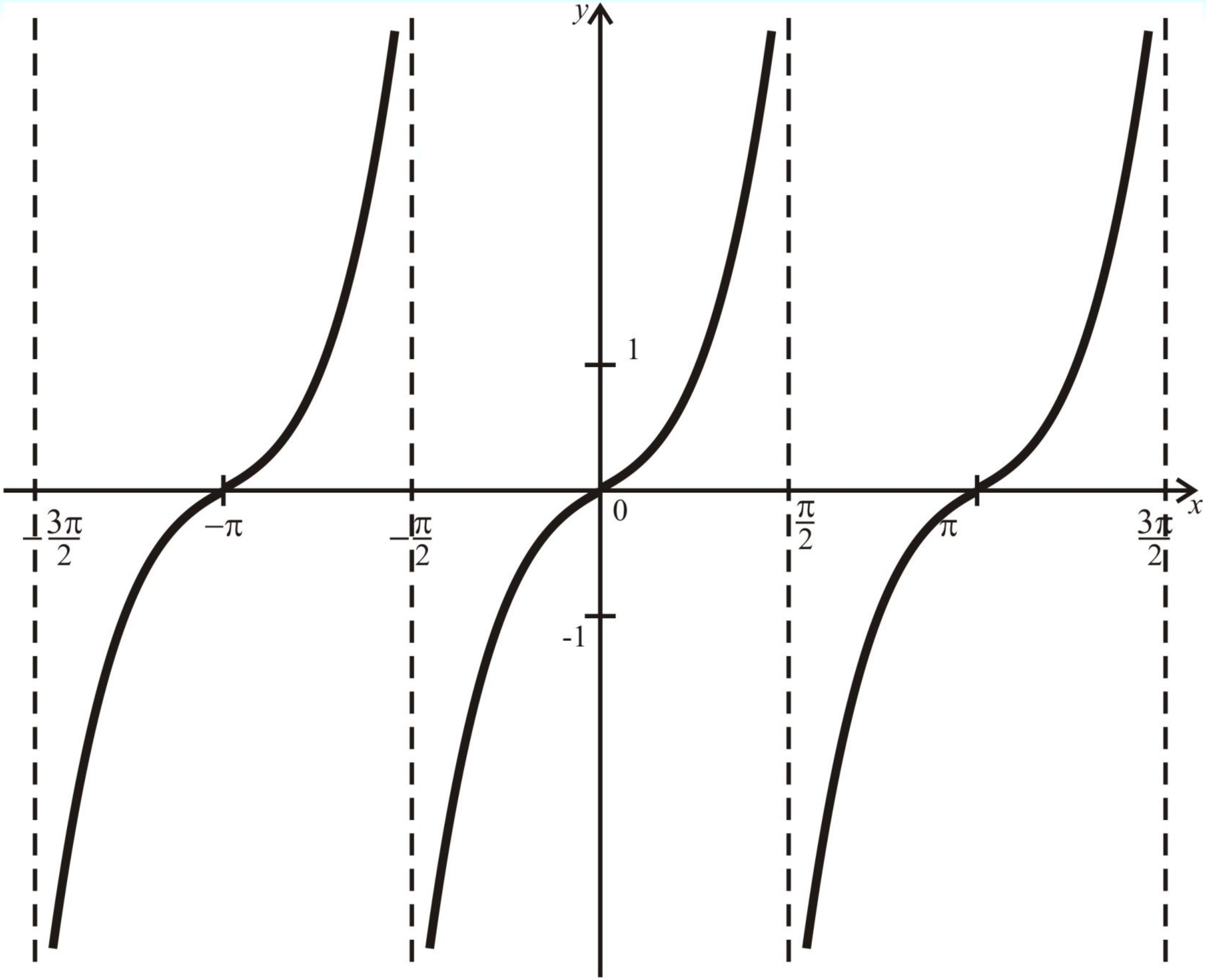
Период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен πk,

где $k \in \mathbf{Z}$.

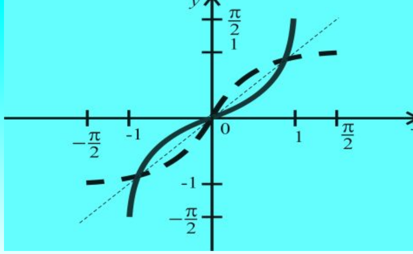
Наименьший положительный период равен π (при $k = 1$).

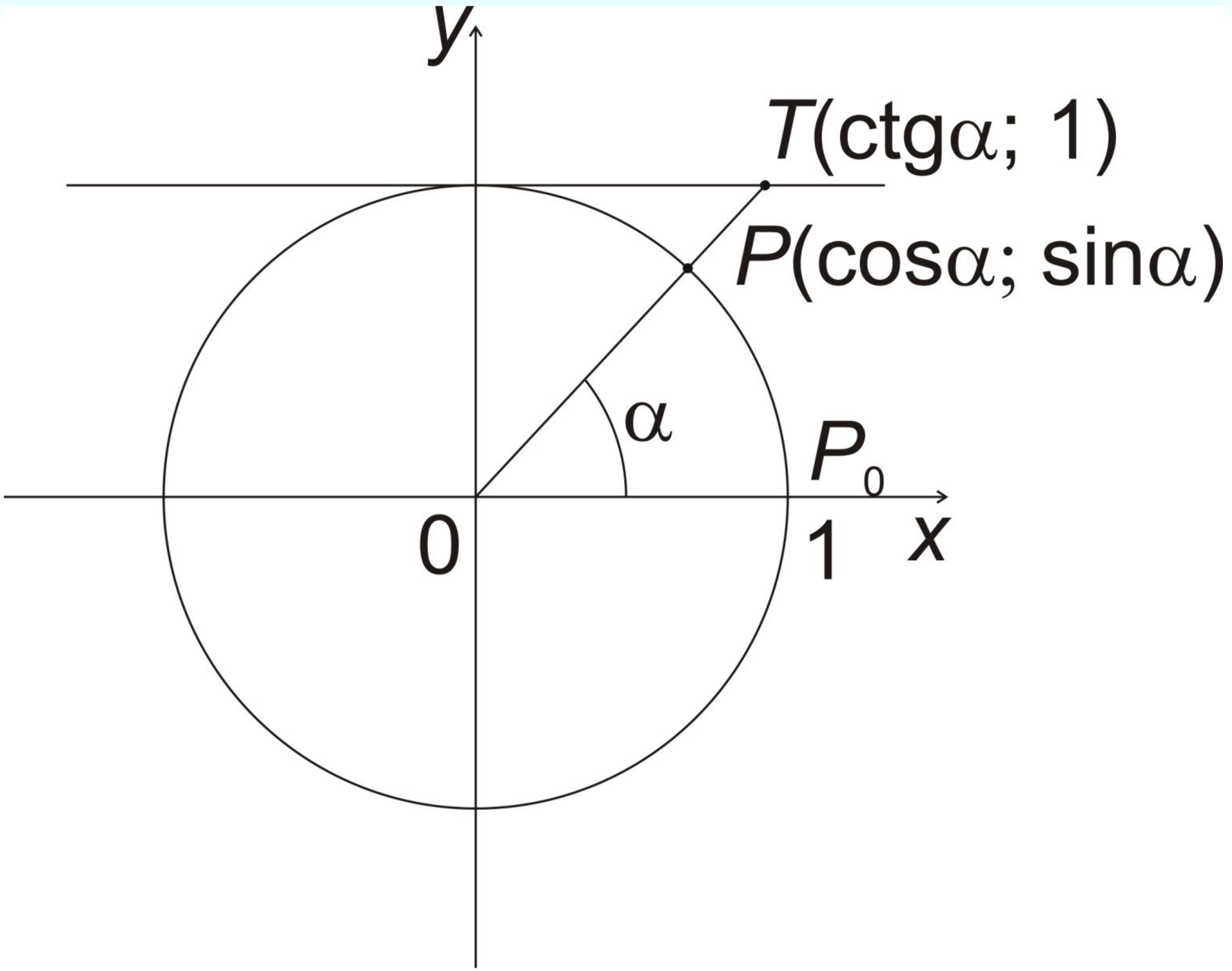
График функции $y = \text{tg}x$



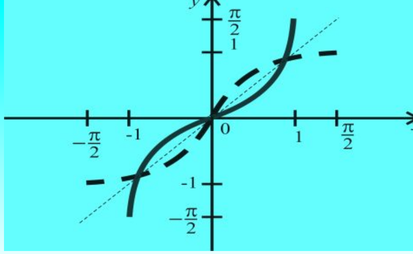


Линия котангенсов





Табличные значения



ctg 0 не существует.

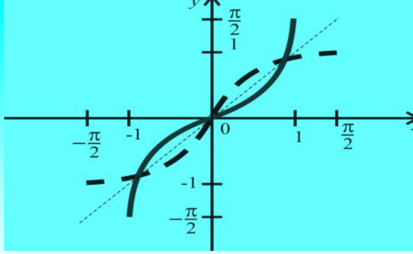
ctg (π/4) = 1;

ctg(π/6) = 1/tg (π/6) = $\sqrt{3}$;

ctg(π/3) = 1/tg(π/3) = $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

ctg (π/2) = 0.

Период функции y = ctg$x$



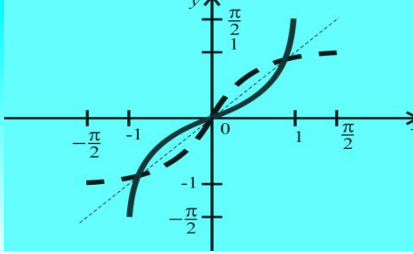
Период функции равен πk, где $k \in \mathbf{Z}$,

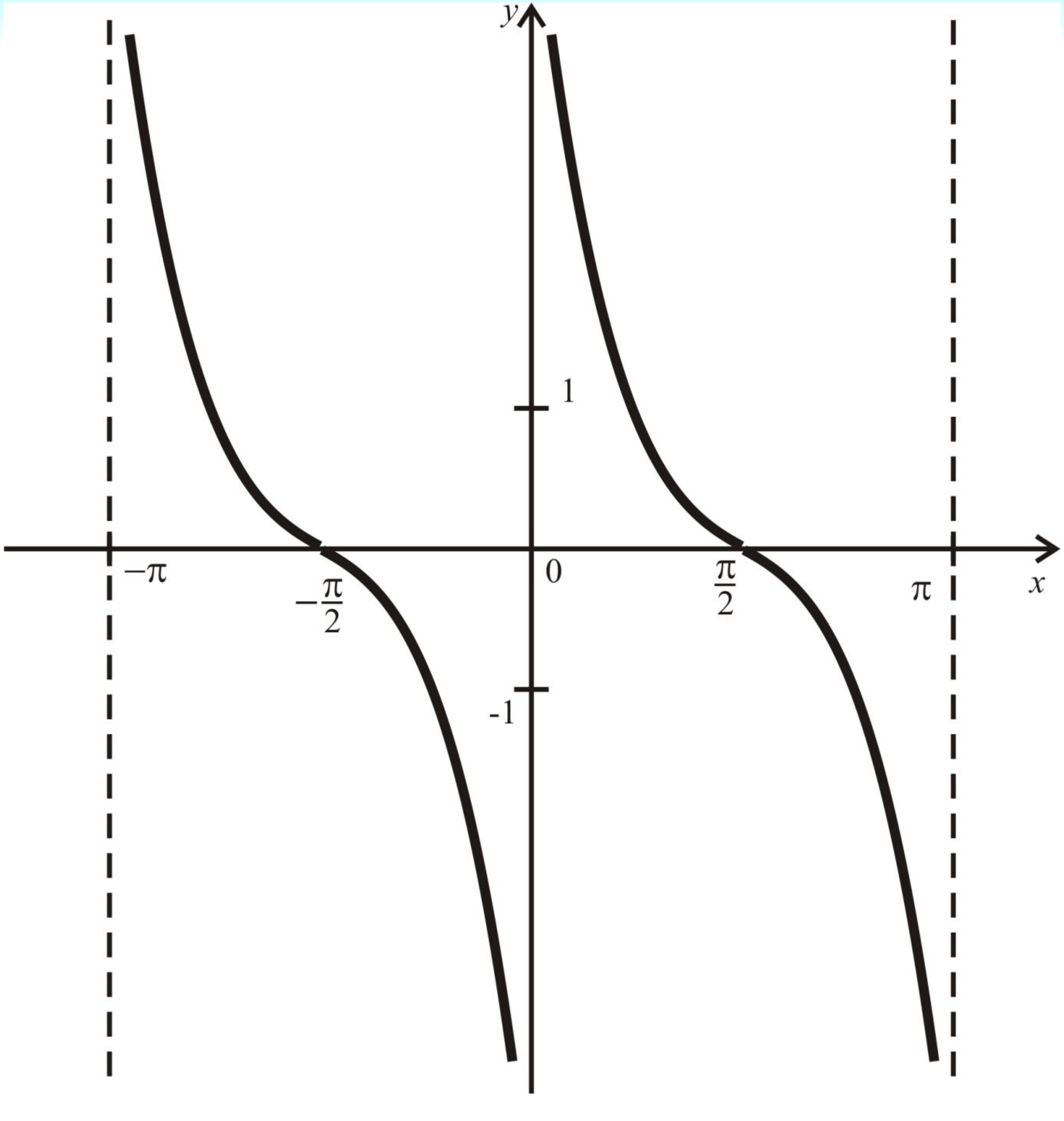
то есть

ctg(x) = ctg(x + πk), где $k \in \mathbf{Z}$.

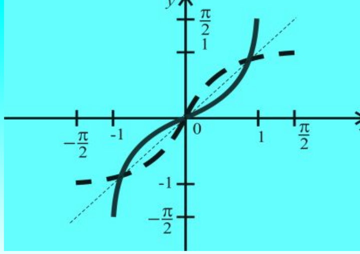
Наименьший положительный период равен π (при k = 1).

График котангенса





Функции секонс и косеконс



Функция $y = 1/\cos x$ называется *секонсом*:

$$y = 1/\cos x = \sec x.$$

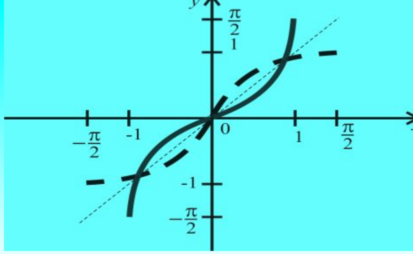
Ее область определения: все то множество х, где $\cos x \neq 0$, т.е.

$$x \neq \pi/2 + \pi k, \text{ где } k \in \mathbf{Z}.$$

Функция $y = 1/\sin x$ называется *косеконсом*: $y = 1/\sin x = \operatorname{cosec} x$.

Def($1/\sin x$) – это то множество x, где

$\sin x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.



Шесть тригонометрических функций

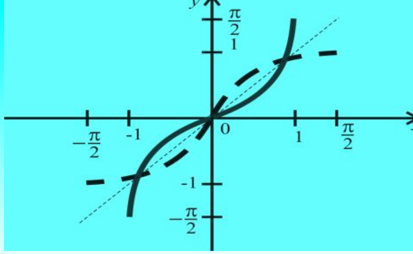
$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$

Правило, как запомнить:

$$\sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1;$$

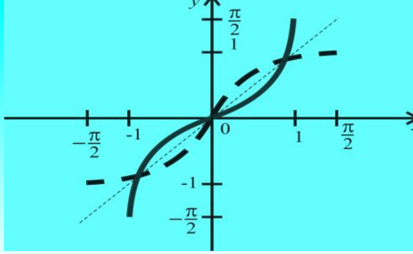
$$\cos x \cdot \sec x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$



Домашнее задание

1. Запомнить, какие функции нечетные, какие – четные
2. Запомнить графики синуса, косинуса и тангенса
3. Запомнить, что такое линия тангенса



y
$\frac{\pi}{2}$
1
0
-1
$-\frac{\pi}{2}$
1
$\frac{\pi}{2}$
-1
$-\frac{\pi}{2}$