

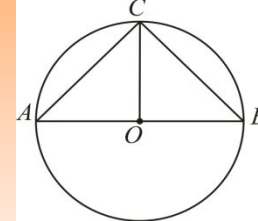
Углы в пространстве



Лекция

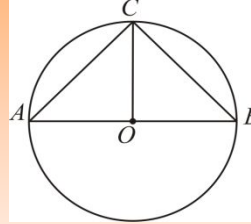
Календарева Н.Е.
ВКИ НГУ
2009

План



1. Угол между прямыми
2. Решение задач
3. Угол между прямой и плоскостью
4. Решение задач
5. Двугранный угол
6. Линейный угол двугранного угла
7. Угол между плоскостями

Угол между прямыми



Пересекающиеся прямые

Они образуют два вертикальных угла и два смежных. Угловая

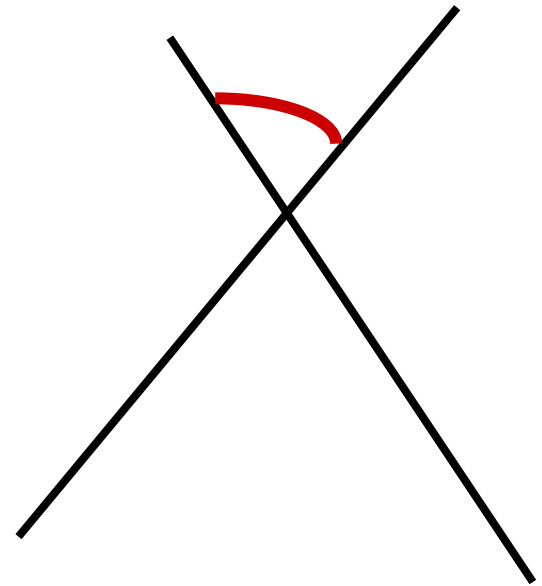
мера меньшего из них

называется *углом*

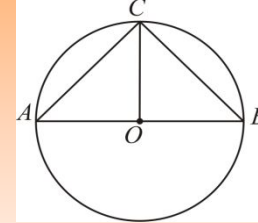
между прямыми.

Угол между перпендикулярными прямыми равен 90°

по определению.



Угол между прямыми



Скрещивающиеся прямые

Углом между скрещивающимися

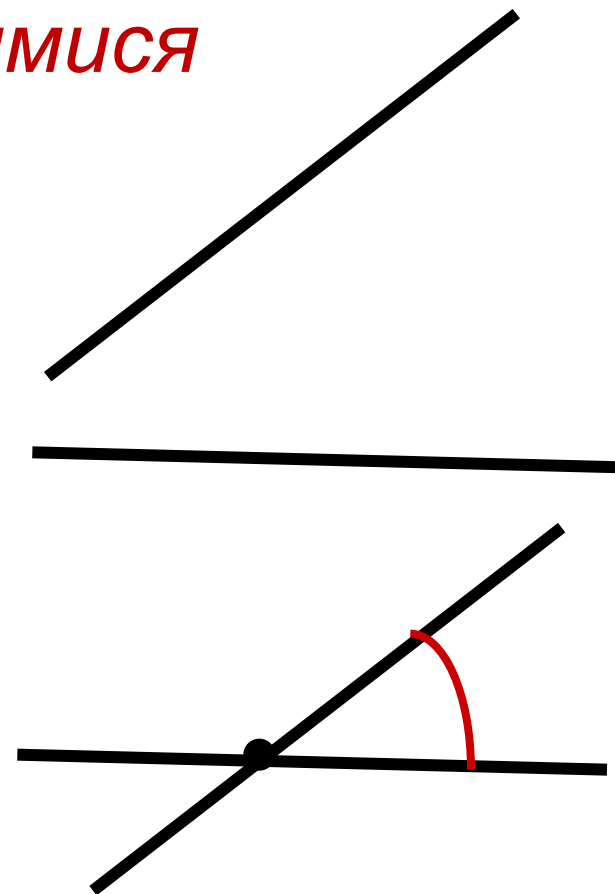
прямыми называется угол

между пересекающимися

прямыми, которые

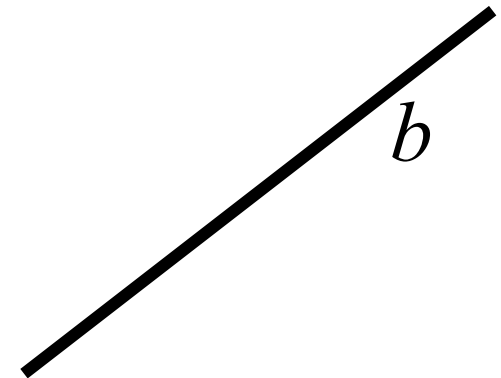
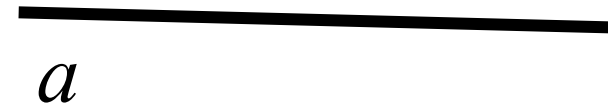
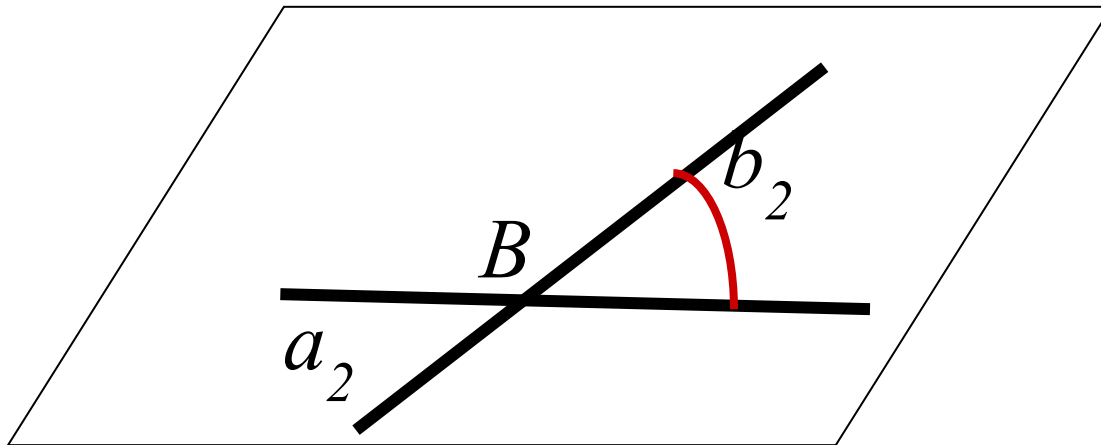
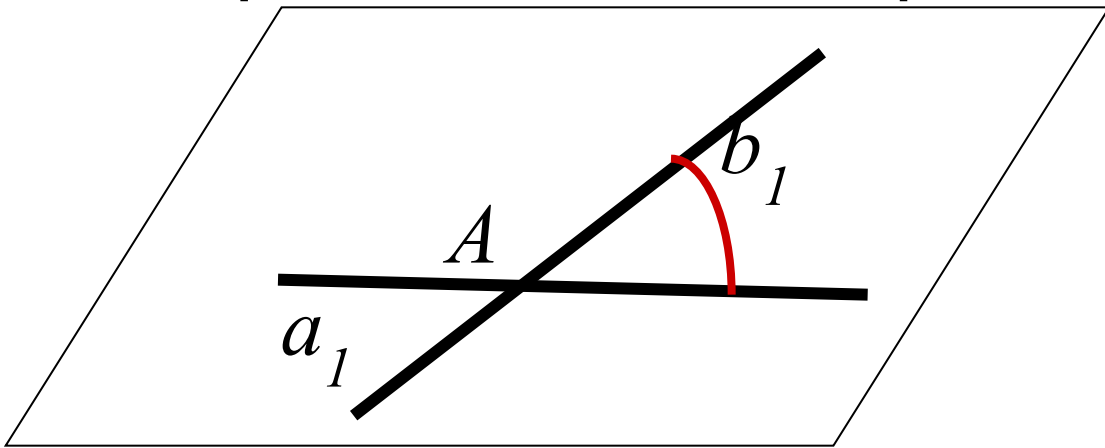
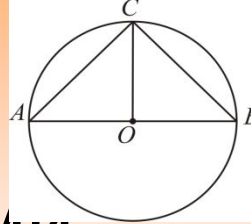
параллельны данным

скрещивающимся прямым.

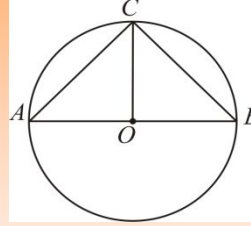


Утверждение

Угол между скрещивающимися прямыми не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.



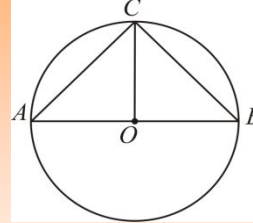
Доказательство



По теореме «Две прямые, параллельные третьей, параллельны» прямые a_1 и a_2 параллельны (или совпадают) и прямые b_1 и b_2 параллельны (или совпадают).

Выполним параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B . При этом параллельном переносе прямая a_1 переходит в a_2 , прямая b_1 – в b_2 . Углы при паралл. переносе сохраняются.

Угол между прямыми

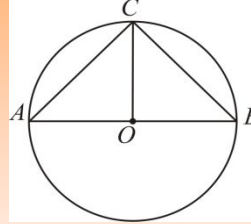


Перпендикулярные прямые

По определению *перпендикулярными прямыми* называются прямые, пересекающиеся под прямым углом.

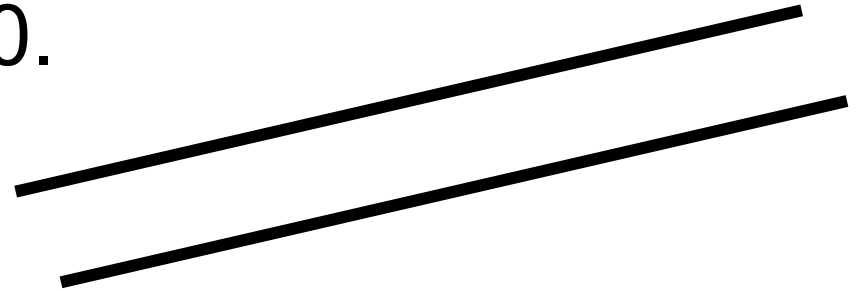
Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90° , то эти прямые также называются *перпендикулярными*.

Угол между прямыми



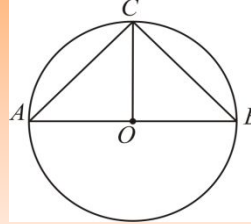
Параллельные прямые

Угол между параллельными прямыми по определению равен 0.



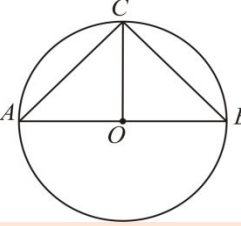
Итак, величина угла между прямыми в пространстве изменяется от 0 до 90° или от 0 до $\pi/2$ включительно.

Как решать задачи

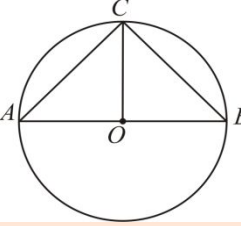


Чтобы найти угол между прямыми, надо найти его тригонометрическую функцию (любую!). Если это табличное значение, то угол может быть выражен в градусах или в радианах.

Тригонометрическую функцию надо находить из треугольника, для чего его надо достроить.



Для удобства делают так называемый «выносной» рисунок. На нем изображают треугольник правдоподобным, как в планиметрии. Находят и выносят на рисунок длины сторон треугольника.



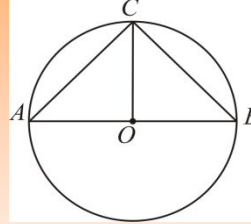
Затем проверяют, является ли треугольник

- 1) равносторонним;
- 2) равнобедренным;
- 3) прямоугольным.

Если прямоугольный, то используем формулы для синуса или косинуса.

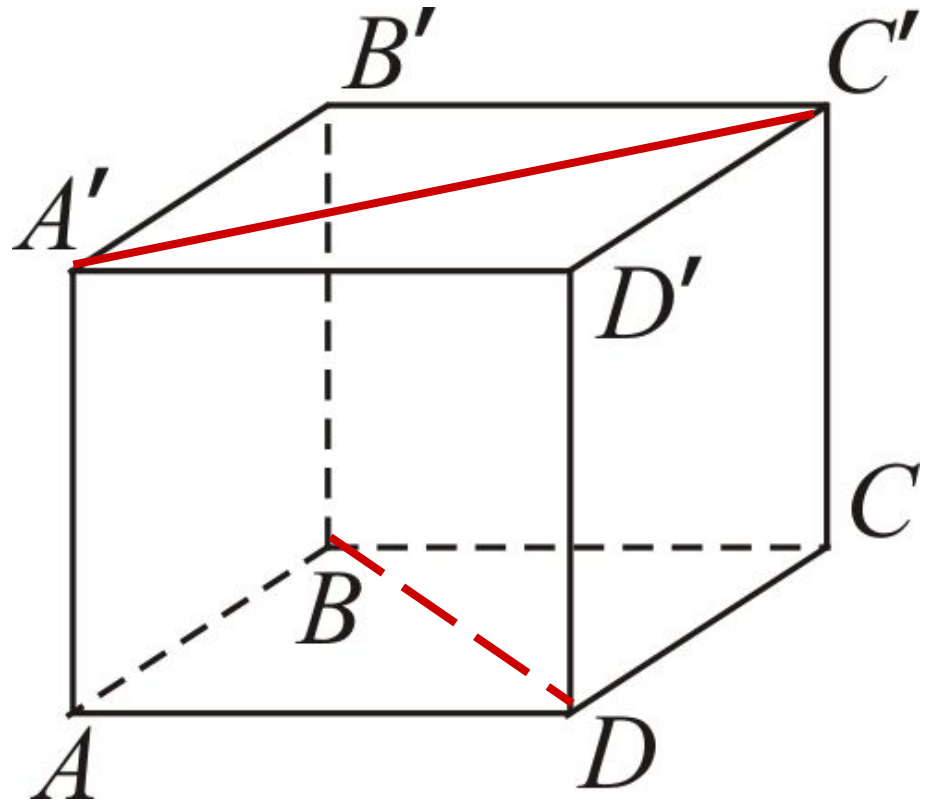
Если равнобедренный или произвольный, то находим косинус угла по теореме косинусов.

Задача 1

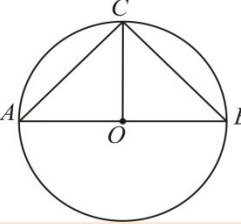


Дан куб. Найдите угол между прямыми $A'C'$ и BD , если ребро куба равно 1 дм.

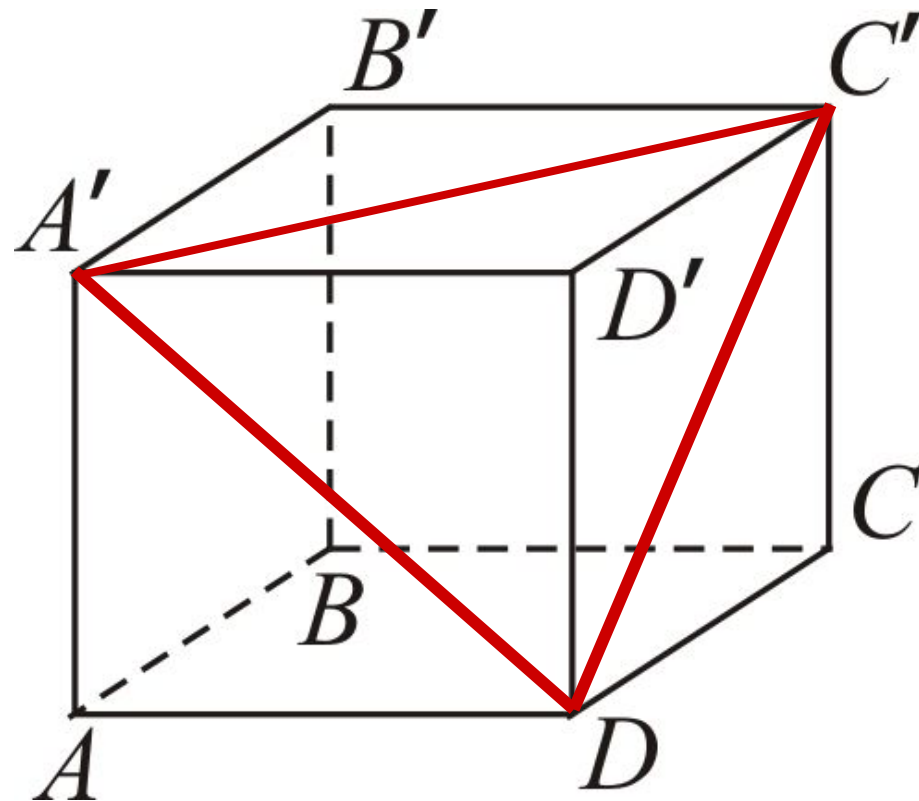
Ответ: 90°



Задача 2

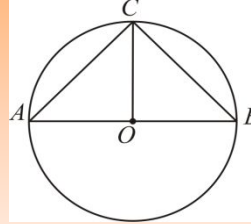


Дан куб. Найдите угол между прямыми $A'D$ и DC' , если ребро куба равно 1 дм.

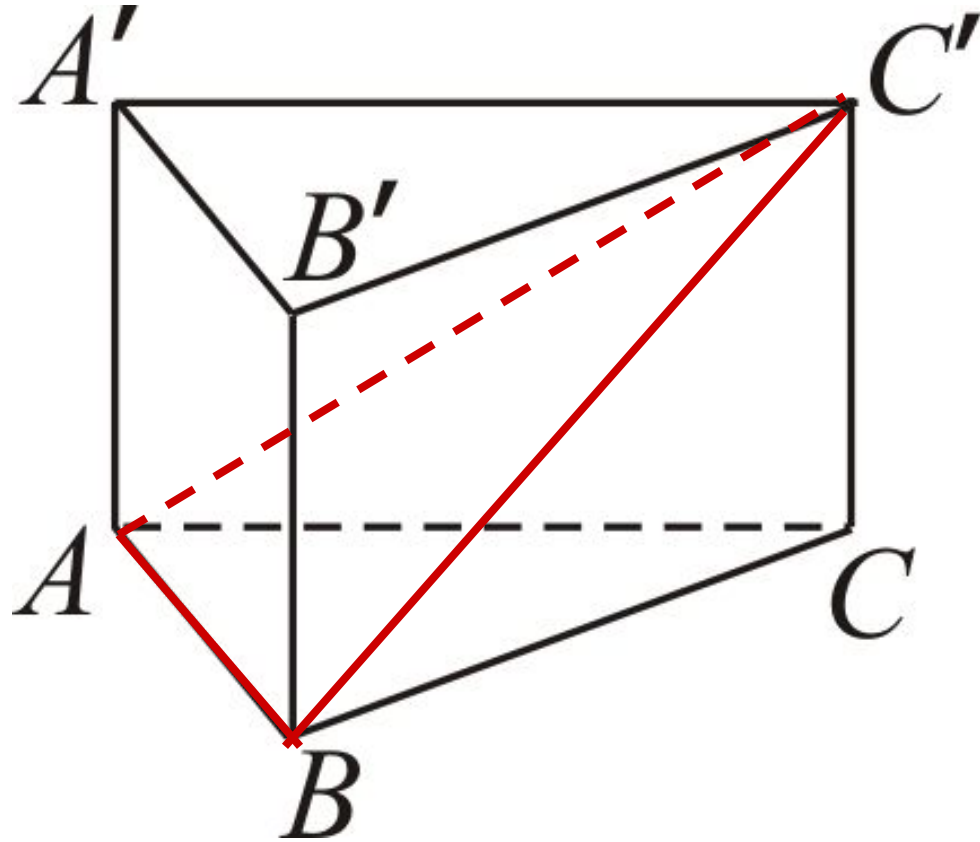


Ответ: 60°

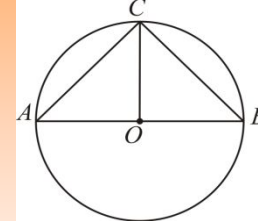
Задача 3



Дана правильная призма. Найдите угол между AC' и BC' , если сторона тре-ка ABC равна 1 см, а высота призмы равна $2\sqrt{2}$ см.



Решение



Т. Пифагора:

$$BC'^2 = BC^2 + CC'^2;$$

$$BC'^2 = 1 + 8 = 9;$$

$$BC' = 3.$$

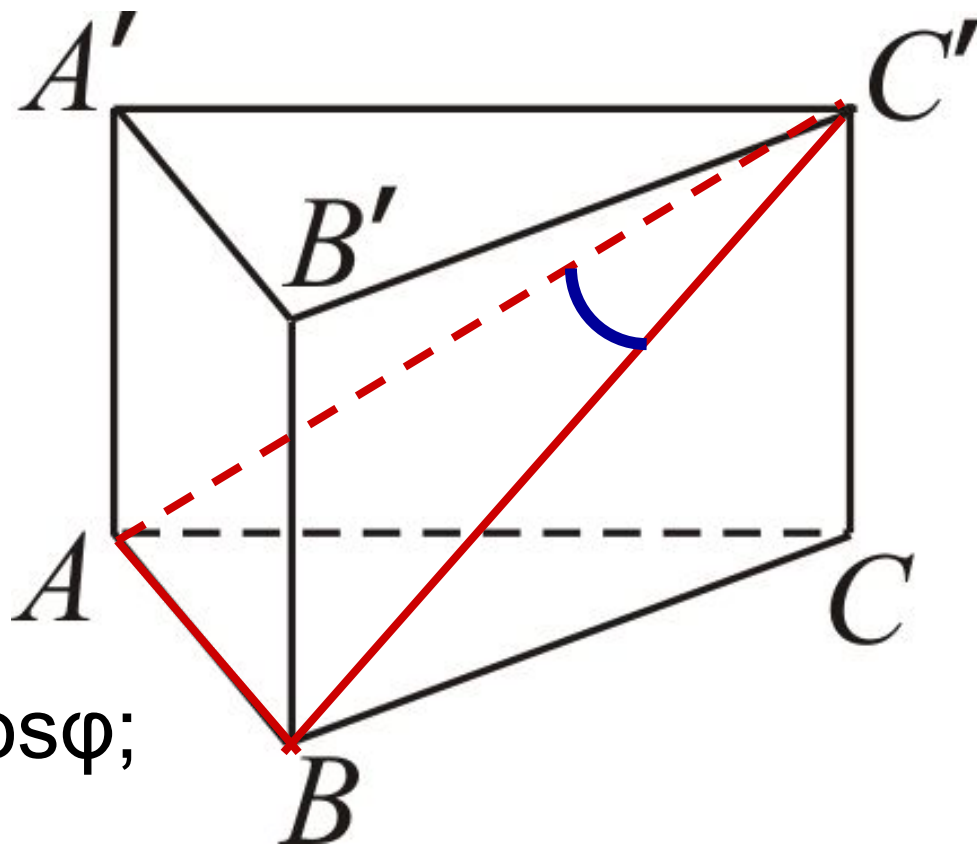
$\triangle ABC'$ – равнобедр.

По т. косинусов

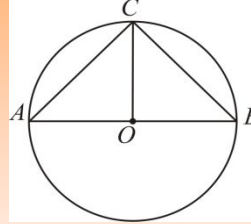
$$1^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cos \varphi;$$

$$\cos \varphi = 17/18.$$

Ответ: $\arccos(17/18)$.



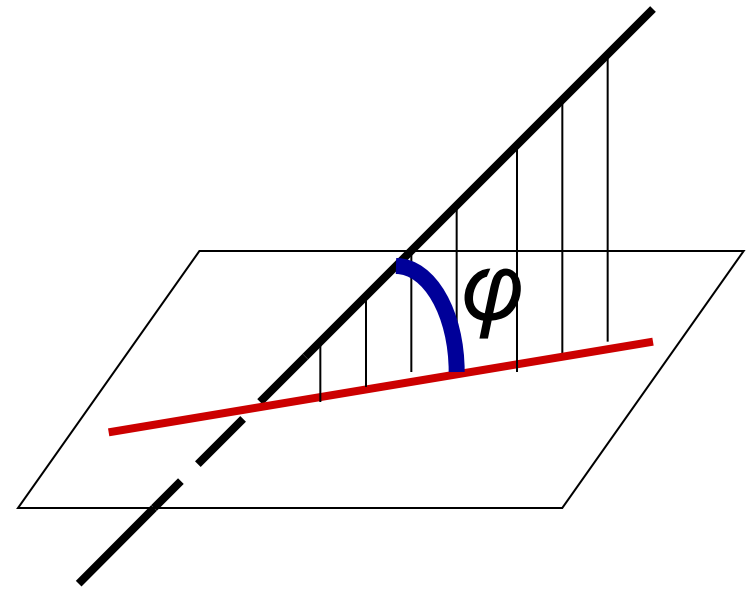
Угол между прямой и плоскостью



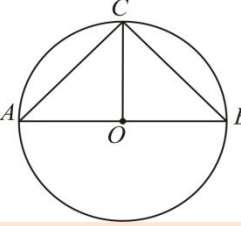
Углом между прямой и плоскостью

называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Угол φ меняется от 0 до 90° .

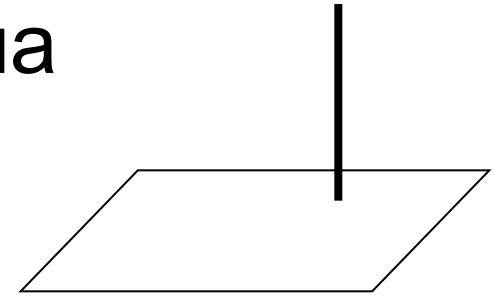


Угол между прямой и плоскостью



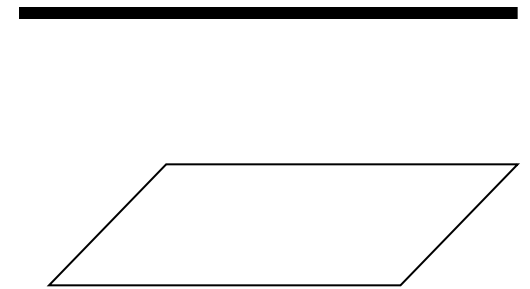
Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол равен 90° .

$$\varphi = 90^\circ$$

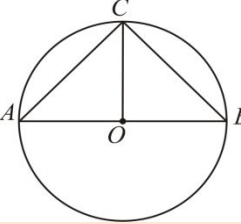


Если прямая параллельна плоскости, то угол равен 0.

$$\varphi = 0$$

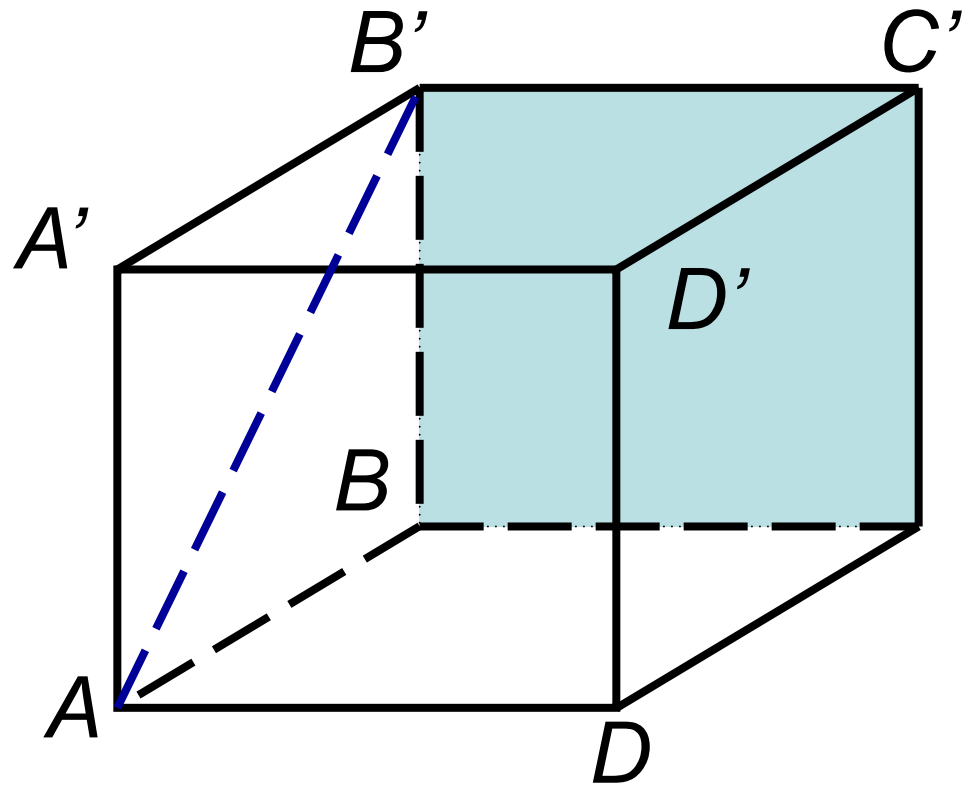


Задача 4

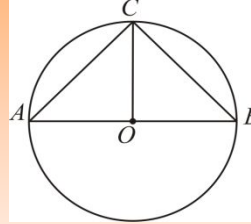


Дан куб с
единичным
ребром. Найдите
угол между
прямой AB' и
плоскостью
 $BB'C'C$.

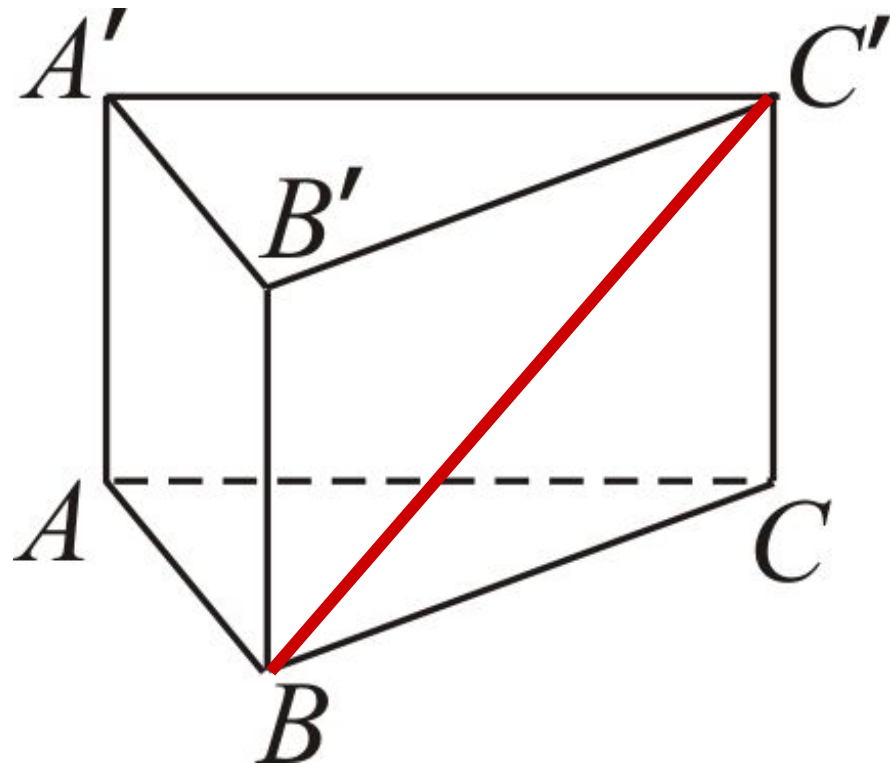
Ответ: 45° .



Задача 5

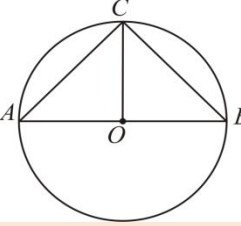


В правильной
треугольной
призме $ABCA'B'C'$
сторона основания
равна $2\sqrt{3}$, боко-
вое ребро равно 2.
Найдите угол
между прямой BC'
и плоскостью ABC .



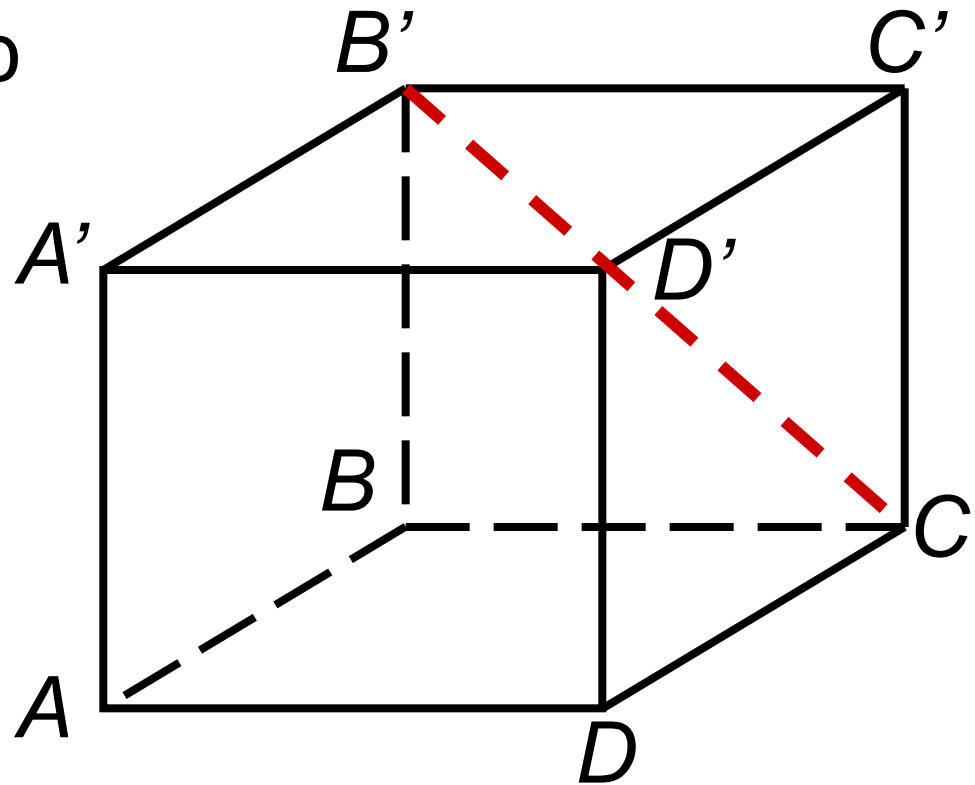
Ответ: 30° .

Задача 6

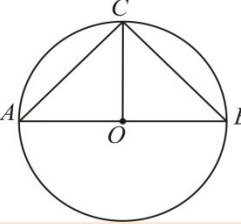


В кубе с единичным ребром найдите угол между диагональю $B'C$ и плоскостью $AA'D'D$.

Ответ: 0 .

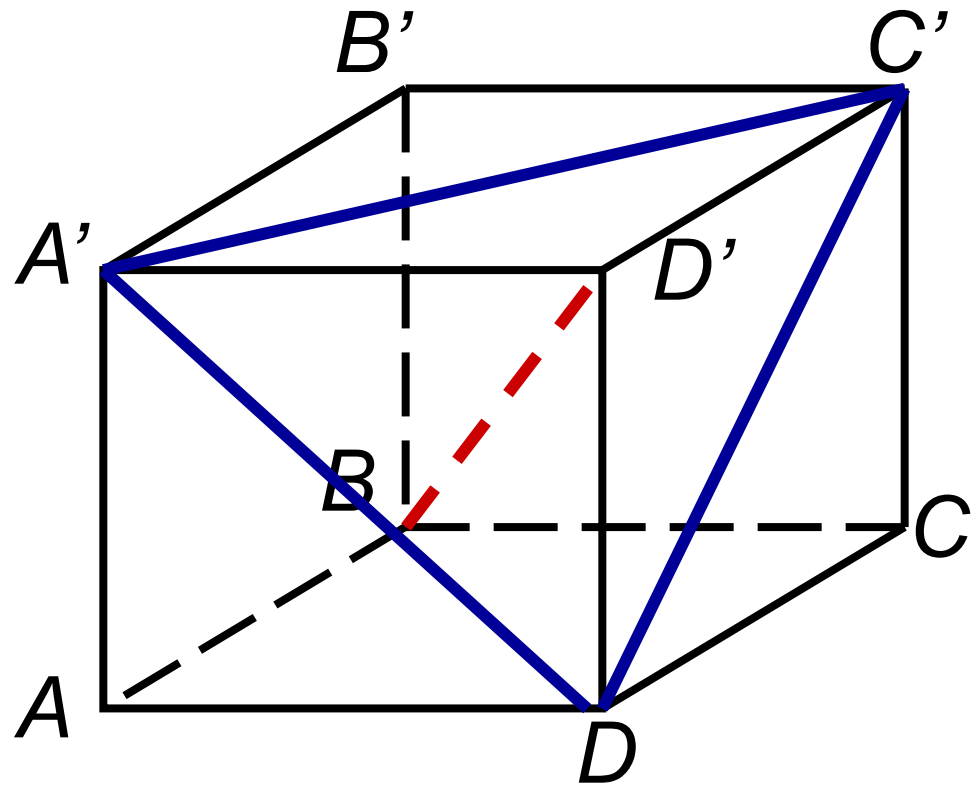


Задача 7

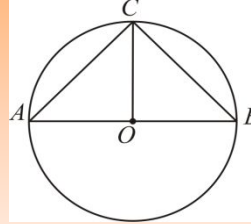


В кубе с единичным ребром найдите угол между диагональю BD' и плоскостью $C'A'D$.

Ответ: 90° .

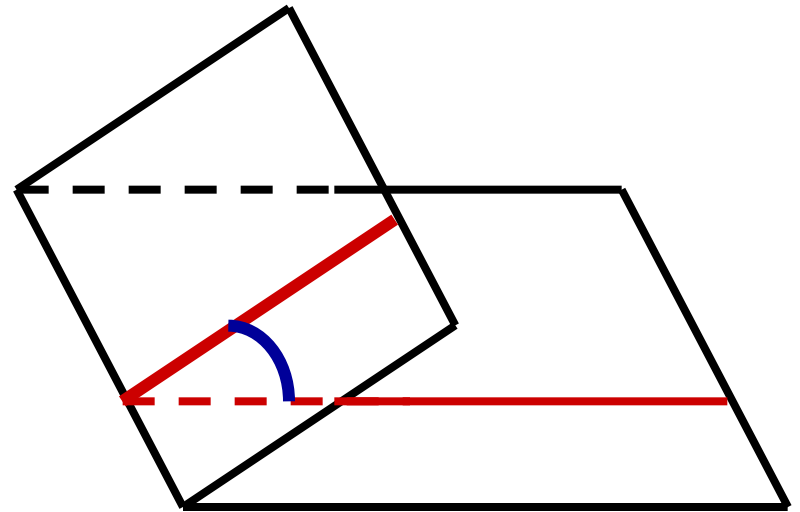


Двугранный угол

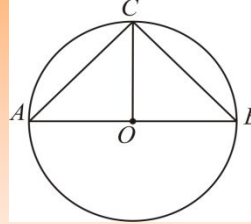


Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.

Полуплоскости называются **гранями**, а ограничивающая их прямая – **ребром** двугранного угла.

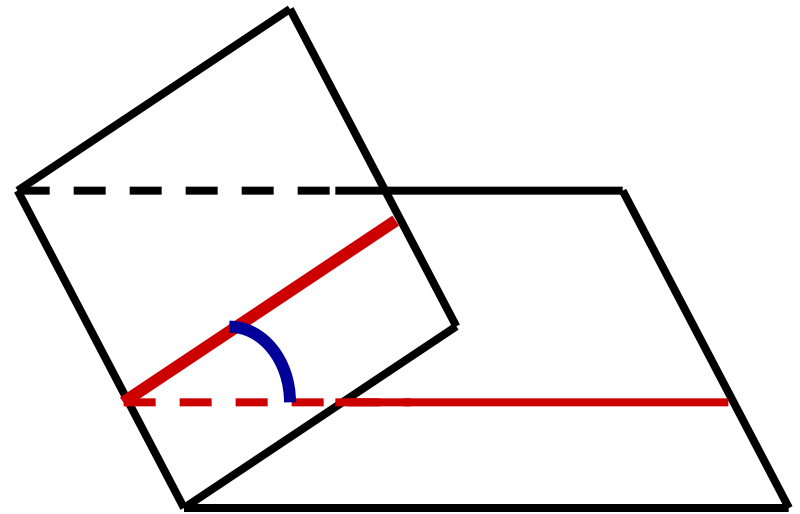


Линейный угол двугранного угла

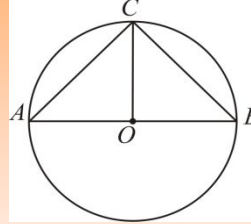


Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым.

Угол, образованный этими полупрямыми, называется **линейным углом** двугранного угла.



Мера двугранного угла

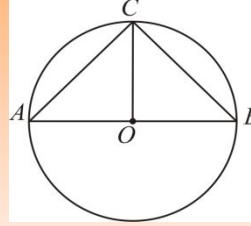


За **меру двугранного угла** принимается градусная или радианная мера соответствующего ему линейного угла.

Все линейные углы двугранного угла совмещаются параллельным переносом, а значит, равны.

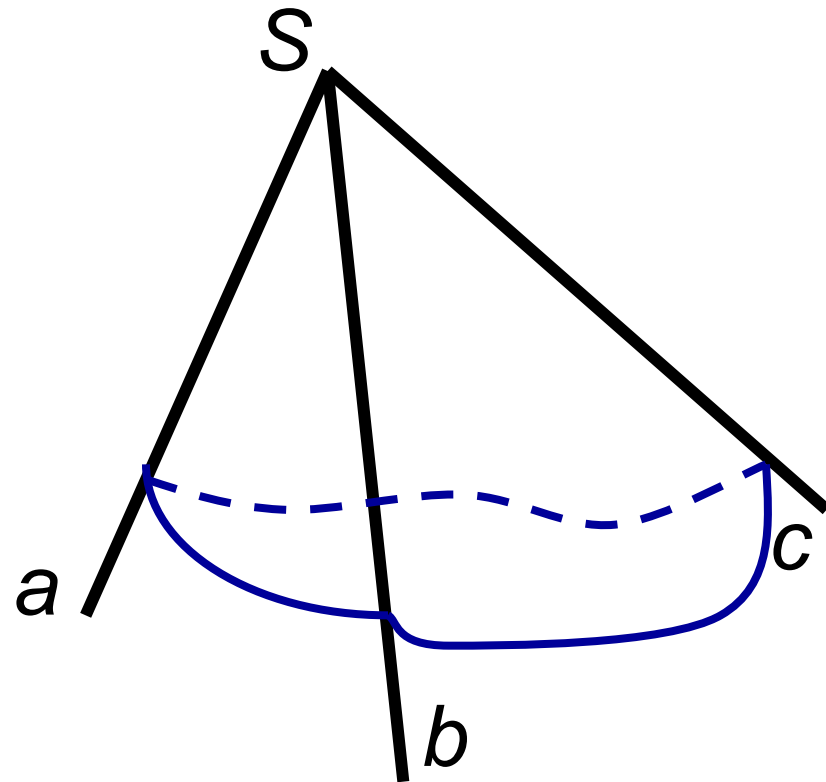
Поэтому мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

Трехгранный угол

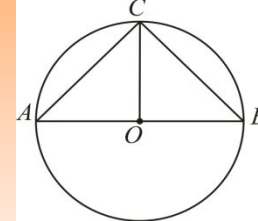


Трехгранным углом называется фигура, составленная из трех плоских углов.

Эти углы называются **гранями** трехгранного угла, а их стороны – **ребрами**. Общая вершина плоских углов называется вершиной трехгранного угла.



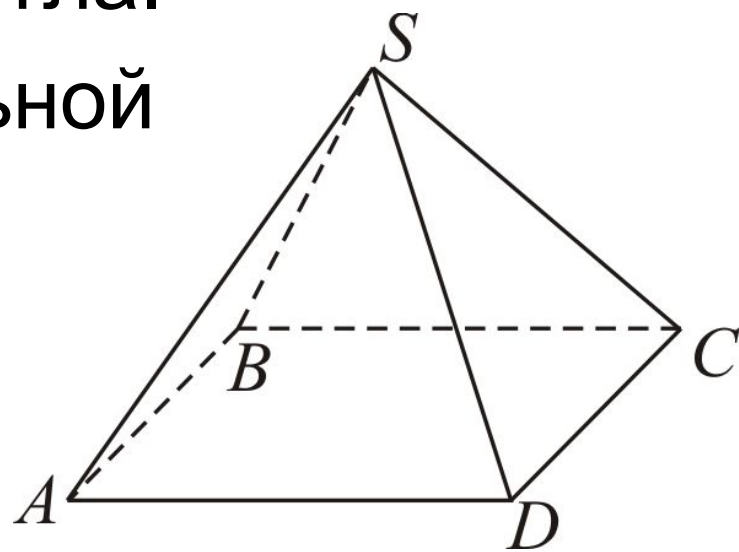
Многогранные углы



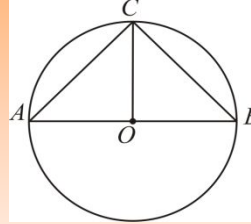
Аналогично определяется
понятие многогранного угла.

Например, в четырехугольной
пирамиде при вершине
четырехгранный угол.

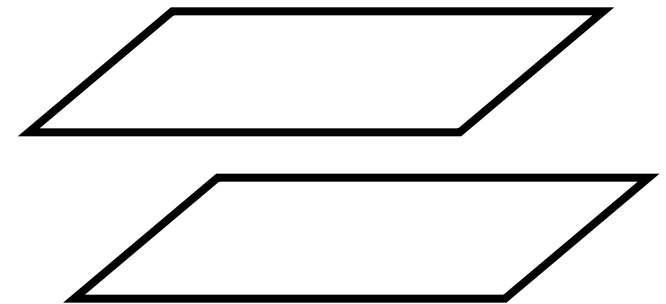
Две смежные грани
многогранного угла
называются двугранным
углом многогранного угла.



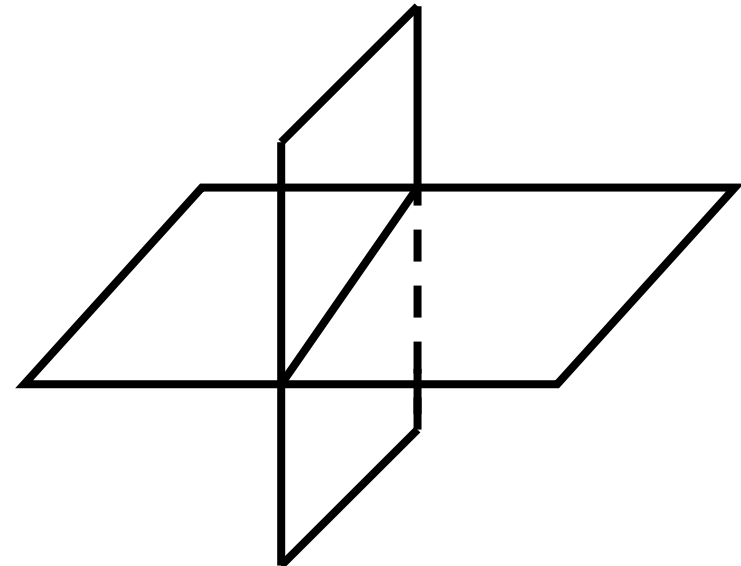
Угол между плоскостями



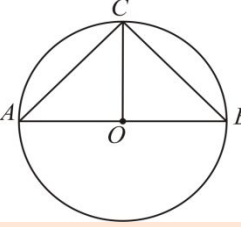
Параллельные плоскости:
угол равен 0.



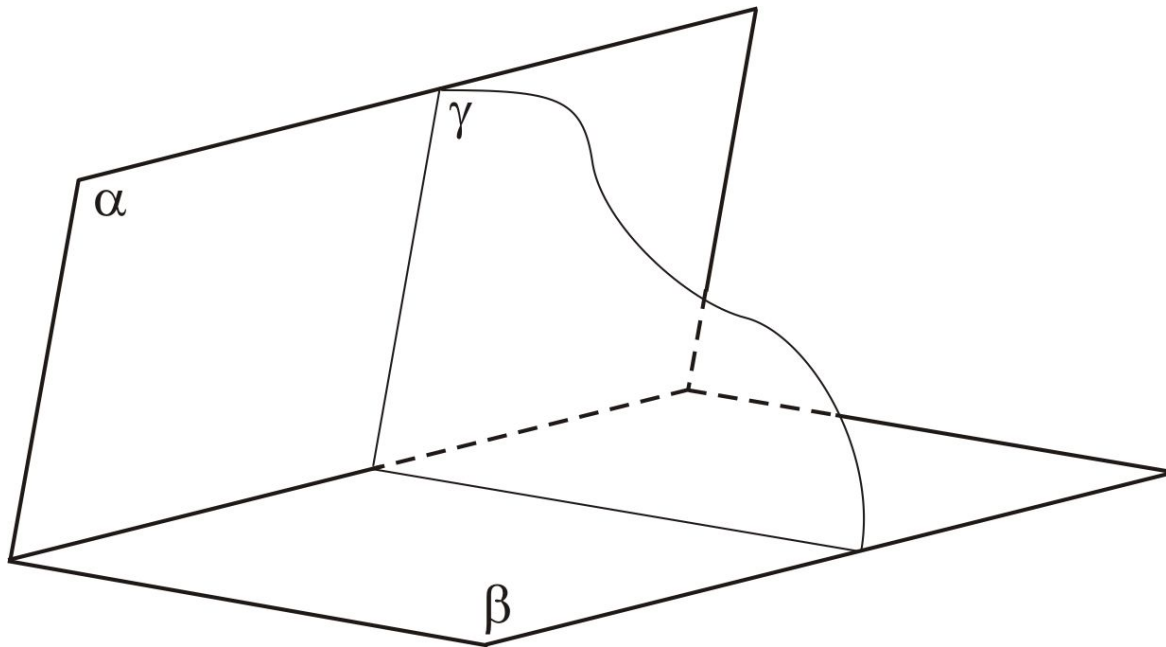
Перпендикулярные
плоскости: угол
равен 90° .

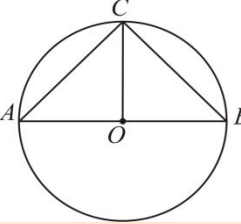


Угол между пересекающимися плоскостями

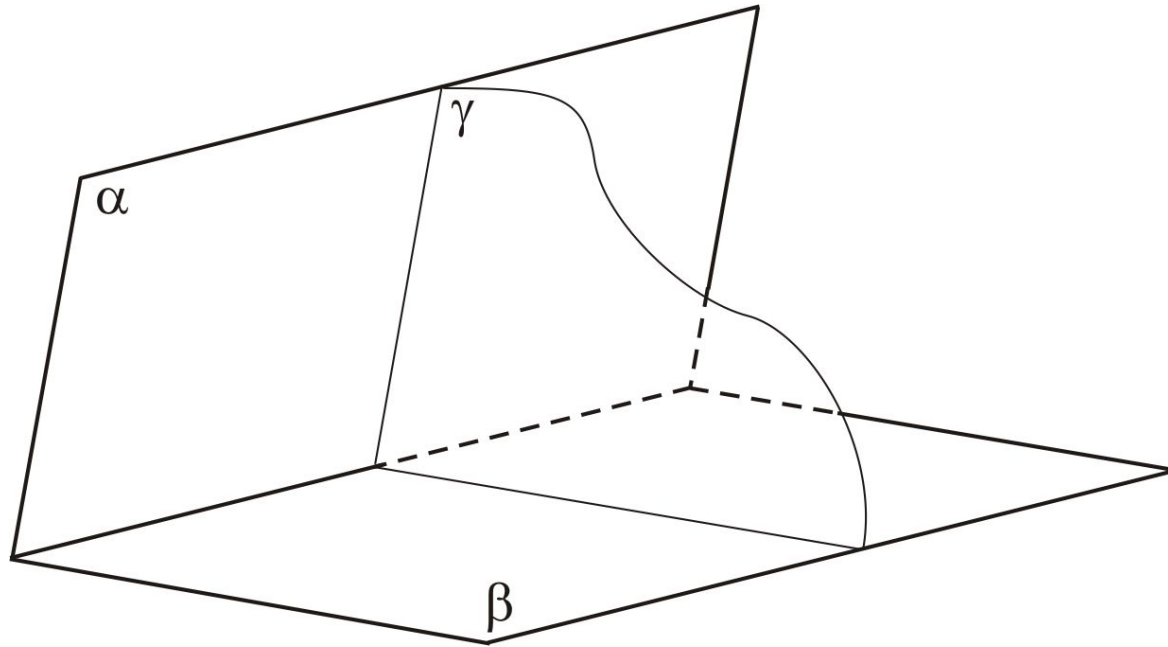


Пусть даны две пересекающиеся плоскости. Построим плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым.

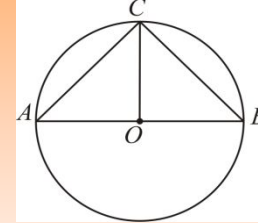




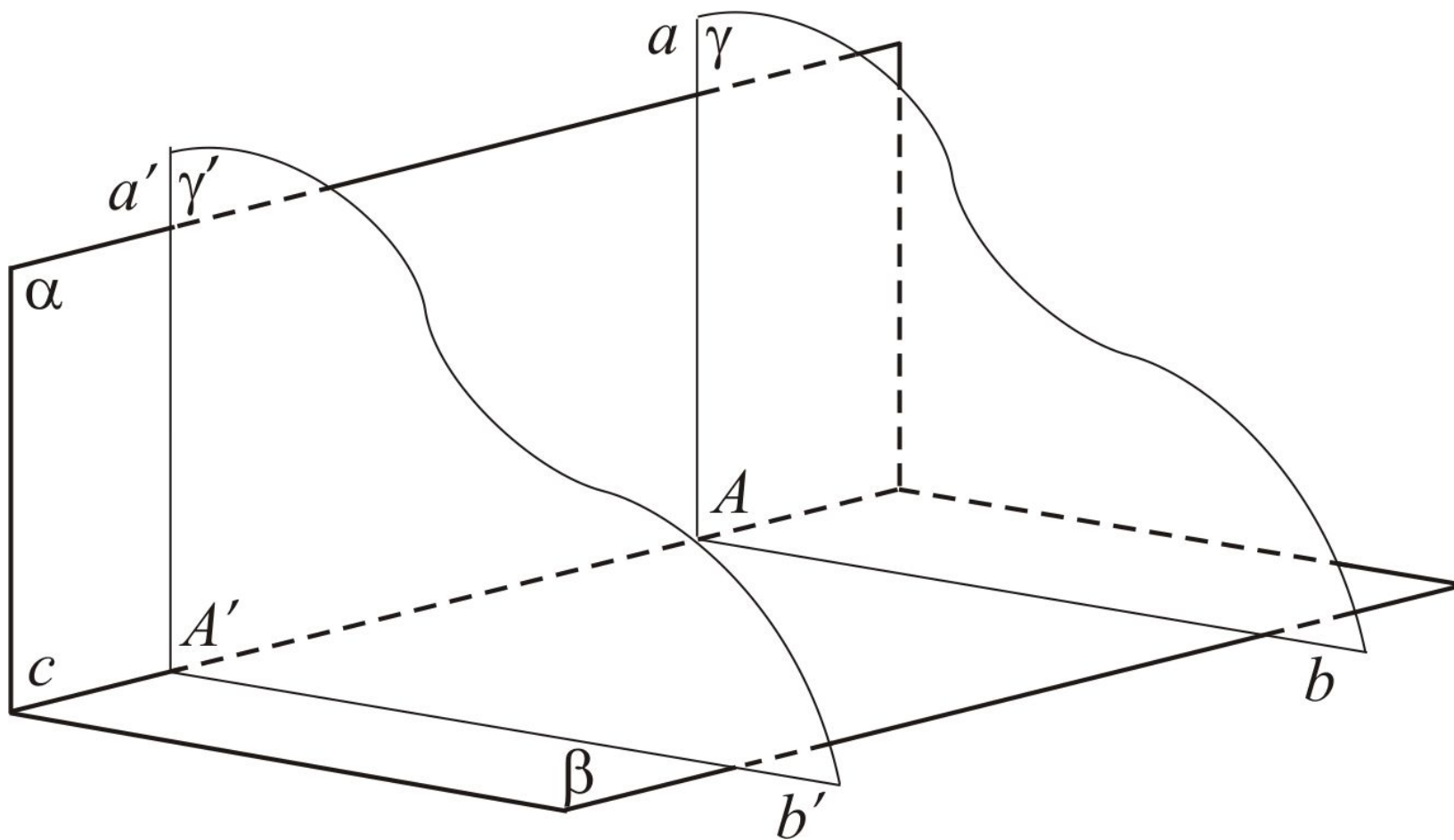
Угол
между этими
прямыми
называется
***углом между
данными плоскостями.***



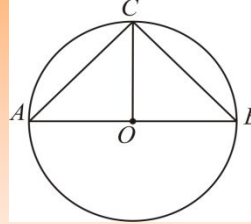
Утверждение



Угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости.



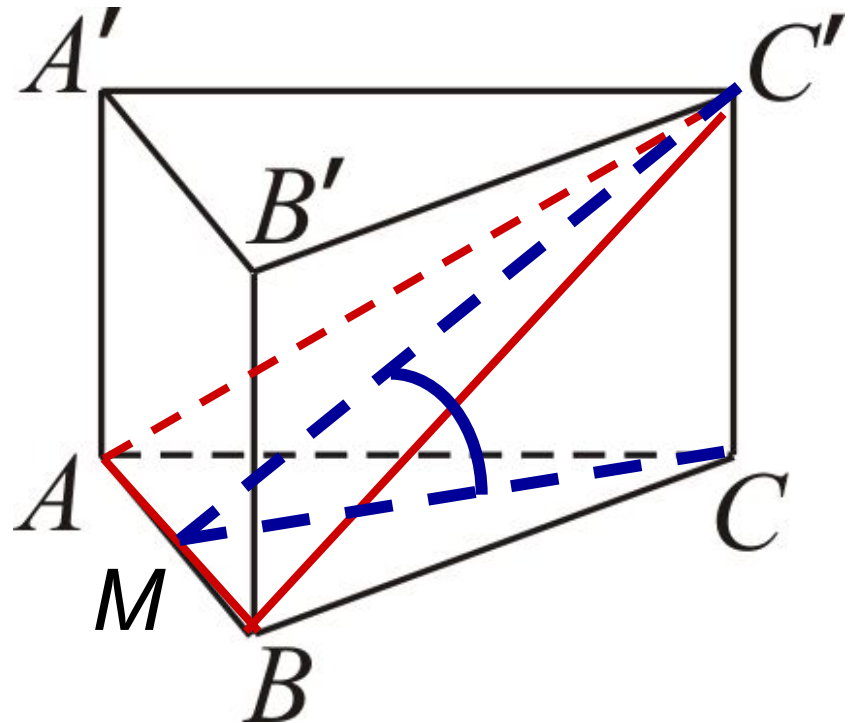
Задача 8



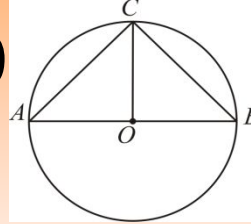
В правильной треугольной призме
сторона основания равна 2 дм, высота
призмы – 1 дм.

Найдите угол между
плоскостью ABC' и
плоскостью
основания.

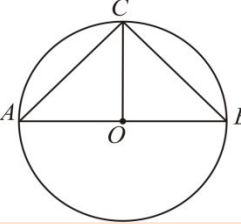
Ответ: 30° .



Задачи для самостоятельного решения

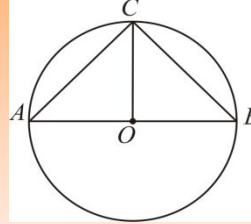


1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ найдите угол между прямыми AD' и $C'D'$.
2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ найдите угол между прямыми SC и CM , если сторона основания равна 3, а высота пирамиды $\sqrt{3}$.



3. Дана правильная призма. Найдите угол между AC' и BC' , если сторона тре-ка ABC равна 1 см, а высота призмы равна 2 см.
4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ найдите угол между AS и BD .
5. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ стороны основания $AB = 2$, $AC = AB = 1$. Боковое ребро равно $2\sqrt{2}$.
Найдите угол между прямыми $A'B$ и AC' .

Домашнее задание



1. Выучите определение угла между прямыми, между прямой и плоскостью и между плоскостями.
2. Решите задачи для самостоятельного решения

