Лекция № 9

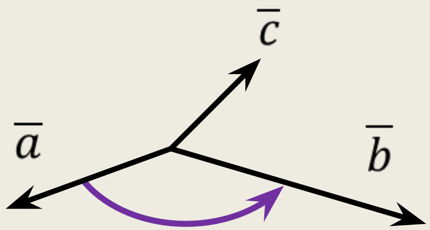
ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Правая и левая тройка векторов

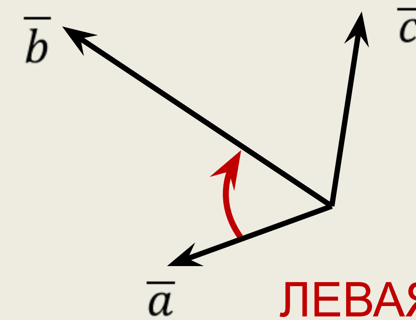
Три некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, взятые в указанном порядке, образуют

ПРАВУЮ ТРОЙКУ, если с конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от первого

вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден ПРОТИВ ЧАСОВОЙ стрелки:



ПРАВАЯ
ТРОЙКА



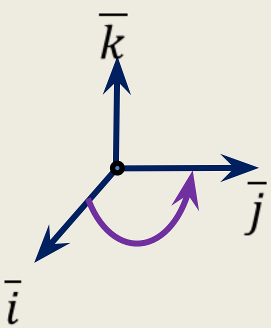
ЛЕВАЯ
ТРОЙКА

Если же с конца третьего вектора $\overline{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\overline{a}$ ко

второму вектору $\overline{b}$ виден ПО ЧАСОВОЙ стрелке, то тройка векторов считается ЛЕВОЙ.

ВОПРОС:

БАЗИСНЫЕ ОРТЫ $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ являются ЛЕВОЙ или ПРАВОЙ тройкой?



ОТВЕТ: ПРАВАЯ
тройка.

ВЕКТОРНОЕ произведение векторов

ВЕКТОРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ двух ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется **ВЕКТОР** $\overline{c}$, который :

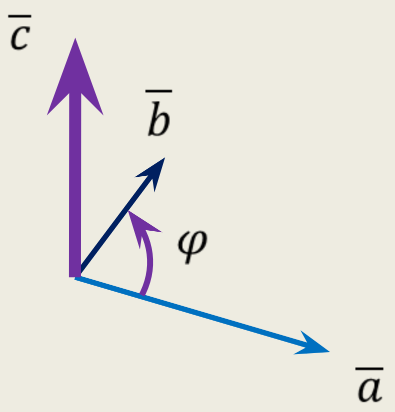
1. ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

2. имеет длину (модуль), равную числу $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3. векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют ПРАВУЮ тройку.

Обозначение векторного произведения :

$$\overline{c} = [\,\overline{a}, \overline{b}\,] = \overline{a} \times \overline{b}$$

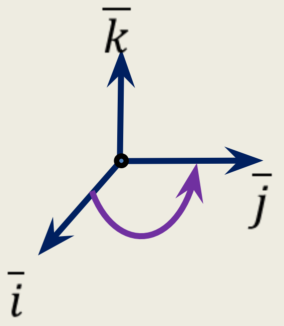


Можно убедиться, что между базисными ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ верны соотношения :

$$[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}; \qquad [\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}; \qquad [\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j};$$

Проверим, например, первое равенство $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$:

1. $\bar{k}$ ортогонален векторам $\bar{i}$ и $\bar{j}$: $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$;
2. $|\bar{k}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$
3. векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют ПРАВУЮ тройку.



ЗАДАНИЕ: Второе и третье равенство проверить дома.

Свойства векторного произведения

1. Постоянное число можно вносить и выносить за скобки векторного произведения :

$$\left[\lambda \cdot \overline{a}, \overline{b}\,\right] = \left[\,\overline{a}, \lambda \cdot \overline{b}\,\right] = \lambda \cdot \left[\,\overline{a}, \overline{b}\,\right]$$

2. При векторном умножении суммы векторов на вектор можно раскрыть скобки :

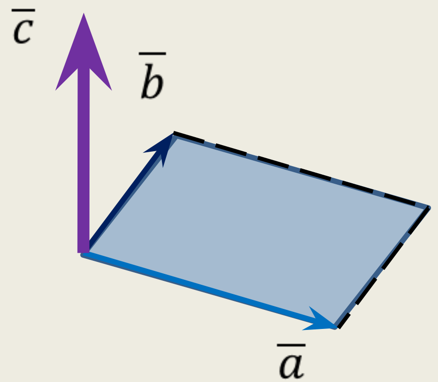
$$\left[\,\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}\,\right] = \left[\,\overline{a}, \overline{c}\,\right] + \left[\,\overline{b}, \overline{c}\,\right];$$

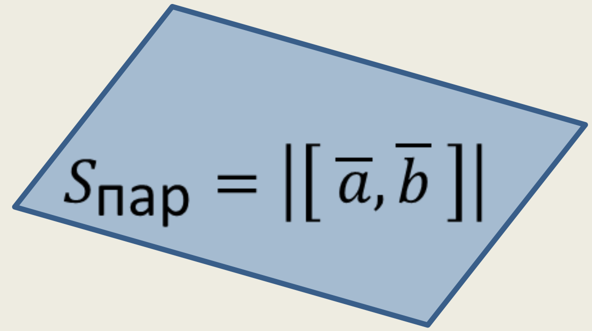
3. При перестановке множителей векторное произведение **МЕНЯЕТ ЗНАК** на противоположный :

$$\left[\,\overline{a}, \overline{b}\,\right] = -\left[\,\overline{b}, \overline{a}\,\right]$$

Геометрический смысл векторного произведения

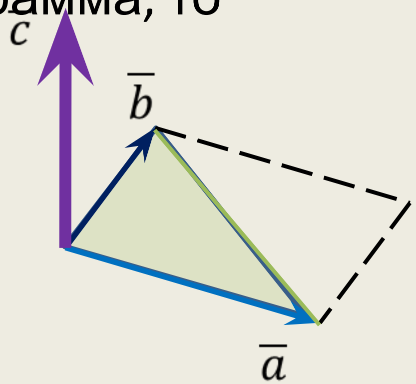
Длина (МОДУЛЬ) $|\,\overline{c}\,|$ векторного произведения $\overline{c} = [\,\overline{a}, \overline{b}\,]$ численно равна ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах:

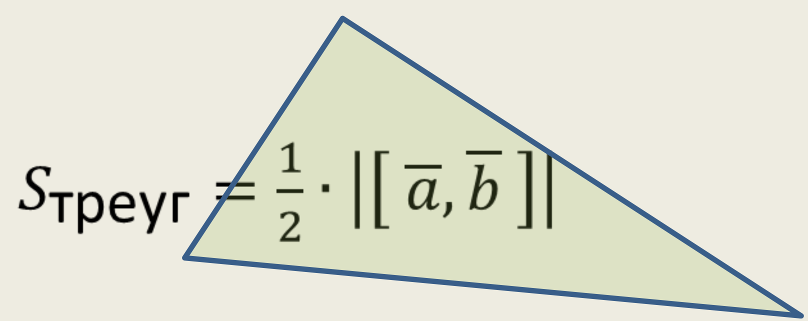




$$S_{\text{пар}} = |[\,\overline{a}, \overline{b}\,]|$$

Так как площадь треугольника равна ПОЛОВИНЕ площади параллелограмма, то





$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2} \cdot |[\,\overline{a}, \overline{b}\,]|$$

Критерий коллинеарности

Два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ КОЛЛИНЕАРНЫ тогда и только тогда, когда

их ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ равно НУЛЕВОМУ вектору:

$$\boxed{\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}}$$

$\Rightarrow$ Действительно, если $\overline{a} \parallel \overline{b}$,то угол между ними равен 0 или $\pi = 180°$. Так как $\sin 0 = 0$ и $\sin \pi = 0$, то длина векторного произведения $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi = 0$, что соответствует НУЛЕВОМУ вектору.

$\Leftarrow$ Если же $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] = \overline{0}$, то $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi = 0$, и так как вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые, то $|\overline{a}| \neq 0$, $|\overline{b}| \neq 0$; значит $\sin\varphi = 0$, то есть $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi = 180°$, и $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

ВОПРОС: Чему равен ВЕКТОРНЫЙ КВАДРАТ вектора $[\overline{a}, \overline{a}]$?

ОТВЕТ: ВЕКТОРНЫЙ КВАДРАТ любого вектора $[\overline{a}, \overline{a}] = \overline{0}$, так как любой вектор КОЛЛИНЕАРЕН самому себе.

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора : $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Вектор $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$ имеет координаты:

$$\overline{c} = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y; a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z; a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x)$$

Для запоминания этой формулы удобно использовать символ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ третьего порядка:

$$\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

В первой строке символического определителя стоят базисные орты $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Во второй строке - координаты первого вектора $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$;

В третьей строке - координаты второго вектора $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Используя разложение определителя по элементам ПЕРВОЙ строки, получим:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

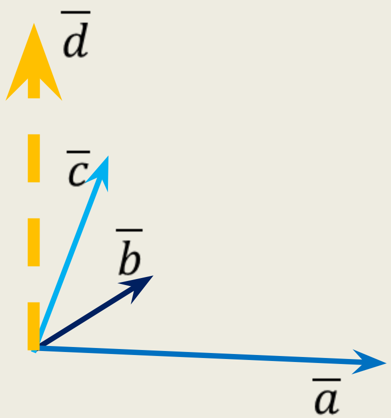
$$= \overline{i} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + \overline{j} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix};$$

СМЕШАННОЕ (ВЕКТОРНО -СКАЛЯРНОЕ)произведение векторов

Составим произведение ТРЕХ векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ таким образом: первые ДВА умножаются

ВЕКТОРНО : $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{d}$, а их результат умножается на ТРЕТИЙ вектор скалярно: $(\overline{d}, \overline{c})$:

$$([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$$



Смешанное произведение НЕ МЕНЯЕТСЯ
при перемене мест знаков
векторного и скалярного умножения :

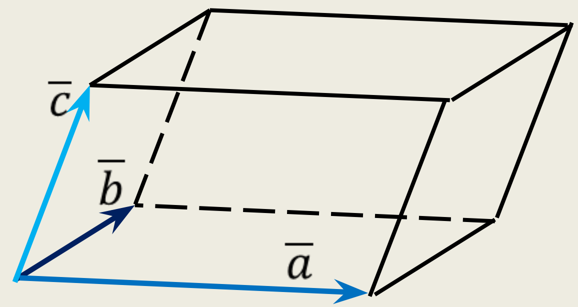
$$\boxed{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})}$$

ВОПРОС: Смешанное произведение является ВЕКТОРОМ ИЛИ ЧИСЛОМ ?

Смешанное произведение является ЧИСЛОМ.

Геометрический смысл СМЕШАННОГО произведения

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \pm V$$



Если построить ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, то

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ этих векторов $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ равно

ОБЪЕМУ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА V, взятому со знаком « ПЛЮС»,

если эти векторы образуют ПРАВУЮ тройку.

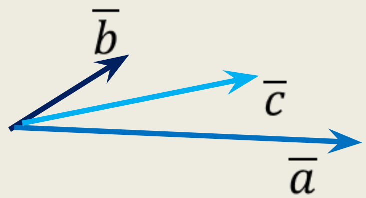
Если тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ ЛЕВАЯ, то

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ этих векторов $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ равно

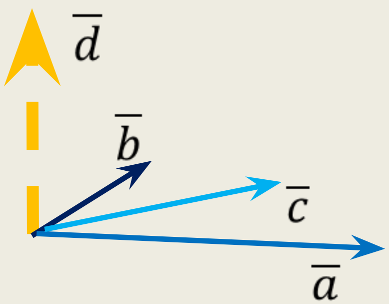
ОБЪЕМУ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА, взятому со знаком «МИНУС»: $-V$.

Критерий КОМПЛАНАРНОСТИ трех векторов

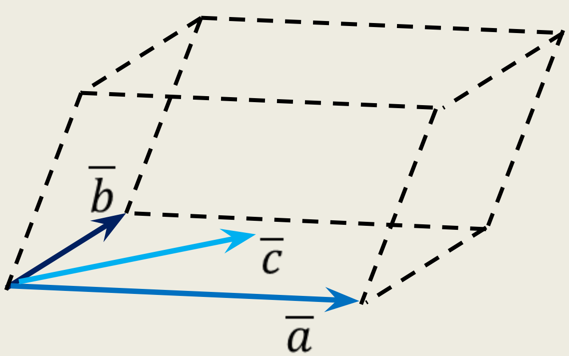
ТРИ ненулевых вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ КОМПЛАНАРНЫ тогда и только тогда, когда их СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО НУЛЮ :



$\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ КОМПЛАНАРНЫ $\Leftrightarrow$ $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$



$\Rightarrow$ Пусть дано, что $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ КОМПЛАНАРНЫ, то есть параллельны одной плоскости. Тогда вектор $\overline{d} = [\overline{a}, \overline{b}]$будет ортогонален этой плоскости и составит с третьим вектором $\overline{c}$ прямой угол . Скалярное призведение таких векторов равно нулю $(\overline{d}\,,\overline{c}) = 0$, то есть $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$.



$\Leftarrow$ Теперь пусть $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$; если они НЕ компланарны, то можно построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \pm V$, то получим $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \neq 0$, что противоречит условию. Значит, предположение о том, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ НЕ компланарны, ОШИБОЧНО , и $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ КОМПЛАНАРНЫ.

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы три вектора : $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z); \overline{b} = (b_x, b_y, b_z), \overline{c} = (c_x, c_y, c_z);$

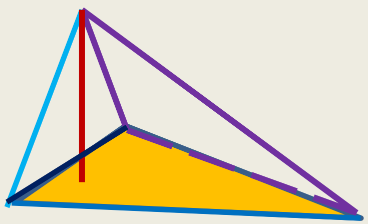
Если найти их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений, то получим формулу:

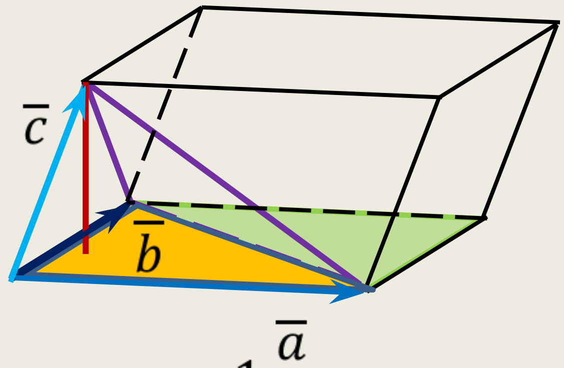
$$\boxed{\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}$$

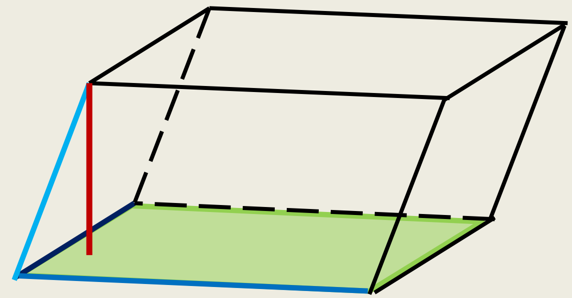
Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из КООРДИНАТ умножаемых векторов.

Приложения смешанного произведения

Вычисление объема треугольной пирамиды (тетраэдра)







$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot h$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S;$$

$$V = S \cdot h$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S \cdot h = \frac{1}{6} S \cdot h = \frac{1}{6} V; \qquad V = \left| \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \right|$$

$$\boxed{V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot \left| \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \right|}$$

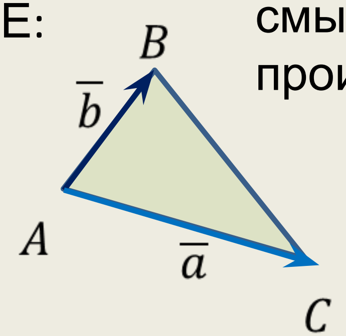
ВОПРОС: Зачем нужен знак модуля у смешанного произведения?

ОТВЕТ: Смешанное произведение левой тройки векторов - число отрицательное, а объем тела (пирамиды) не может быть меньше нуля, поэтому требуется знак модуля.

Задача № 1

Найти площадь треугольника с вершинами : $A(1;\ -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3;\ -1)$.

РЕШЕНИЕ:



По геометрическому смыслу векторного произведения:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\left[\,\overline{a},\overline{b}\,\right]\right| \quad \overline{a} = \overline{AC}\,,\ \overline{b} = \overline{AB}\,.$$

Вычисляем:

$$\overline{AC} = \ (1-1, 3-(-1), -1-2) = \ (0, 4, -3);$$

$$\overline{AB} = \ (5-1, -6-(-1), 2-2) = \ (4, -5, 0);$$

$$\left[\,\overline{AC},\overline{AB}\,\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + \overline{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \overline{i}(-1)^2\big(4\cdot 0-(-3)\cdot(-5)\big) + \overline{j}(-1)^3(0\cdot 0-(-3)\cdot 4) + \overline{k}(-1)^4(0\cdot(-5)-4\cdot 4) =$$

$$= \overline{i}(0-15) - \overline{j}(0+12) + \overline{k}(0-16) = -15\overline{i} - 12\overline{j} - 16\overline{k} = \ (-15;\ -12; -16);$$

$$\left|\left[\,\overline{AC},\overline{AB}\,\right]\right| = \ \sqrt{(-15)^2+(-12)^2+(-16)^2} = \sqrt{225+144+256} = \sqrt{625} = 25;$$

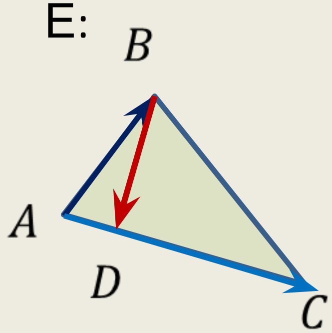
$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\left[\,\overline{AC},\overline{AB}\,\right]\right| = \frac{1}{2}\cdot 25 = 12{,}5;$$

ОТВЕТ: 12,5;

Задача № 2

В треугольнике с вершинами $A(1;\ -1;2), B(5;-6;2), C(1;3;\ -1)$ найти высоту, проведенную из вершины B на основание AC .

РЕШЕНИЕ:



Проведем в треугольнике высоту $\overline{BD}$.

По геометрическому смыслу векторного произведения:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\left[\overline{AC},\overline{AB}\right]\right|;$$

По другой формуле:

$$S_{\text{треуг}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{BD}\right|;$$

Приравняем правые части и выразим

$$\left|\overline{BD}\right| = \frac{\left|\left[\overline{AC},\overline{AB}\right]\right|}{\left|\overline{AC}\right|}$$

Из задачи 1 известно:

$$\overline{AC} = (0,4,-3);\ \overline{AB} = (4,-5,0);\left[\overline{AC},\overline{AB}\right] = (-15;\ -12;-16);\ \left|\left[\overline{AC},\overline{AB}\right]\right| = 25;$$

Вычислим модуль вектора $\overline{AC}$: $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{0^2+4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \ 5;$

$$\left|\overline{BD}\right| = \frac{25}{5} = \ 5;$$

ОТВЕТ: 5.

Задача № 3

Проверить компланарность векторов:

1) $\overline{a} = (1, -1, 3); \overline{b} = (-2, 2, 1); \overline{c} = (3, -2, 5).$

2) $\overline{a_1} = (2, 3, -1); \overline{a_2} = (1, -1, 3); \overline{a_3} = (1, 9, -11)$

РЕШЕНИЕ:

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 3 - 18 + 2 - 10 = -7 \neq 0$$

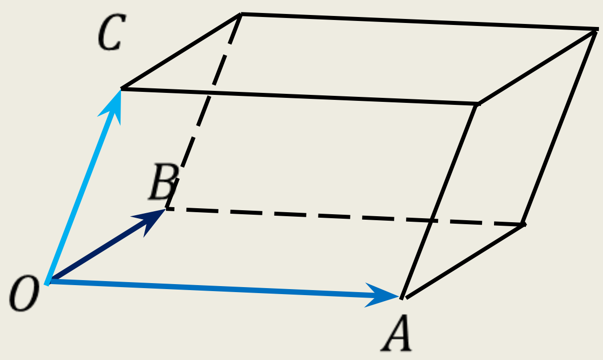
1) ОТВЕТ: векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ не компланарны, образуют левую тройку.

$$\overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 - 9 + 9 - 1 - 54 + 33 = 0$$

2) ОТВЕТ: векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ компланарны.

Задача № 4

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$,



если $\overline{OA} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$, $\overline{OB} = -3\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{OC} = 2\overline{j} + 5\overline{k}$.

РЕШЕНИЕ : Объем параллелепипеда V, построенного на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, равен МОДУЛЮ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ этих векторов :

$$V = \left|\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\right|.$$

Координаты векторов найдем по известному разложению :

$\overline{OA} = 3\overline{i} + 4\overline{j} = (3, 4, 0)$; $\overline{OB} = -3\overline{j} + \overline{k} = (0, -3, 1)$; $\overline{OC} = 2\overline{j} + 5\overline{k} = (0, 2, 5)$.

$$V = \left|\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\right| = \left\| \begin{matrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{matrix} \right\| =$$

$$|3 \cdot (-3) \cdot 5 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-3) \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot 3| =$$

$$= |-45 - 6| = |-51| = 51;$$

Ответ : $V = 51$.