Лицей «Дубна»

# Векторный и координатный методы в решении стереометрических задач

Работу подготовили:
Голованов Илья
Шитова Ксения

Преподаватель:
Рычкова Т.В.

# ВСТУПЛЕНИЕ

- Векторный и координатный методы часто применяются в решении различных стереометрических и планиметрических задач.

- Многие задачи про куб, прямоугольный параллелепипед, пирамиду, тетраэдр решаются данным методом.

- В задачах на отношение отрезков, площадей, объемов используется единственность разложения любого вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам; в метрические задачах - свойства скалярного произведения векторов.

# СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Координатный метод в пространстве:**

- Декартова прямоугольная система координат.
- Декартовы прямоугольные координаты точки.
- Задание фигур уравнениями и неравенствами. Уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
- Уравнение сферы.
- Прямая в пространстве в координатах. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах.

**Векторный метод в стереометрии (комбинированные задачи):**

- Конус.
- Сфера и трехгранный угол.
- Сфера и куб.

# КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

Декартова прямоугольная система координат в пространстве

*Базис* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *который образуют три некомпланарных попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *называется декартовым прямоугольным базисом векторов в пространстве.*

*В разложении* $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *вектора* $\vec{p}$ *тройка чисел* $(x; y; z)$ *называется декартовыми координатами вектора* $\vec{p}$ *в базисе* $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

*Для базисных векторов* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *выполняются следующие равенства :*

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1 \Rightarrow \vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1;$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0;$$

*Если даны векторы :*

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

*то :*

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k};$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k}; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

# НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• *Признак коллинеарности двух векторов* :

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = t;$$

• *признак перпендикулярности двух векторов* :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0;$$

• *длина вектора* $\vec{p}(x; y; z)$ *находится по формуле* :

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

• *угго* $\varphi$ *между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *находится с помощью формулы* :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

*Скалярное произведение векторов* :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b});$$

*Уравнение прямой в пространстве* :

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2} = \frac{z - z_0}{q_3}$$ (*каноническое уравнение прямой*)

$M(x; y; z)$ – *произвольная точка прямой*;

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – *фиксированная точка прямой*;

$\vec{q}\,(q_1; q_2; q_3)$ – *направляющий вектор прямой*.

*Уравнение прямой, проходящей через точки* $(x_1; y_1; z_1)$ *и* $(x_2; y_2; z_2)$, *имеет вид* :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

**Задача:**

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Точка $M$ – центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Точки $E$ и $H$ взяты соответственно на отрезках $BB_1$ и $AC$ ттакчто $BE:BB_1=1:2,\ AH:AC=1:4.$

Выбрать ортонормированный базис в пространстве и, пользуясь разложением вектора в этом базисе, найти:

1. длину отрезка: a)AM; b)EH; c)MH;

2. угол между векторами: a) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; c) $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$;

**Решение.** Введем ортогональ ный базис:

$\vec{i}=\overrightarrow{AB},\ \vec{j}=\overrightarrow{AD},\ \vec{k}=\overrightarrow{AA_1}$

при этом

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=2.$

1. $a)AM=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\overrightarrow{AM}^2}$. Находим:

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{AA_1}+0{,}5\overrightarrow{A_1C_1}=\vec{k}+0{,}5(\vec{i}+\vec{j})=0{,}5\vec{i}+0{,}5\vec{j}+\vec{k}.$

Учитывая, что $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=2$ и $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=4,$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$ получаем:

$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(0{,}5\vec{i}+0{,}5\vec{j}+\vec{k})^2}=\sqrt{0{,}25\vec{i}^2+0{,}25\vec{j}^2+\vec{k}^2}=$

$=\sqrt{0{,}25\cdot4+0{,}25\cdot4+4}=\sqrt{6}.$

$б)\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=0{,}25\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=$

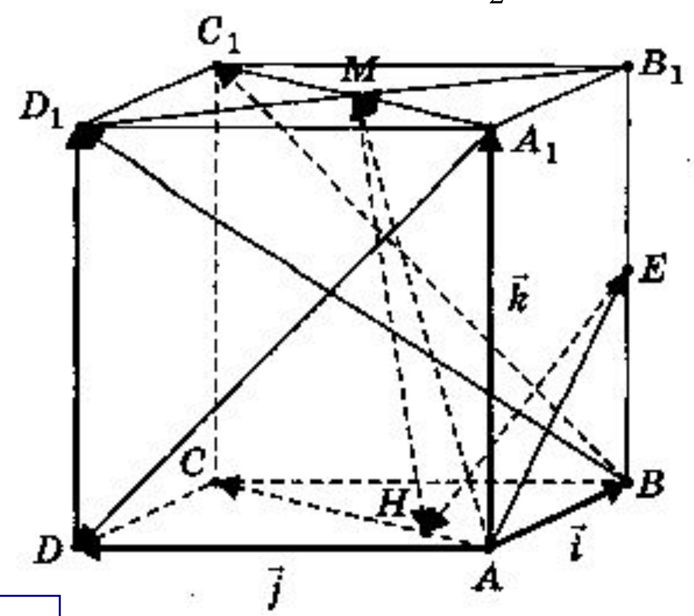
$=0{,}25(\vec{i}+\vec{j})-(\vec{i}+0{,}5\vec{k})=-0{,}75\vec{i}+0{,}25\vec{j}-0{,}5\vec{k}.$

Тогда

$\mathrm{EH}=|\overrightarrow{EH}|=\sqrt{\overrightarrow{EH}^2}=\sqrt{(-0{,}75\vec{i}+0{,}25\vec{j}-0{,}5\vec{k})^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$

$в)$ Аналогично находим:

$\overrightarrow{MH}=|\overrightarrow{MH}|=\sqrt{\overrightarrow{MH}^2}=\sqrt{(-0{,}25\vec{i}-0{,}25\vec{j}-\vec{k})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$




Продолжение решения

2. а) Обозначим: $\angle(\overrightarrow{BC_1};\overrightarrow{AC})=\alpha$. Тогда::

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}.$$

Находим:

$$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}=\vec{j}+\vec{k};\overrightarrow{AC}=\vec{j}+\vec{i};$$

$$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{j}+\vec{k})\cdot(\vec{j}+\vec{i})=\vec{j}\cdot\vec{i}+\vec{j}^2+\vec{k}\cdot\vec{i}+\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{j}^2=\left|\vec{j}\right|^2=4;$$

$$\left|\overrightarrow{BC_1}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|^2}=\sqrt{\left(\vec{j}+\vec{k}\right)^2}=\sqrt{\vec{j}^2+2\vec{j}\vec{k}+\vec{k}^2}=2\sqrt{2};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}=\sqrt{\left(\vec{j}+\vec{i}\right)^2}=\sqrt{\vec{j}^2+2\vec{j}\vec{i}+\vec{i}^2}=2\sqrt{2}.$$

Получаем:

$$\cos\alpha=\frac{4}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{2},\text{ откуда:}$$

$$\angle(\overrightarrow{BC_1};\overrightarrow{AC})=60^\circ.$$

Аналогично можно найти углы между векторами $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

**Ответ**: 1. а) $\sqrt{6}$; б) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; в) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

2. а) $60^\circ$.

# ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

*Базисными векторами* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *отложенными от точки O, определяется декартова прямоугольная система координат. Декартовыми прямоугольными координатами точки M в системе координат Oxyz называются координаты ее радиус – вектора* $\overrightarrow{OM}$ *в прямоугольном базисе* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *Записывают*: $M(x; y; z)$.

Если заданыточки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то находятся :

- Расстояние между точками $A$ и $B$ :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

- Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ :

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

- координаты тточк C $(x; y; z)$, делящей отрезок AB в данном отношении $\lambda(\lambda \neq 1)$ :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

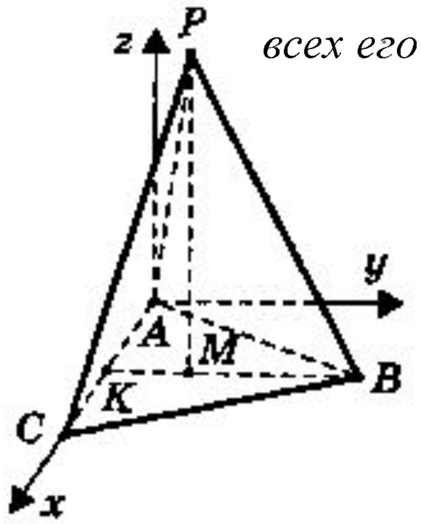
В частности, если тточк C - середина отрезка AB$(\lambda = 1)$, тт :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

- координаты центроида ттреуголь ика ABC, где C$(x_3; y_3; z_3)$ :

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Основание $ABC$ правильного тэтраэдра $PABC$ лежит в плоскости $Oxy$ так, что вершины $A$ и $C$ имеют координаты $A(0;0;0)$, $C(4;0;0)$. Найти координаты: а) остальных вершин тэтраэдра; б) центроидов всех его граней.




Пусть $M$ – центроид треугольника $ABC$. Находим: $K(2;0;01)$ – середина $AC$, $AC = 4$. Отрезок $BK$ – медиана правильного треугольника $ABC$, следовательно, $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp Ox$.

Значит, $BK \| Oy$, причем $BK = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Тогда точка $B$ имеет координаты $B(2;2\sqrt{3};0)$.

Известно, что для любой точки $S$ пространства и центроида $M$ треугольника $ABC$ имеет место соотношение $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

Приняв в качестве $S$ точку $A$, получаем:

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, значит, $\overrightarrow{AM}(2;\dfrac{2\sqrt{3}}{3};0)$,

откуда $M((2;\dfrac{2\sqrt{3}}{3};0)$ – центроид грани $ABC$.

Учитывая, что высота правильного тетраэдра с ребром $a$ равна $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ и $MP \perp Oxy$, находим:

$MP = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, тогда $P(2;\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{4\sqrt{6}}{3})$.

Пусть $M_1, M_2, M_3$ – центроиды граней соответсвенно $PAB, PBC, PAC$. Применим соотношение $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$, справедливое для любой точки $S$ пространства и центроида $M$ треугольника $ABC$, последовательно для пар: $M_1$ и треугольника $PAB$, $M_2$ и треугольника $PBC$, $M_3$ и треугольника $PAC$, взяв вместо $S$ точку $A$. Получим координаты центроидов $M_1, M_2, M_3$:

$$\boxed{M_1(\frac{4}{3};\frac{8\sqrt{3}}{9};\frac{4\sqrt{6}}{9}),\quad M_2(\frac{8}{3};\frac{8\sqrt{3}}{9};\frac{4\sqrt{6}}{9}),\quad M_3(2;\frac{2\sqrt{3}}{9};\frac{4\sqrt{6}}{9}).}$$

# ЗАДАНИЕ ФИГУР УРАВНЕНИЯМИ И НЕРАВЕНСТВАМИ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ.

- **Для составления уравнения сферы достаточно знать или найти координаты ее центра и радиус.**

- **Для составления общего уравнения плоскости достаточно знать или найти координаты любой ее точки и координаты любого вектора, перпендикулярного к этой плоскости (вектор нормали к плоскости), при этом в качестве вектора нормали выбирается тот, координаты которого наиболее удобны при вычислениях, возникающих при составлении уравнения.**

*Расстояние $d$ от точки $M_0$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

*Пользуясь этой формулой, можно находить расстояние между параллель – ными плоскостями, между параллельными прямой и плоскостью, между скрещивающимися прямыми.*

*Если плоскость происходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то ее уравнение можно записать в виде, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, затем преобразовать.*

*Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $M(-1;2;1)$ *и параллельной плоскости :* а) $Oxy$; , б) $Oyz$; в) $Oxz$; г) $2x - y + 3z + 5 = 0$.

*а) Уравнение координатной плоскости* $Oxy$ *имеет вид :* $z = 0$. *Вектором нормали к этой плоскости служит вектор* $\vec{k}(0;0;1)$. *Так как плоскость, проходящая через точку* $M(-1;2;1)$, *параллельна плоскости* $Oxy$, *то эта плоскость также перпендикулярна вектору* $\vec{k}(0;0;1)$, *который является оптимально удобным при выборе ее вектора нормали. Составляем уравнение этой плоскости :*

$$0(x+1) + 0(y-2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z - 1 = 0.}$$

*Аналогично получаем уравнения* $\boxed{: \text{б) } x + 1 = 0; \text{ в) } y - 2 = 0.}$

*г) Из уравнения плоскости* $2x - y + 3z + 5 = 0$ *следует, что вектор* $\vec{n}(2;-1;3)$ *является ее вектором нормали. Его принимаем в качестве вектора нормали плоскости* $\beta$, *проведенной через точку* $M(-1;2;1)$ *параллельно данной плоскости. Составляем уравнение плоскости* $\beta$ :

$$2(x+1) - 1(y-2) + 3(z-1) = 0,$$

$$\boxed{2x - y + 3z + 1 = 0.}$$

*Написать уравнение плоскости, проходящей через точки* $M(1;3;8)$ *и* $N(2;5;-1)$ *перпендикулярной плоскости* $2x - y + z = 0$.

*Так как плоскость* $\alpha$ *проходит через точки* $M(1;3;8)$, $N(2;5;-1)$ *и перпендикулярна плоскости* $2x - y + z = 0$, *для которой вектор* $\vec{p}(2;-1;1)$ *является вектором нормали, то в качестве вектора* $\vec{n}(a;b;c)$ *нормали плоскости* $\alpha$ *можно принять вектор, перпендикулярный векторам* $\overrightarrow{MN}(1;2;-9)$ *и* $\vec{p}(2;-1;1)$. *Имеем*:

$\vec{n} \perp \overrightarrow{MN},\ \vec{n} \perp \vec{p}, \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0,\ \vec{n} \cdot \vec{p} = 0,$

*поэтому координаты* $a$, $b$ *и* $c$ *вектора* $\vec{n}$ *получаем, рещая систему уравнений*

$$\begin{cases} a + 2b - 9c = 0, \\ 2a - b + c = 0. \end{cases}$$

*Пусть* $c = 1$, *тогда получаем систему уравнений*

$$\begin{cases} a + 2b = 9, \\ 2a - b = -1, \end{cases}$$ *решением которой является* $b = \frac{19}{5}$, $a = \frac{7}{5}$.

*Значит, вектор* $\vec{n}$ *имеет координаты* $\vec{n}\,(\frac{7}{5};\frac{19}{5};1)$.

*Заменим этот вектор коолинеарным вектором* $\vec{n}_1(7;9;15)$ *с целыми координатами и составим уравнение плоскости* $\alpha$:

$7(x-1) + 19(y-3) + 5(z-8) = 0,$

$\boxed{7x + 19y + 5z - 104 = 0.}$

*Угол между двумя плоскостями* $\alpha$ *и* $\beta$, *заданными уравнениями соответственно* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, *взаимосвязан с углом между их векторами нормалей* $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ *и* $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ *и находится с помощью формулы*:

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \left|\cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)\right| = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

# УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Сфера (поверхность шара) задается уравнением:

Задача:

**Найти геометрическое место точек, удаленных от плоскости x+2y-2z-5=0 на расстояние, равное 2.**

*Пусть уравнением* $x+2y-2z-5=0$ *задана плоскость* $\alpha$, $M(a;b;c)$ – *любая точка искомого множества точек. Тогда имеем* :

$$\rho(M;\alpha)=2 \Leftrightarrow \frac{|a+2b-2c-5|}{3}=2, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-2c-5=6 \\ a+2b-2c-5=-6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-2c=11; \\ a+2b-2c=-1. \end{cases}$$

*При* $b=c=1$ *получаем* $a=-1$ *или* $a=11$. *Значит, искомому множеству точек принадлежат точки* $M_1(-1;1;1)$ *и* $M_2(11;1;1)$.

*Так как множество всех точек пространства, равноудаленных от данной плоскости, представляет собой две плоскости, параллельные данной, то одна из них происходит через точку* $M_1$ *и имеет уравнение*

$$(x+1)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+1=0,$$

*а другая проходит через точку* $M_2$; *ей соответствует уравнение*

$$(x-11)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{x+2y-2z-11=0.}$$

# ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ В КООРДИНАТАХ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ.

*При решении задач на взаимное расположение двух прямых a и b в пространстве учащиеся должны научиться видеть направляющие векторы соответственно* $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3)$ *и* $\vec{p}_2(b_1; b_2; b_3)$ *этих прямых из их параметрических уравнений и определять, параллельны ли они (используя признак :* $a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$*), а также перпендикулярны ли эти прямые (используя признак :* $a \perp b \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$*).*
*Если прямые не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы*

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

*Аналогично, зная направляющий вектора* $\vec{p}(a; b; c)$ *прямой l и вектор* $\vec{n}(A; B; C)$ *нормали плоскости* $\alpha$*, можно определить, параллельны ли они (с помощью признака* $l \parallel \alpha \Leftrightarrow a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$*), а также перпендикулярны ли (с помощью признака* $l \perp a \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$*). Если данные прямая и плоскость не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы*

$$\sin\angle(l; a) = \left|\cos\angle(\vec{p}; \vec{n})\right| = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## Найти координаты точки, равноудаленной от всех вершин тетраэдра, *PABC*, заданных координатами: *A (0;0;0), B(8;0;0), C(0;-2;0), P(0;0;-6).*

*Заметим, что расстояние от данной точки до вершин тетраэдра будет являться радиусом описанной около него окружности.*

*Множеством всех точек пространства, равноудаленных от точек A и B, является плоскость серединных перпендикуляров отрезка AB.*

*Поэтому искомой является точка пересечения плоскостей серединных перпендикуляров трех любых ребер тетраэдра, не лежащих в одной плоскости.*

*Пусть* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – *плоскости серединных перпендикуляров ребер соответственно* $AB$, $BC$, $AP$ *тетраэдра* $ABCP$; $K$, $H$, $M$ – *середины соответственно этих ребер.*

*Находим:* $\overrightarrow{AB}(8;0;0)$, $\overrightarrow{CB}(8;2;0)$ *и* $\overrightarrow{PA}(0;0;6)$ – *векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям* $\alpha$, $\beta$ *и* $\gamma$; $K(4;0;0)$, $H(4;-1;0)$, $M(0;0;-3)$.

*Для составления уравнений плоскостей плоскостей* $\alpha$, $\beta$ *и* $\gamma$ *в качестве векторов нормалей стоит взять векторы*

$\vec{n}_1(1;0;0) \parallel \overrightarrow{AB}$, $\vec{n}_2(4;1;0) \parallel \overrightarrow{CB}$, $\vec{n}_3(0;0;1) \parallel \overrightarrow{PA}$.

*Тогда уравнения плоскостей* $\alpha$, $\beta$ *и* $\gamma$ *соответственно таковы:*

$x - 4 = 0$, $4x + y - 15 = 0$, $z + 3 = 0$.

*Решением этой системы является тройка чисел:* $x = 4$, $y = -1$, $z = -3$.

*Значит, равноудаленной от всех вершин тетраэдра PABC является точка* $\boxed{T(4;-1;3)}$.

*Причем удалена эта точка от вершин на расстояние, равное* $TA = \sqrt{16+1+9} = \boxed{\sqrt{26}}$.

# ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В СТЕРЕОМЕТРИИ

**Стереометрические задачи, основанные на применении векторов, встречаются достаточно часто и в ЕГЭ по математике, и во вступительных экзаменах в различные вузы, на олимпиадах и конкурсах.**

Задача: *На ребрах DA, DB и DC тетраэдра ABCD взяты точки M, N и K так, что $DM = 1/3DA$, $DN = 1/4DB$, $DK = 3/5DC$. Пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком соотношении плоскость MNK делит отрезок DG?*

*Пусть* $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. *Плоскость MNK пересекает DG в точке P,* $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DG}$.

*Выразим* $\overrightarrow{DG}$ *через* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$. *Если Q – середина BC, то*

$\overrightarrow{AQ} = 1/2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. *Значит,* $\overrightarrow{AG} = 2/3\overrightarrow{AQ} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

*Находим* $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = \vec{a} + 1/3((\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c} - \vec{a})) = 1/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

*Значит,* $\overrightarrow{DP} = \lambda/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. *Поскольку точка P принадлежит плоскости MNK,* $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, *то* $\overrightarrow{MP}$ *можно разложить по векторам* $\overrightarrow{MN}$ *и* $\overrightarrow{MK}$,

$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MK}$. *Следовательно,*

$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} = 1/3\vec{a} + x(\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM}) + y(\overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DM}) = 1/3\vec{a} + x(1/4\vec{b} - 1/3\vec{a}) +$

$y(3/5\vec{c} - 1/3\vec{a}) = 1/3(1 - x - y)\vec{a} + 1/4x\vec{b} + 3/5y\vec{c}$.

*Приравняем друг к другу два полученных представления* $\overrightarrow{DP}$:

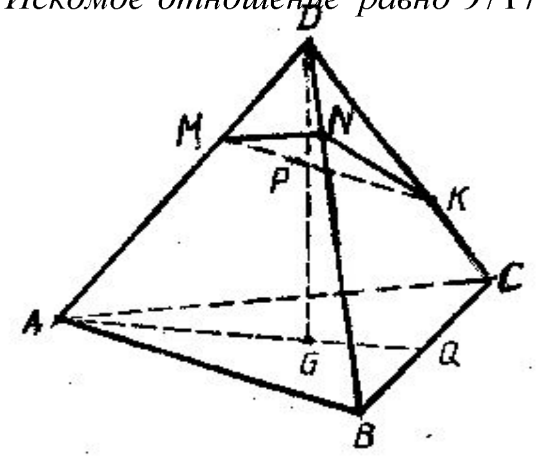
$\lambda/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 1/3(1 - x - y)\vec{a} + 1/4x\vec{b} + 3/5y\vec{c}$.

*Ввиду единственности разложения любого вектора по трем некомпланарным векторам будем иметь систему*

$$\lambda = (1 - x - y),\ \frac{\lambda}{3} = \frac{x}{4},\ \frac{\lambda}{3} = \frac{3}{5}y,$$

*откуда* $y = 9/26$.

*Искомое отношение равно* $9/17$.



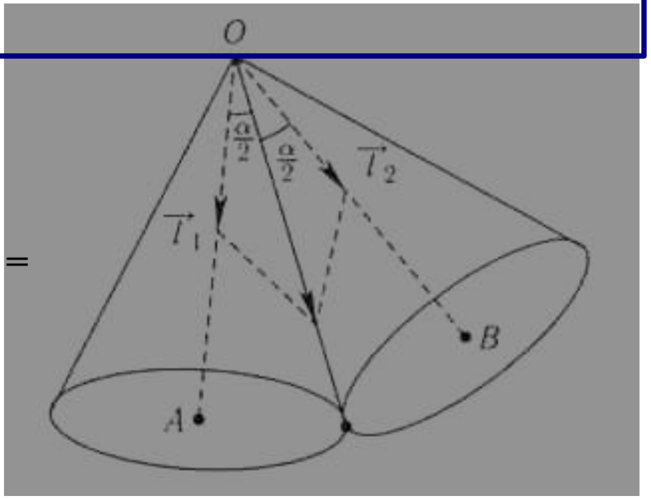
**Заметим, что оси симметрии двух касающихся конусов и образующая, по которой они касаются, лежат в одной плоскости (это следствие того, что плоскость, задаваемая двумя осями OA и OB, является плоскостью симметрии для каждого их двух конусов).**

# КОНУСЫ

**Три прямых круговых конуса с углом $\alpha$ при вершине осевого сечения имеют общую вершину и попарно касаются друг друга. Найдите углы между образующими, по которым касаются эти конусы.**

*Введем теперь в качестве базисных три вектора* $\vec{l_1},\ \vec{l_2},\ \vec{l_3}$, *принадлежащие осям симметрии конусов и такие, что* $\left|\vec{l_1}\right| = \left|\vec{l_2}\right| = \left|\vec{l_3}\right| = 1$. *Таблица умножения векторов базиса в данном случае будет иметь вид:*

| | $\vec{l_1}$ | $\vec{l_2}$ | $\vec{l_3}$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{l_1}$ | 1 | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\vec{l_2}$ | $\cos\alpha$ | 1 | $\cos\alpha$ |
| $\vec{l_3}$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | 1 |




*Векторы* $\vec{a} = \vec{l_1} + \vec{l_2},\ \vec{b} = \vec{l_2} + \vec{l_3},\ \vec{c} = \vec{l_1} + \vec{l_3}$, *как легко видеть, принадлежат образующим, по которым касаются конусы. Тогда косинус искомого угла* $\varphi$ *может быть вычислен следующим образом:*

$$\cos\varphi = \cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{(\vec{l_1}+\vec{l_2})(\vec{l_2}+\vec{l_3})}{\sqrt{((\vec{l_1}+\vec{l_2})^2}\sqrt{(\vec{l_3}+\vec{l_2})^2}} =$$

$$= \frac{3\cos\alpha + 1}{\sqrt{2+2\cos\alpha}\sqrt{2+2\cos\alpha}} = \frac{3\cos\alpha+1}{2\cos\alpha+2} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{3\cos\alpha+1}{2\cos\alpha+2}.$$

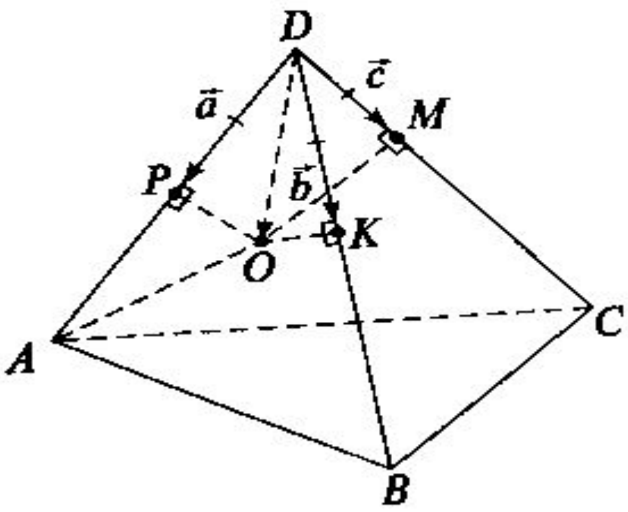
*Ответ*: $\varphi = \arccos\dfrac{3\cos\alpha+1}{2\cos\alpha+2}$.

# ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ.
# СФЕРА И ТРЕХГРАННЫЙ УГОЛ (СФЕРА, КАСАЮЩАЯСЯ РЕБЕР ТЕТРАЭДРА ИЛИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ).

*В треугольной пирамиде $DABC$ известны углы при вершине $D$:*
$\angle ADB = \angle ADC = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BDC = \dfrac{\pi}{3}$. *Длина ребра $DA$ равна $2/3$.*
*Сфера с центром $O$ касается ребер $DA$, $DB$ и $DC$ пирамиды.*
*Расстояние от вершины $A$ пирамиды до центра $O$ сферы равно $2/3$. Найти радиус сферы.*

*Пусть сфера касается ребер $DA$, $DB$, $DC$ пирамиды в точках $P$, $K$, $M$ соответственно. Тогда $DP = DK = DM$ (как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки – вершины $D$ пирамиды). Пусть $DP = l$ $(l > 0)$. Выберем в качестве базисные векторы $\overrightarrow{DP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DK} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{c}$ и составим таблицу умножения векторо базиса:*

| | $\vec{a}$ | $\vec{b}$ | $\vec{c}$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{a}$ | $l^2$ | $0$ | $0$ |
| $\vec{b}$ | $0$ | $l^2$ | $l^2/2$ |
| $\vec{c}$ | $0$ | $l^2/2$ | $l^2$ |




[Продолжение решения](#)

2. Пусть $\overrightarrow{DO} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Заметим, что $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - \overrightarrow{DO}$,

$\overrightarrow{OK} = \vec{b} - \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{c} - \overrightarrow{DO}$. Так как $\overrightarrow{OP} \perp \vec{a}$, получаем

$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} = 0$, $\overrightarrow{OK} \cdot \vec{b} = 0$, $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{c} = 0$. Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} (\vec{a} - \overrightarrow{DO})\vec{a} = 0, \\ (\vec{в} - \overrightarrow{DO})\vec{b} = 0, \\ (\vec{c} - \overrightarrow{DO})\vec{c} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{a}^{\,2}, \\ \vec{b} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{b}^{\,2}, \\ \vec{c} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{c}^{\,2}. \end{cases}$$

Используя таблицу умножения базисных векторов и сокращая на $l^2$, получим систему:

$$\begin{cases} y + 1/2z = 1, \\ 1/2y + z = 1, \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2/3, \\ z = 2/3. \end{cases}$$

Слледовате ьно, $\overrightarrow{DO} = 1/3(3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})$. Далее, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DO}$,

но $\overrightarrow{DA} = \dfrac{2\vec{a}}{3l}$, поэтому $\overrightarrow{OA} = \dfrac{2\vec{a}}{3l} - 1/3(3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}) = 1/3\left[(2/l - 3)\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}\right]$

Значит, $\overrightarrow{OA}^{\,2} = \dfrac{l^2}{9}\left[(2/l - 3)^2 + 4 + 4 + 4\right]$, по условию $\overrightarrow{OA}^{\,2} = \dfrac{4}{9}$.

Поэтому $l^2\left(\dfrac{4}{l^2} - \dfrac{12}{l} + 21\right) = 4 \Rightarrow 21\,l^2 - 12l = 0 \Rightarrow l = \dfrac{4}{7}$.

Тогда из теоремы Пифагора следует, что:

$$OP = \sqrt{OA^2 - AP^2} = \sqrt{4/9 - (DA \quad - DP \quad)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{22}{7}}}.$$

# ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ. СФЕРА, ОПИСАННАЯ ВОКРУГ ТЕТРАЭДРА ИЛИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ.

*В треугольной пирамиде ребра DA, DB, DC, BC равны между собой и равны 2, $AC=\sqrt{6}$, $AB=2\sqrt{2}$. Найти радиус сферы, описанной вокруг этой пирамиды.*

*Найдем сначала плоские углы(их косинусы) при вершине D.*

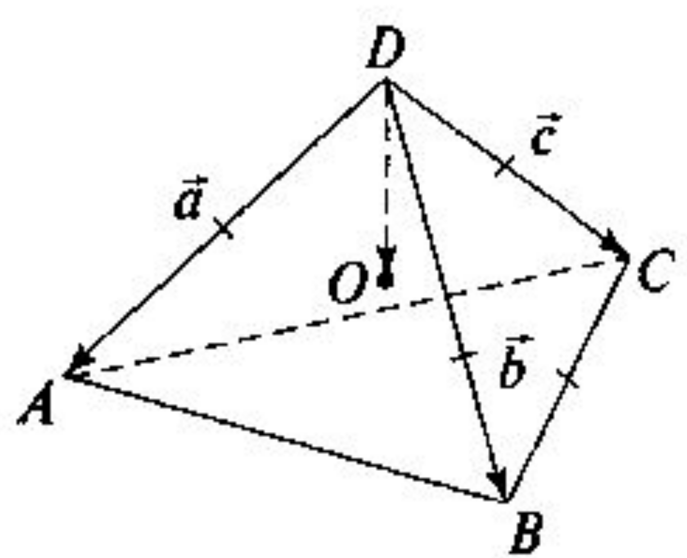
*Так как* $DB=DC=BC$, *то* $\angle BDC=\dfrac{\pi}{3}$. *Так как* $DA^2+DB^2=$

$4+4=8=AB^2$, *то* $\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$ *(по теореме, обратной теореме Пифагора). По следствию из теоремы косинусов для треугольника ABC имеем*

$$\cos\angle ADC=\frac{DA^2+DC^2-AC^2}{2DA\cdot DC}=\frac{4+4-6}{2\cdot2\cdot2}=1/4.$$

*Выберем в качестве базисных векторы* $\overrightarrow{DA}=\vec{a}, \overrightarrow{DB}=\vec{b}, \overrightarrow{DC}=\vec{c}$ *и составим таблицу умножения векторов базиса:*

| | $\vec{a}$ | $\vec{b}$ | $\vec{c}$ |
|---|---|---|---|
| $\vec{a}$ | 4 | 0 | 1 |
| $\vec{b}$ | 0 | 4 | 2 |
| $\vec{c}$ | 1 | 2 | 4 |




*Продолжение решения*

*Пусть точка O – центр описанной около тетраэдра DABC сферы, R – ее радиус, и пусть* $\overrightarrow{DO} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$

*Система в данном случае имеет вид:*

$$\begin{cases} \vec{a}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2 \\ \vec{b}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2 \\ \vec{c}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2, \end{cases}$$

*откуда*

$$\begin{cases} 4x + z = 2, \\ 4y + 2z = 2, \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}z, \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}z, \\ 1 - z + 1/2 - 1/4z + 4z = 2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}z, \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}z, \\ z = \dfrac{2}{11}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{11}, \\ y = \dfrac{9}{22}, \\ z = \dfrac{2}{11}. \end{cases}$$

*Следовательно,* $\overrightarrow{DO} = \dfrac{1}{22}(10\vec{a} + 9\vec{b} + 4\vec{c})$ *и*

$$R = \left|\overrightarrow{DO}\right| = \sqrt{\overrightarrow{DO}^2} = \frac{1}{22}\sqrt{(10\vec{a} + 9\vec{b} + 4\vec{c})^2} = \frac{1}{22}\sqrt{1012} = \boxed{\frac{\sqrt{253}}{11}}.$$

# ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ. СФЕРА И КУБ.

Задача:

*Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найти радиус сферы, проходящей через вершину $A$, середины ребер $DC$ и $BB_1$ и центр грани $A_1B_1C_1D_1$.*

*Введем систему координат с началом в вершине $A$, выбрав оси так, чтобы вершины $B$, $D$ и $A_1$ имели соответственно координаты* $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ *и* $(0;0;1)$.

*Координаты середин ребер $DC$ и $BB_1$ соответственно* $(0{,}5;1;0)$, $(1;0;0{,}5)$, *центра грани $A_1B_1C_1D_1$* – $(0{,}5;0{,}5;1)$.

*Уравнение сферы с центром $(x_0;y_0;z_0)$ и радиусом $r$ имеет вид* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.

*Поскольку сфера содержит начало координат, то $d=0$. Для $a$, $b$ и $c$ легко получить систему уравнений*

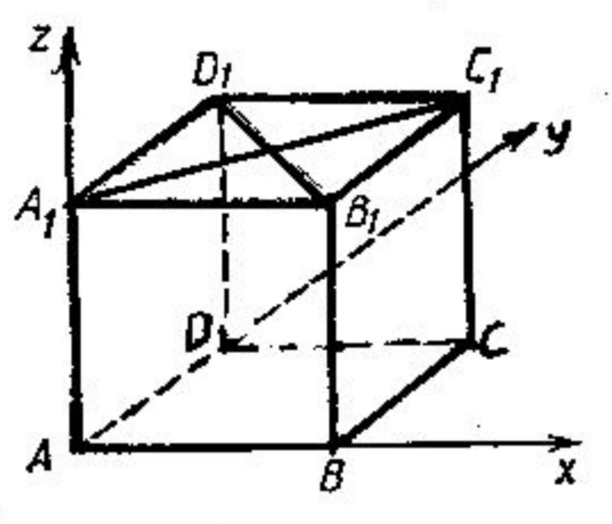
$$\begin{cases} 5/4+1/2a+b=0, \\ 5/4+a+1/2c=0, \\ 3/2+1/2a+1/2b+c=0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{13}{14},\ b=-\frac{11}{14},\ c=-\frac{9}{14}.$$

*Таким образом, уравнение сферы имеет вид:*

$$x^2+y^2+z^2-13/14x-11/14y-9/14z=0,$$

$$(x-13/28)^2+(y-11/28)^2+(z-9/28)^2=371/28^2.$$




*Искомый радиус равен* $\boxed{\sqrt{371}/28}$.

# ВЫВОДЫ

- **Координатный и векторный методы удобно применять в решении задач, в которых трудно построить расстояние от точки до прямой или от точки до плоскости, и в задачах с многогранниками, к которым естественно привязать прямоугольную систему координат (куб, параллелепипед, пирамида).**

- **Использование данных методов позволяет найти нужную величину с наименьшими затратами времени и найти оригинальное решение для сложных задач (например, в которых вокруг многогранника или трехгранного угла описана сфера или шар).**

# Спасибо
# за внимание!

Использованная литература