Лицей «Дубна»

Векторный и координатный методы в решении стереометрических задач

Работу подготовили:
Голованов Илья
Шитова Ксения

Преподаватель:
Рычкова Т.В.

ВСТУПЛЕНИЕ

- Векторный и координатный методы часто применяются в решении различных стереометрических и планиметрических задач.

- Многие задачи про куб, прямоугольный параллелепипед, пирамиду, тетраэдр решаются данным методом.

- В задачах на отношение отрезков, площадей, объемов используется единственность разложения любого вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам; в метрические задачах - свойства скалярного произведения векторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Координатный метод в пространстве:

- Декартова прямоугольная система координат.
- Декартовы прямоугольные координаты точки.
- Задание фигур уравнениями и неравенствами. Уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
- Уравнение сферы.
- Прямая в пространстве в координатах. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах.

Векторный метод в стереометрии (комбинированные задачи):

- Конус.
- Сфера и трехгранный угол.
- Сфера и куб.

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *который образуют три некомпланарных попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *называется декартовым прямоугольным базисом векторов в пространстве.*

В разложении $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *вектора* $\vec{p}$ *тройка чисел* $(x; y; z)$ *называется декартовыми координатами вектора* $\vec{p}$ *в базисе* $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Для базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *выполняются следующие равенства :*

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1 \Rightarrow \vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1;$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0;$$

Если даны векторы :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

то :

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k};$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k}; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• *Признак коллинеарности двух векторов* :

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = t;$$

• *признак перпендикулярности двух векторов* :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0;$$

• *длина вектора* $\vec{p}(x; y; z)$ *находится по формуле* :

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

• *угго* φ *между векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *находится с помощью формулы* :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

Скалярное произведение векторов :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b});$$

Уравнение прямой в пространстве :

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2} = \frac{z - z_0}{q_3} \text{ (каноническое уравнение прямой)}$$

$M(x; y; z)$ – *произвольная точка прямой*;

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – *фиксированная точка прямой*;

$\vec{q}\,(q_1; q_2; q_3)$ – *направляющий вектор прямой*.

Уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1; z_1)$ *и* $(x_2; y_2; z_2)$, *имеет вид* :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Задача:

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Точка M – центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Точки E и H взяты соответственно на отрезках BB_1 и AC ттакчто $BE:BB_1=1:2$, $AH:AC=1:4$.

Выбрать ортонормированный базис в пространстве и, пользуясь разложением вектора в этом базисе, найти:

1. длину отрезка: a)AM; b)EH; c)MH;

2. угол между векторами: a) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; c) $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$;

Решение. Введем ортогональ ный базис:

$\vec{i}=\overrightarrow{AB},\ \vec{j}=\overrightarrow{AD},\ \vec{k}=\overrightarrow{AA_1}$

при этом

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=2.$

1. $a)AM=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\overrightarrow{AM}^2}$. Находим:

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{AA_1}+0{,}5\overrightarrow{A_1C_1}=\vec{k}+0{,}5(\vec{i}+\vec{j})=0{,}5\vec{i}+0{,}5\vec{j}+\vec{k}.$

Учитывая, что $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=2$ и $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=4,$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$ получаем:

$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(0{,}5\vec{i}+0{,}5\vec{j}+\vec{k}\right)^2}=\sqrt{0{,}25\vec{i}^2+0{,}25\vec{j}^2+\vec{k}^2}=$

$=\sqrt{0{,}25\cdot4+0{,}25\cdot4+4}=\sqrt{6}.$

б) $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=0{,}25\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=$

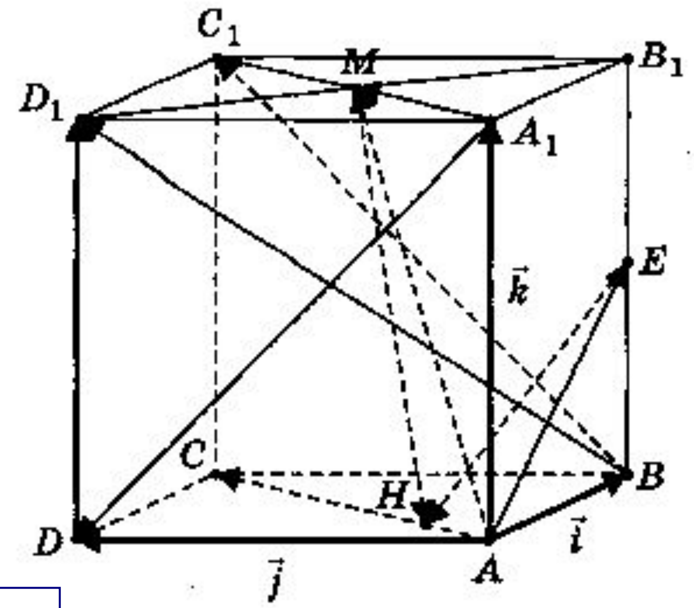
$=0{,}25(\vec{i}+\vec{j})-(\vec{i}+0{,}5\vec{k})=-0{,}75\vec{i}+0{,}25\vec{j}-0{,}5\vec{k}.$

Тогда

$\mathrm{EH}=|\overrightarrow{EH}|=\sqrt{\overrightarrow{EH}^2}=\sqrt{(-0{,}75\vec{i}+0{,}25\vec{j}-0{,}5\vec{k})^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$

в) Аналогично находим:

$\overrightarrow{MH}=|\overrightarrow{MH}|=\sqrt{\overrightarrow{MH}^2}=\sqrt{(-0{,}25\vec{i}-0{,}25\vec{j}-\vec{k})^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$



Продолжение решения

2. а) Обозначим: $\angle(\overrightarrow{BC_1};\overrightarrow{AC})=\alpha$. Тогда::

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}.$$

Находим:

$$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}=\vec{j}+\vec{k};\ \overrightarrow{AC}=\vec{j}+\vec{i};$$

$$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{j}+\vec{k})\cdot(\vec{j}+\vec{i})=\vec{j}\cdot\vec{i}+\vec{j}^{\,2}+\vec{k}\cdot\vec{i}+\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{j}^{\,2}=\left|\vec{j}\right|^2=4;$$

$$\left|\overrightarrow{BC_1}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|^2}=\sqrt{\left(\vec{j}+\vec{k}\right)^2}=\sqrt{\vec{j}^{\,2}+2\vec{j}\vec{k}+\vec{k}^{\,2}}=2\sqrt{2};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}=\sqrt{\left(\vec{j}+\vec{i}\right)^2}=\sqrt{\vec{j}^{\,2}+2\vec{j}\vec{i}+\vec{i}^{\,2}}=2\sqrt{2}.$$

Получаем:

$$\cos\alpha=\frac{4}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{2},\ \text{откуда:}$$

$$\angle(\overrightarrow{BC_1};\overrightarrow{AC})=60^\circ.$$

Аналогично можно найти углы между векторами $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

Ответ: 1. а) $\sqrt{6}$; б) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$; в) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$;

2. а) 60°.

ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

Базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, *отложенными от точки O, определяется декартова прямоугольная система координат. Декартовыми прямоугольными координатами точки M в системе координат Oxyz называются координаты ее радиус – вектора* $\overrightarrow{OM}$ *в прямоугольном базисе* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *Записывают* : $M(x; y; z)$.

Если заданыточки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то находятся :

• Расстояние между точками A и B :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

• Длина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

• координаты тточк С $(x; y; z)$, делящей отрезок АВ в данном отношении $\lambda (\lambda \neq 1)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

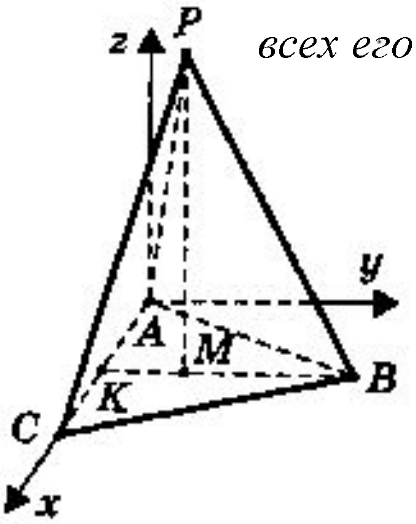
В частности, если тточк С - середина отрезка АВ$(\lambda = 1)$, тт :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

• координаты центроида ттреуголь ика АВС, где С$(x_3; y_3; z_3)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Основание ABC правильного тэтраэдра $PABC$ лежит в плоскости Oxy так, что вершины A и C имеют координаты $A(0;0;0)$, $C(4;0;0)$. Найти координаты :а)остальных вершин тэтраэдра; б)центроидов всех его граней.



Пусть M – центроид треугольника ABC. Находим : $K(2;0;01)$ – середина AC, $AC = 4$. Отрезок BK – медиана правильного треугольника ABC, следовательно, $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp Ox$.

Значит, $BK \| Oy$, причем $BK = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Тогда точка B имеет координаты $B(2;2\sqrt{3};0)$. Известно, что для любой точки S пространства и центроида M треугольника ABC имеет место соотношение $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

Приняв в качестве S точку A, получаем :

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, *значит*, $\overrightarrow{AM}(2;\dfrac{2\sqrt{3}}{3};0)$,

откуда $M((2;\dfrac{2\sqrt{3}}{3};0)$ – *центроид грани ABC.*

Учитывая, что высота правильного тетраэдра с ребром a равна $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ и $MP \perp Oxy$, находим :

$MP = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, *тогда* $P(2;\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{4\sqrt{6}}{3})$.

Пусть M_1, M_2, M_3 – центроиды граней соответсвенно PAB, PBC, PAC. Применим соотношение $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$, *справедливое для любой точки S пространства и центроида M треугольника ABC, последовательно для пар : M_1 и треугольника PAB, M_2 и треугольника PBC, M_3 и треугольника PAC, взяв вместо S точку A. Получим координаты центроидов M_1, M_2, M_3 :*

$$\boxed{M_1(\frac{4}{3};\frac{8\sqrt{3}}{9};\frac{4\sqrt{6}}{9}), \quad M_2(\frac{8}{3};\frac{8\sqrt{3}}{9};\frac{4\sqrt{6}}{9}), \quad M_3(2;\frac{2\sqrt{3}}{9};\frac{4\sqrt{6}}{9}).}$$

ЗАДАНИЕ ФИГУР УРАВНЕНИЯМИ И НЕРАВЕНСТВАМИ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ.

- **Для составления уравнения сферы достаточно знать или найти координаты ее центра и радиус.**

- **Для составления общего уравнения плоскости достаточно знать или найти координаты любой ее точки и координаты любого вектора, перпендикулярного к этой плоскости (вектор нормали к плоскости), при этом в качестве вектора нормали выбирается тот, координаты которого наиболее удобны при вычислениях, возникающих при составлении уравнения.**

Расстояние d от точки M_0 *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ *находится по формуле*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пользуясь этой формулой, можно находить расстояние между параллель – ными плоскостями, между параллельными прямой и плоскостью, между скрещивающимися прямыми.

Если плоскость происходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *параллельно данной плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$, *то ее уравнение можно записать в виде,* $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, *затем преобразовать.*

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;1)$ *и параллельной плоскости* : *а)*Oxy; ,*б)*Oyz; *в)*Oxz; *г)*$2x - y + 3z + 5 = 0$.

а)Уравнение координатной плоскости Oxy *имеет вид* : $z = 0$. *Вектором нормали к этой плоскости служит вектор* $\vec{k}(0;0;1)$. *Так как плоскость, проходящая через точку* $M(-1;2;1)$, *параллельна плоскости* Oxy, *то эта плоскость также перпендикулярна вектору* $\vec{k}(0;0;1)$, *который является оптимально удобным при выборе ее вектора нормали. Составляем уравнение этой плоскости* :

$$0(x+1) + 0(y-2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z - 1 = 0.}$$

Аналогично получаем уравнения $\boxed{:\ \text{б})\ x+1=0;\ \text{в})\ y-2=0.}$

г) Из уравнения плоскости $2x - y + 3z + 5 = 0$ *следует, что вектор* $\vec{n}(2;-1;3)$ *является ее вектором нормали. Его принимаем в качестве вектора нормали плоскости* β, *проведенной через точку* $M(-1;2;1)$ *параллельно данной плоскости. Составляем уравнение плоскости* β :

$$2(x+1) - 1(y-2) + 3(z-1) = 0,$$

$$\boxed{2x - y + 3z + 1 = 0.}$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;3;8)$ *и* $N(2;5;-1)$ *перпендикулярной плоскости* $2x - y + z = 0.$

Так как плоскость α *проходит через точки* $M(1;3;8)$, $N(2;5;-1)$ *и перпендикулярна плоскости* $2x - y + z = 0$, *для которой вектор* $\vec{p}(2;-1;1)$ *является вектором нормали, то в качестве вектора* $\vec{n}(a;b;c)$ *нормали плоскости* α *можно принять вектор, перпендикулярный векторам* $\overrightarrow{MN}(1;2;-9)$ *и* $\vec{p}(2;-1;1)$. *Имеем:*

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{MN},\ \vec{n} \perp \vec{p},\ \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0,\ \vec{n} \cdot \vec{p} = 0,$$

поэтому координаты a, b *и* c *вектора* $\vec{n}$ *получаем, рещая систему уравнений*

$$\begin{cases} a + 2b - 9c = 0, \\ 2a - b + c = 0. \end{cases}$$

Пусть $c = 1$, *тогда получаем систему уравнений*

$$\begin{cases} a + 2b = 9, \\ 2a - b = -1, \end{cases} \text{ решением которой является } b = \frac{19}{5},\ a = \frac{7}{5}.$$

Значит, вектор $\vec{n}$ *имеет координаты* $\vec{n}\left(\frac{7}{5}; \frac{19}{5}; 1\right)$.

Заменим этот вектор коолинеарным вектором $\vec{n}_1(7;9;15)$ *с целыми координатами и составим уравнение плоскости* α*:*

$$7(x-1) + 19(y-3) + 5(z-8) = 0,$$

$$\boxed{7x + 19y + 5z - 104 = 0.}$$

Угол между двумя плоскостями α *и* β, *заданными уравнениями соответственно* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, *взаимосвязан с углом между их векторами нормалей* $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$ *и* $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ *и находится с помощью формулы:*

$$\cos\angle(\alpha;\beta) = \left|\cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)\right| = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Сфера (поверхность шара) задается уравнением:

Задача:

Найти геометрическое место точек, удаленных от плоскости x+2y-2z-5=0 на расстояние, равное 2.

Пусть уравнением $x+2y-2z-5=0$ *задана плоскость* α, $M(a;b;c)$ – *любая точка искомого множества точек. Тогда имеем*:

$$\rho(M;\alpha)=2 \Leftrightarrow \frac{|a+2b-2c-5|}{3}=2, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-2c-5=6 \\ a+2b-2c-5=-6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-2c=11; \\ a+2b-2c=-1. \end{cases}$$

При $b=c=1$ *получаем* $a=-1$ *или* $a=11$. *Значит, искомому множеству точек принадлежат точки* $M_1(-1;1;1)$ *и* $M_2(11;1;1)$.

Так как множество всех точек пространства, равноудаленных от данной плоскости, представляет собой две плоскости, параллельные данной, то одна из них происходит через точку M_1 *и имеет уравнение*

$$(x+1)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+1=0,$$

а другая проходит через точку M_2; *ей соответствует уравнение*

$$(x-11)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{x+2y-2z-11=0.}$$

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ В КООРДИНАТАХ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ.

При решении задач на взаимное расположение двух прямых a и b в пространстве учащиеся должны научиться видеть направляющие векторы соответственно $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{p}_2(b_1; b_2; b_3)$ этих прямых из их параметрических уравнений и определять, параллельны ли они (используя признак : $a \| b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$), а также перпендикулярны ли эти прямые (используя признак : $a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$).

Если прямые не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Аналогично, зная направляющий вектора $\vec{p}(a; b; c)$ прямой l и вектор $\vec{n}(A; B; C)$ нормали плоскости α, можно определить, параллельны ли они (с помощью признака $l \| \alpha \Leftrightarrow a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$), а также перпендикулярны ли (с помощью признака $l \perp a \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$). Если данные прямая и плоскость не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы

$$\sin\angle(l; a) = \left|\cos\angle(\vec{p}; \vec{n})\right| = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Найти координаты точки, равноудаленной от всех вершин тетраэдра, *PABC*, заданных координатами: *A* (0;0;0), *B*(8;0;0), *C*(0;-2;0), *P*(0;0;-6).

Заметим, что расстояние от данной точки до вершин тетраэдра будет являться радиусом описанной около него окружности.

Множеством всех точек пространства, равноудаленных от точек A и B, является плоскость серединных перпендикуляров отрезка AB.

Поэтому искомой является точка пересечения плоскостей серединных перпендикуляров трех любых ребер тетраэдра, не лежащих в одной плоскости.

Пусть α, β, γ – *плоскости серединных перпендикуляров ребер соответственно* AB, BC, AP *тетраэдра* $ABCP$; K, H, M – *середины соответственно этих ребер.*

Находим : $\overrightarrow{AB}(8;0;0)$, $\overrightarrow{CB}(8;2;0)$ *и* $\overrightarrow{PA}(0;0;6)$ – *векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям* α, β *и* γ; $K(4;0;0)$, $H(4;-1;0)$, $M(0;0;-3)$.

Для составления уравнений плоскостей плоскостей α, β *и* γ *в качестве векторов нормалей стоит взять векторы*

$\vec{n}_1(1;0;0) \parallel \overrightarrow{AB}$, $\vec{n}_2(4;1;0) \parallel \overrightarrow{CB}$, $\vec{n}_3(0;0;1) \parallel \overrightarrow{PA}$.

Тогда уравнения плоскостей α, β *и* γ *соответственно таковы* :

$x-4=0$, $4x+y-15=0$, $z+3=0$.

Решением этой системы является тройка чисел : $x=4$, $y=-1$, $z=-3$.

Значит, равноудаленной от всех вершин тетраэдра $PABC$ *является точка* $\boxed{T(4;-1;3)}$.

Причем удалена эта точка от вершин на расстояние, равное $TA=\sqrt{16+1+9}=\boxed{\sqrt{26}}$.

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В СТЕРЕОМЕТРИИ

Стереометрические задачи, основанные на применении векторов, встречаются достаточно часто и в ЕГЭ по математике, и во вступительных экзаменах в различные вузы, на олимпиадах и конкурсах.

Задача: *На ребрах DA, DB и DC тетраэдра $ABCD$ взяты точки M, N и K так, что $DM = 1/3DA$, $DN = 1/4DB$, $DK = 3/5DC$. Пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком соотношении плоскость MNK делит отрезок DG?*

Пусть $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. *Плоскость* MNK *пересекает* DG *в точке* P, $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DG}$.

Выразим $\overrightarrow{DG}$ *через* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$. *Если* Q – *середина* BC, *то*

$\overrightarrow{AQ} = 1/2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. *Значит,* $\overrightarrow{AG} = 2/3\overrightarrow{AQ} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Находим $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = \vec{a} + 1/3((\vec{b} - \vec{a}) + \vec{c} - \vec{a})) = 1/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Значит, $\overrightarrow{DP} = \lambda/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. *Поскольку точка* P *принадлежит плоскости* MNK, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, *то* $\overrightarrow{MP}$ *можно разложить по векторам* $\overrightarrow{MN}$ *и* $\overrightarrow{MK}$,

$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MK}$. *Следовательно,*

$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} = 1/3\vec{a} + x(\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM}) + y(\overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DM}) = 1/3\vec{a} + x(1/4\vec{b} - 1/3\vec{a}) +$

$y(3/5\vec{c} - 1/3\vec{a}) = 1/3(1 - x - y)\vec{a} + 1/4x\vec{b} + 3/5y\vec{c}$.

Приравняем друг к другу два полученных представления $\overrightarrow{DP}$:

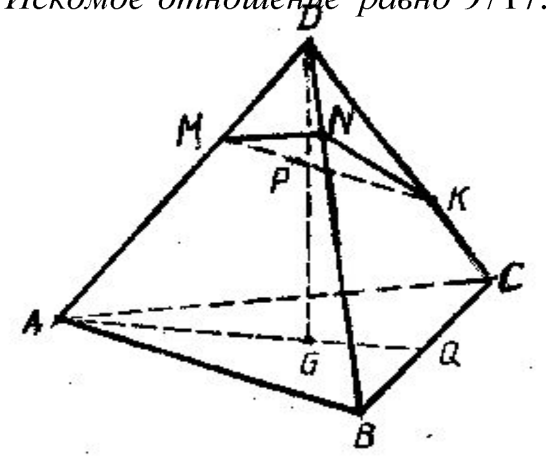
$\lambda/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 1/3(1 - x - y)\vec{a} + 1/4x\vec{b} + 3/5y\vec{c}$.

Ввиду единственности разложения любого вектора по трем некомпланарным векторам будем иметь систему

$$\lambda = (1 - x - y),\ \frac{\lambda}{3} = \frac{x}{4},\ \frac{\lambda}{3} = \frac{3}{5}y,$$

откуда $y = 9/26$.

Искомое отношение равно $9/17$.



КОНУСЫ

Заметим, что оси симметрии двух касающихся конусов и образующая, по которой они касаются, лежат в одной плоскости (это следствие того, что плоскость, задаваемая двумя осями OA и OB, является плоскостью симметрии для каждого их двух конусов).

Три прямых круговых конуса с углом ^{a} при вершине осевого сечения имеют общую вершину и попарно касаются друг друга. Найдите углы между образующими, по которым касаются эти конусы.

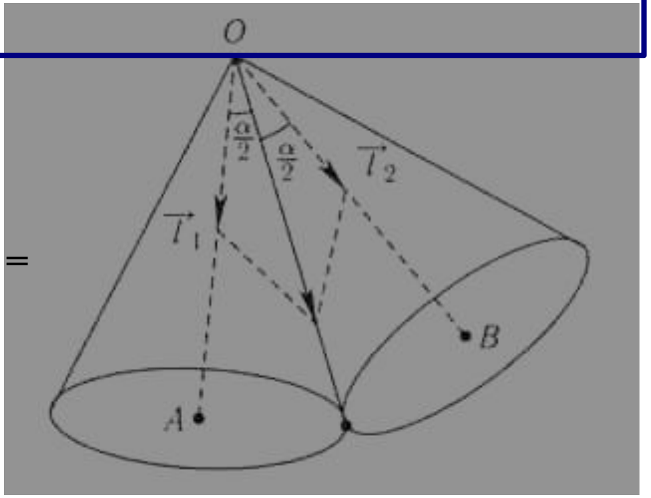
Введем теперь в качестве базисных три вектора $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$, *принадлежащие осям симметрии конусов и такие, что* $|\vec{l_1}| = |\vec{l_2}| = |\vec{l_3}| = 1$. *Таблица умножения векторов базиса в данном случае будет иметь вид:*

	$\vec{l_1}$	$\vec{l_2}$	$\vec{l_3}$
$\vec{l_1}$	1	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\vec{l_2}$	$\cos\alpha$	1	$\cos\alpha$
$\vec{l_3}$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	1

Векторы $\vec{a} = \vec{l_1} + \vec{l_2}$, $\vec{b} = \vec{l_2} + \vec{l_3}$, $\vec{c} = \vec{l_1} + \vec{l_3}$, *как легко видеть, принадлежат образующим, по которым касаются конусы. Тогда косинус искомого угла* φ *может быть вычислен следующим образом:*

$$\cos\varphi = \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(\vec{l_1}+\vec{l_2})(\vec{l_2}+\vec{l_3})}{\sqrt{((\vec{l_1}+\vec{l_2})^2}\sqrt{(\vec{l_3}+\vec{l_2})^2}} =$$

$$= \frac{3\cos\alpha + 1}{\sqrt{2+2\cos\alpha}\sqrt{2+2\cos\alpha}} = \frac{3\cos\alpha+1}{2\cos\alpha+2} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{3\cos\alpha+1}{2\cos\alpha+2}.$$



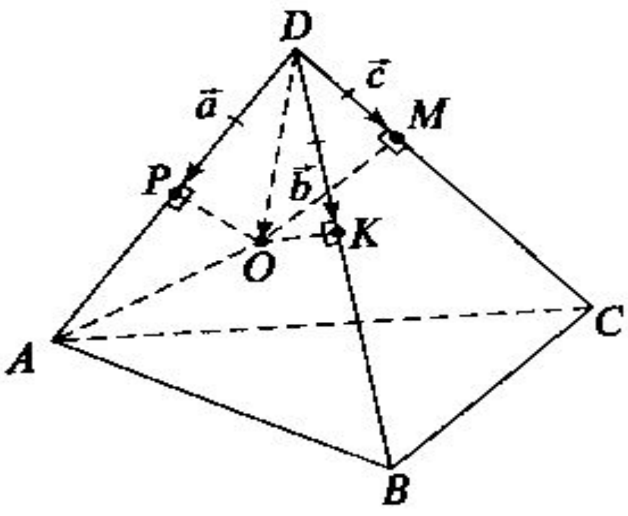
Ответ: $\varphi = \arccos\dfrac{3\cos\alpha+1}{2\cos\alpha+2}.$

ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ.
СФЕРА И ТРЕХГРАННЫЙ УГОЛ (СФЕРА, КАСАЮЩАЯСЯ РЕБЕР ТЕТРАЭДРА ИЛИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ).

В треугольной пирамиде DABC известны углы при вершине D:
$\angle ADB = \angle ADC = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BDC = \dfrac{\pi}{3}$. *Длина ребра DA равна* $2/3$.
Сфера с центром O касается ребер DA, DB и DC пирамиды.
Расстояние от вершины A пирамиды до центра O сферы равно $2/3$. *Найти радиус сферы.*

Пусть сфера касается ребер DA, DB, DC пирамиды в точках P, K, M соответственно. Тогда $DP = DK = DM$ *(как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки – вершины D пирамиды). Пусть* $DP = l$ $(l > 0)$. *Выберем в качестве базисные векторы* $\overrightarrow{DP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DK} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{c}$ *и составим таблицу умножения векторов базиса:*

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	l^2	0	0
$\vec{b}$	0	l^2	$l^2/2$
$\vec{c}$	0	$l^2/2$	l^2



[Продолжение решения]

2. Пусть $\overrightarrow{DO} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Заметим, что $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - \overrightarrow{DO}$,

$\overrightarrow{OK} = \vec{b} - \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{c} - \overrightarrow{DO}$. Так как $\overrightarrow{OP} \perp \vec{a}$, получаем

$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} = 0$, $\overrightarrow{OK} \cdot \vec{b} = 0$, $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{c} = 0$. Таким образом, имеем систему :

$$\begin{cases} (\vec{a} - \overrightarrow{DO})\vec{a} = 0, \\ (\vec{в} - \overrightarrow{DO})\vec{b} = 0, \\ (\vec{c} - \overrightarrow{DO})\vec{c} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{a}^{\,2}, \\ \vec{b} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{b}^{\,2}, \\ \vec{c} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{c}^{\,2}. \end{cases}$$

Используя таблицу умножения базисных векторов и сокращая на

l^2, получим систему :

$$\begin{cases} y + 1/2z = 1, \\ 1/2y + z = 1, \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2/3, \\ z = 2/3. \end{cases}$$

Слледовате ьно, $\overrightarrow{DO} = 1/3(3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})$. Далее, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DO}$,

но $\overrightarrow{DA} = \dfrac{2\vec{a}}{3l}$, поэтому $\overrightarrow{OA} = \dfrac{2\vec{a}}{3l} - 1/3(3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}) = 1/3\left[(2/l - 3)\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}\right]$

Значит, $\overrightarrow{OA}^2 = \dfrac{l^2}{9}\left[(2/l - 3)^2 + 4 + 4 + 4\right]$, по условию $\overrightarrow{OA}^2 = \dfrac{4}{9}$.

Поэтому $l^2(\dfrac{4}{l^2} - \dfrac{12}{l} + 21) = 4 \Rightarrow 21\,l^2 - 12l = 0 \Rightarrow l = \dfrac{4}{7}$.

Тогда из теоремы Пифагора следует, что :

$$OP = \sqrt{OA^2 - AP^2} = \sqrt{4/9 - (DA \;\; - DP \;\;)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - (\frac{2}{3} - \frac{4}{7})^2} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{22}{7}}.}$$

ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ. СФЕРА, ОПИСАННАЯ ВОКРУГ ТЕТРАЭДРА ИЛИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ.

В треугольной пирамиде ребра DA, DB, DC, BC равны между собой и равны 2, $AC=\sqrt{6}$, $AB=2\sqrt{2}$. Найти радиус сферы, описанной вокруг этой пирамиды.

Найдем сначала плоские углы(их косинусы) при вершине D.

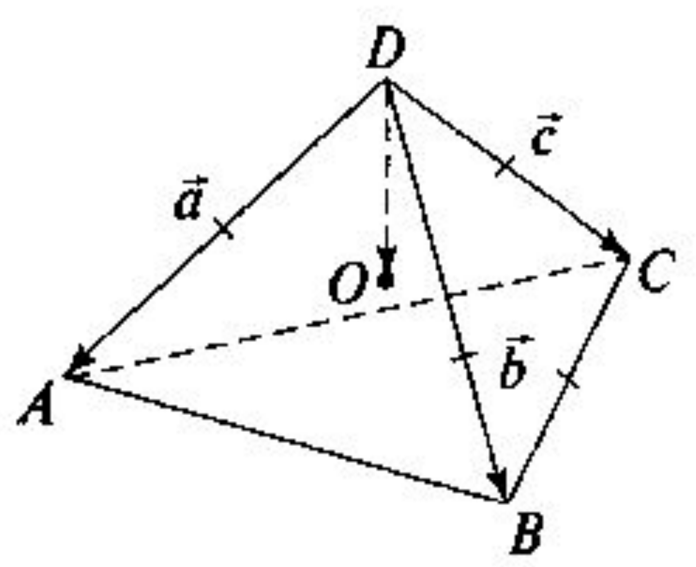
Так как $DB=DC=BC$, *то* $\angle BDC=\dfrac{\pi}{3}$. *Так как* $DA^2+DB^2=$

$4+4=8=AB^2$, *то* $\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$ *(по теореме, обратной теореме Пифагора). По следствию из теоремы косинусов для треугольника ABC имеем*

$$\cos\angle ADC=\frac{DA^2+DC^2-AC^2}{2DA\cdot DC}=\frac{4+4-6}{2\cdot 2\cdot 2}=1/4.$$

Выберем в качестве базисных векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}, \overrightarrow{DB}=\vec{b}, \overrightarrow{DC}=\vec{c}$ *и составим таблицу умножения векторов базиса:*

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	0	1
$\vec{b}$	0	4	2
$\vec{c}$	1	2	4



Продолжение решения

Пусть точка O *– центр описанной около тетраэдра* $DABC$ *сферы,* R *– ее радиус, и пусть* $\overrightarrow{DO} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Система в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{a}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2 \\ \vec{b}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2 \\ \vec{c}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 4x + z = 2, \\ 4y + 2z = 2, \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z, \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z, \\ 1 - z + 1/2 - 1/4z + 4z = 2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z, \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z, \\ z = \frac{2}{11}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{11}, \\ y = \frac{9}{22}, \\ z = \frac{2}{11}. \end{cases}$$

Следовательно, $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{22}(10\vec{a} + 9\vec{b} + 4\vec{c})$ *и*

$$R = \left|\overrightarrow{DO}\right| = \sqrt{\overrightarrow{DO}^2} = \frac{1}{22}\sqrt{(10\vec{a} + 9\vec{b} + 4\vec{c})^2} = \frac{1}{22}\sqrt{1012} = \boxed{\frac{\sqrt{253}}{11}}.$$

ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ. СФЕРА И КУБ.

Задача:

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *с ребром* 1. *Найти радиус сферы, проходящей через вершину* A, *середины ребер* DC *и* BB_1 *и центр грани* $A_1B_1C_1D_1$.

Введем систему координат с началом в вершине A, *выбрав оси так, чтобы вершины* B, D *и* A_1 *имели соответственно координаты* $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ *и* $(0;0;1)$.
Координаты середин ребер DC *и* BB_1 *соответственно* $(0{,}5;1;0)$, $(1;0;0{,}5)$, *центра грани* $A_1B_1C_1D_1$ – $(0{,}5;0{,}5;1)$.
Уравнение сферы с центром $(x_0; y_0; z_0)$ *и радиусом* r *имеет вид* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$.
Поскольку сфера содержит начало координат, то $d=0$. *Для* a, b *и* c *легко получить систему уравнений*

$$\begin{cases} 5/4+1/2a+b=0, \\ 5/4+a+1/2c=0, \\ 3/2+1/2a+1/2b+c=0. \end{cases}$$

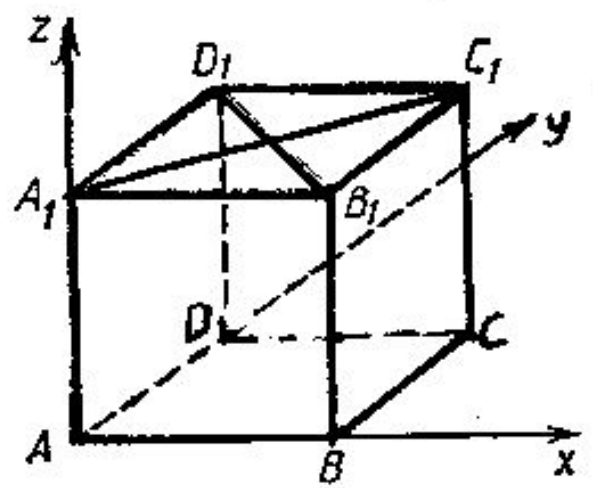
$$\Rightarrow a=-\frac{13}{14},\ b=-\frac{11}{14},\ c=-\frac{9}{14}.$$

Таким образом, уравнение сферы имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2-13/14x-11/14y-9/14z=0,$$

$$(x-13/28)^2+(y-11/28)^2+(z-9/28)^2=371/28^2.$$

Искомый радиус равен $\boxed{\sqrt{371}/28}$.



ВЫВОДЫ

- **Координатный и векторный методы удобно применять в решении задач, в которых трудно построить расстояние от точки до прямой или от точки до плоскости, и в задачах с многогранниками, к которым естественно привязать прямоугольную систему координат (куб, параллелепипед, пирамида).**

- **Использование данных методов позволяет найти нужную величину с наименьшими затратами времени и найти оригинальное решение для сложных задач (например, в которых вокруг многогранника или трехгранного угла описана сфера или шар).**

Спасибо за внимание!

[Использованная литература]