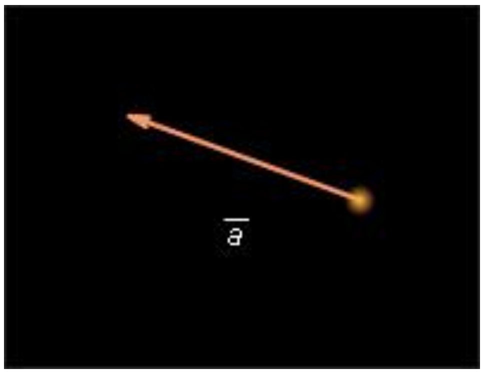
Векторы и действия над ними

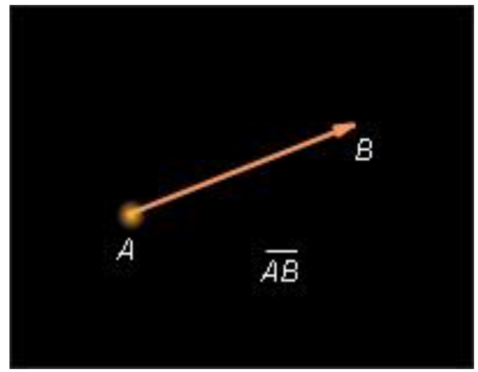
Подготовила: Габдуллина Алина

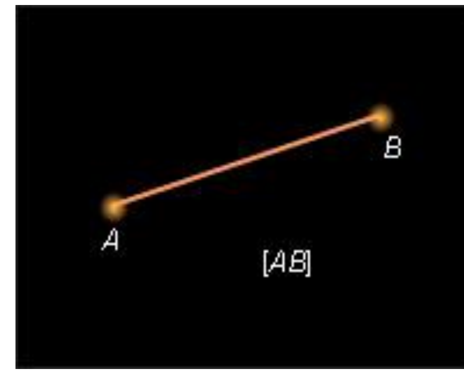
1А-Эк

Вектором называется направленный отрезок

(термин фр. математика Коши)



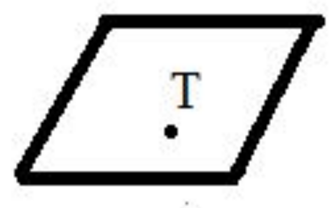




Один из концов отрезка, например, А называется началом , а другой, то есть В , – концом .
Вектор обозначается двумя заглавными латинскими буквами, либо одной строчной. Над обозначением пишется черта или стрелка – знак вектора.

Длиной (***модулем***) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка *AB*. Она обозначается как $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор наз. нулевым, если его начало и конец совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

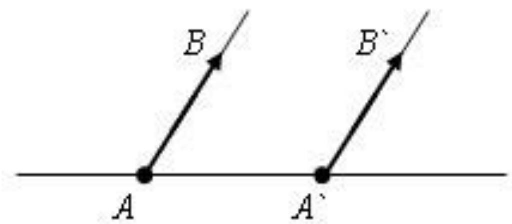


- **Определение.** Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
- Поскольку нулевой вектор может иметь произвольное направление, то разумно считать его коллинеарным любому ненулевому вектору.
- **Определение.** Если два ненулевых

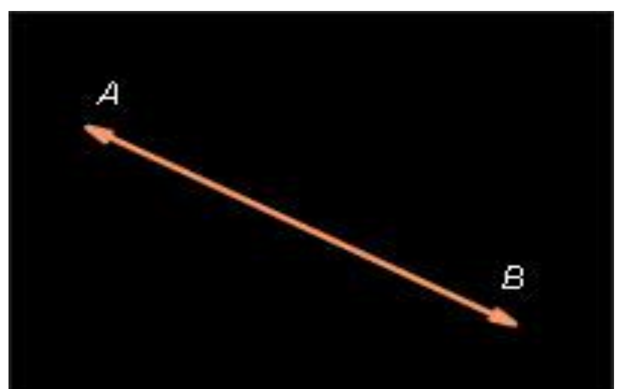
  вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, а лучи *AB* и *CD* сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***сонаправленными***. Этот факт обозначается так: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

  Если же эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***противонаправленными***. Этот факт обозначается так: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

- <u>**Определение.**</u> Два вектора называются ***равными***, если они сонаправлены и их длины равны.

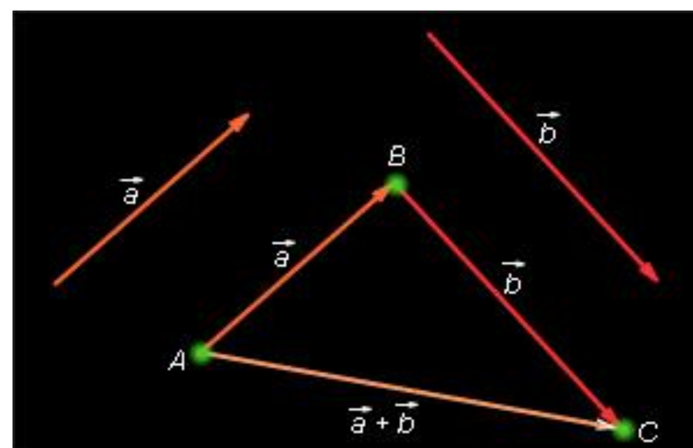


- отсюда следует <u>**Теорема**</u>**:** От любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.
- <u>**Определение.**</u> Два вектора называются ***противоположными***, если их длины равны, и они противоположно направлены



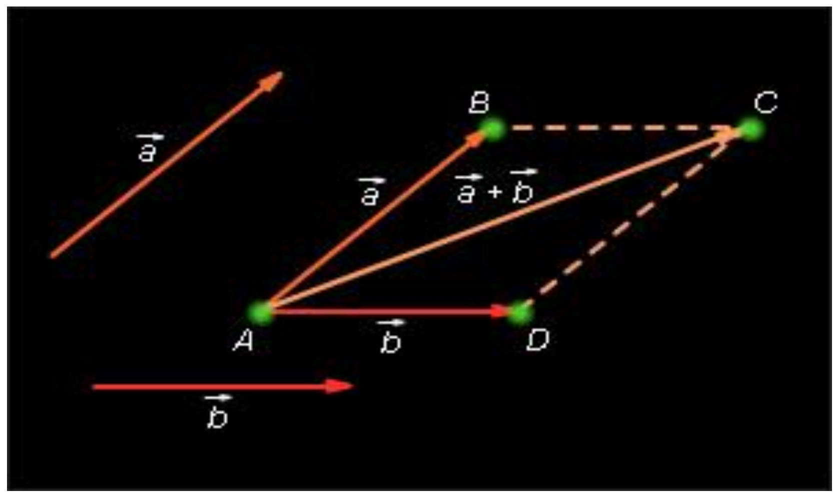
Операции над векторами

- ***Суммой*** двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, который обозначается $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
- Отложим от произвольной точки *A* вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Теперь от точки *B* отложим вектор равный $\overrightarrow{BC}$, Вектор $\vec{b}$. и называется суммой векторов и $\vec{a}$. $\vec{b}$. $\vec{c} = \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Это правило сложения векторов называется ***правилом треугольника***.



- Для сложения двух неколлинеарных векторов можно воспользоваться ***правилом параллелограмма***

При сложении вектора $\overrightarrow{AB}$ и вектора $\overrightarrow{BD}$, результирующим будет вектор $\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

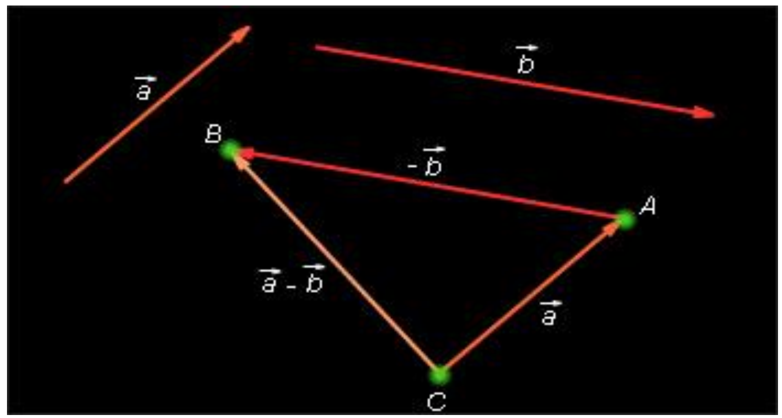
<u>Определение</u>. Разностью

векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма

которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Обозначается разность векторов так: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

где $(-\vec{b})$ – вектор, противоположный вектору $\vec{b}$.



- **<u>Теорема.</u>** Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.
- Доказательство этого утверждения следует из закона сложения векторов.

- **Определение. Произведением ненулевого вектора** $\vec{a}$ **на число *k*** называется вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем при $k > 0$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), а при $k < 0$ – противонаправлены ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).
- Из этого определения следует, что векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны. Кроме того, произведение любого вектора на число 0 есть нулевой вектор.

Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
- $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- $(kl)\vec{a} = k\left(l\vec{a}\right)$
- $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

- <u>**Теорема.**</u> ***Признак коллинеарности векторов.*** Для коллинеарности вектора $\vec{b}$ ненулевому вектору $\vec{a}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

  Эта теорема доказывается аналогично, как в планиметрии.

- **Следствие 1.** Для того, чтобы точка *C* лежала на прямой *AB*, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

- **Следствие 2.** Для параллельности прямых *AM* и *BN* необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что $\overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{AM}$

<u>Определение</u>. Векторное пространство – это множество, элементы которого называются векторами, в котором определены две операции, а именно: сложение векторов и умножение вектора на число, удовлетворяющие приведенным выше свойствам, рассматриваемые как аксиомы.

$$\vec{a},\ \vec{b} \in V$$

$$\vec{a} + \vec{b} \in V$$

$$k\vec{a} \in V$$

Вектор $\overline{a_n}$ называется **линейной комбинацией** остальных векторов, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа.

$$\overrightarrow{a_n} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \vec{a}_{n-1}$$

Вектор $\overline{a_n}$ называется **линейно-зависимым**, если существуют такие числа λ, не равные 0 одновременно, что линейная комбинация векторов равна $\vec{0}$.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \neq 0$$

Свойства линейной зависимости

- Если среди векторов есть нулевой вектор $\vec{0}$,то эти векторы линейно-зависимы.
- Если часть векторов является линейно-зависимыми, то и все эти векторы линейно-зависимы
- Векторы линейно-зависимы тогда и только тогда, когда один из них линейно выражен через остальных

Два вектора линейно-зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны:

- 1. На плоскости существуют линейно-независимые векторы
- 2. На плоскости любые три вектора – линейно-зависимые

Компланарные векторы – это векторы, находящиеся в одной или параллельных плоскостях.

Три вектора линейно-зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны:

- 1. В пространстве существуют 3 линейно-независимых вектора и они некомпланарны.
- 2. В пространстве любые 4 вектора линейно-зависимые.

Векторное n –мерное пространство - совокупность системы из векторов . Сохраняющее свойство векторов , выходящих из начала координат.

Это векторы
$a=(a_1, a_2 ...,a_n)$ - n

Числа a $_j$ называются координатами вектора. Два вектора называются равными если равны их координаты на одинаковых местах.

- Базисом n –мерного пространства является совокупность n-линейно-независимых векторов.

$$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots\ , \overrightarrow{e_n}$$

- Каждый вектор $\vec{X}$ из векторного пространства можно представить единственным способом в виде линейной комбинации векторов базиса.
- Разложение по базису:

$$\vec{x}\ \in V^n$$

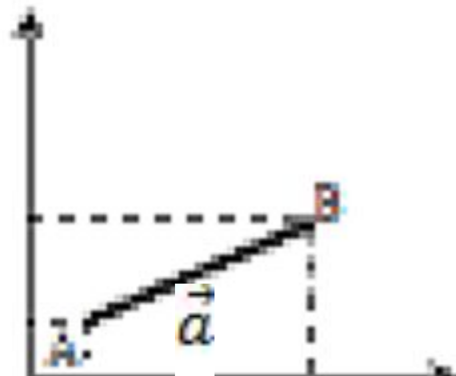
$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

- Коэффициент данного разложения - координаты $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Базис – это система отсчета, относительно которой рассматривается вектор.

Координатами вектора называются проекции вектора на координатные оси.



$$pr_x\vec{a} = x_b - x_a$$
$$pr_y\vec{a} = y_b - y_a$$

Координаты вектора:

$$\vec{a}\,(x_b - x_a, y_b - y_a)$$

Размер пространства определяется по количеству координат

Правила действий над векторами, заданными координатами

- $\vec{a}, \vec{b} \in V$
- $\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + \dots + a_n\overrightarrow{e_n}$
- $\vec{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + \dots + b_n\overrightarrow{e_n}$
- $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_n)$
- $\vec{b}\,(b_1;\ b_2;\ \dots;\ b_n)$
- $\vec{a} \pm \vec{b}\,(a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ \dots;\ a_n \pm b_n)$
- $\lambda \cdot \vec{a}\,(\lambda a_1; \lambda a_2;\ \dots;\ \lambda a_n)$

Скалярное произведение векторов

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ - есть число, которое определяется произведением длин на $\cos\alpha$

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Скалярное произведение в результате дает число и обозначается как $(\vec{a}, \vec{b})$

- $\vec{a} \cdot \overrightarrow{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \lambda \in R$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0, \quad \vec{a} \neq \vec{0}$
  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{a} = \vec{0}$

Евклидово пространство – векторное пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее свойствам скалярного произведения, рассматриваемым как аксиомы. Обозначается как **E.**

Нормой вектора называется его длина.

- $|\vec{a}| = 0 \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
- $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}| \cdot |\vec{\mathbf{b}}|}}$$

Орт – единичный вектор

Нормировать вектор – значит, определить вектор того же направления, но единичной длины

Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $[\bar{a}\bar{b}]$ и определяемый следующими тремя условиями:

- 1). Модуль вектора $[\bar{a}\bar{b}]$ равен $|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- 2). Вектор $[\bar{a}\bar{b}]$ перпендикулярен к каждому из вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$;
- 3). Направление вектора $[\bar{a}\bar{b}]$ соответствует «правилу правой руки». Это означает, что если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $[\bar{a}\bar{b}]$ приведены к общему началу, то вектор $[\bar{a}\bar{b}]$ должен быть направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому сомножителю (то есть по вектору $\bar{a}$), а указательный - по второму (то есть по вектору $\bar{b}$).
- Векторное произведение зависит от порядка сомножителей, именно:

$$[\bar{a}\bar{b}] = -[\bar{b}\bar{a}]$$

- Модуль векторного произведения $[\bar{a}\bar{b}]$ равен площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|[\bar{a}\bar{b}]| = S$$

- Само векторное произведение может быть выражено формулой

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = S\bar{e}$$

где $\bar{e}$ - орт векторного произведения.

- Векторное произведение $\left[\bar{a}\bar{b}\right]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. В частности, $\left[\bar{a}\bar{a}\right] = 0$.
- Если система координатных осей правая и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в этой системе своими координатами:

$$\bar{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$$

- то векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ определяется формулой

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}$$

- или

$$\left[\bar{a}\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

- Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число

$$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} .$$

- Модуль смешанного произведения трех векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

- Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая тройка векторов.

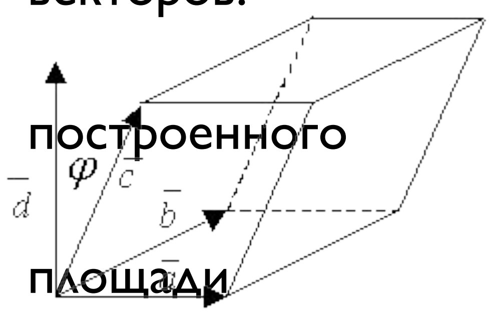


Рис. 9

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен площади $\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right|$ основания на высоту $|\bar{c}|\cos\varphi$. Здесь φ - угол между векторами $\bar{d} = [\bar{a}, \bar{b}]$ и $\bar{c}$

- Знак смешанного произведения совпадает со знаком cos φ, и поэтому смешанное произведение положительно, когда тройка векторов правая, и отрицательно, если тройка векторов левая.
- Если перемножаемые векторы лежат в одной плоскости (cos φ = 0), то $([\bar{a},\bar{b}]\cdot\bar{c})=0$ - необходимое и достаточное условие компланарности векторов.
- Пусть векторы заданы своими разложениями по ортам в декартовой системе координат

$$\bar{a}=x_a\bar{i}+y_a\bar{j}+z_a\bar{k};\quad \bar{b}=x_b\bar{i}+y_b\bar{j}+z_b\bar{k};\quad \bar{c}=x_c\bar{i}+y_c\bar{j}+z_c\bar{k}.$$

- Известно, что

$$\bar{a}\times\bar{b}=(y_az_b-z_ay_b)\bar{i}-(x_az_b-z_ax_b)\bar{j}+(x_ay_b-y_ax_b)\bar{k}.$$

- Скалярно умножим этот вектор на вектор $\bar{c}$ и, учитывая свойства скалярного произведения, получим

$$\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}=(y_az_b-z_ay_b)x_c-(x_az_b-z_ax_b)y_c+(x_ay_b-y_ax_b)z_c.$$

- Это выражение может быть получено при вычислении определителя

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

- по элементам третьей строки, исходя из правила вычисления определителя.

$$\bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

- Поэтому смешанное произведение трех векторов обозначают как $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, не подчеркивая при этом, какая пара векторов умножается векторно.

Изучение действий над векторами закончено. Спасибо за внимание!