DEUTSCH
KASACHISCHE
UNIVERSITÄT

Векторы и операции над ними

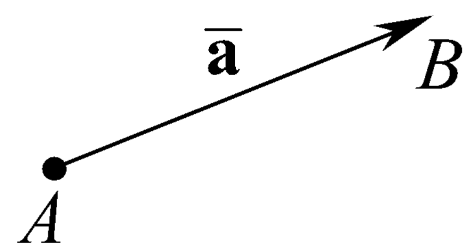
Выполнила: студентка 1 курса «Б»
Гавриленко Елена

Определение

Вектором называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).

Обозначают: $\overline{\mathbf{AB}}$ (где A – начало вектора, а B – его конец), $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (или *модулем*) вектора.

Обозначают: $|\overline{AB}|$ или $|\bar{a}|$

- Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*.
- Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Обозначают: $|\bar{0}|$
- Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются *коллинеарными* (*параллельными*).

Записывают: $\bar{a} \parallel \bar{b}$ - если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные,

$\bar{a} \nparallel \bar{b}$ - если векторы неколлинеарные.

Векторы, лежащие на перпендикулярных прямых называются перпендикулярными (ортогональными)

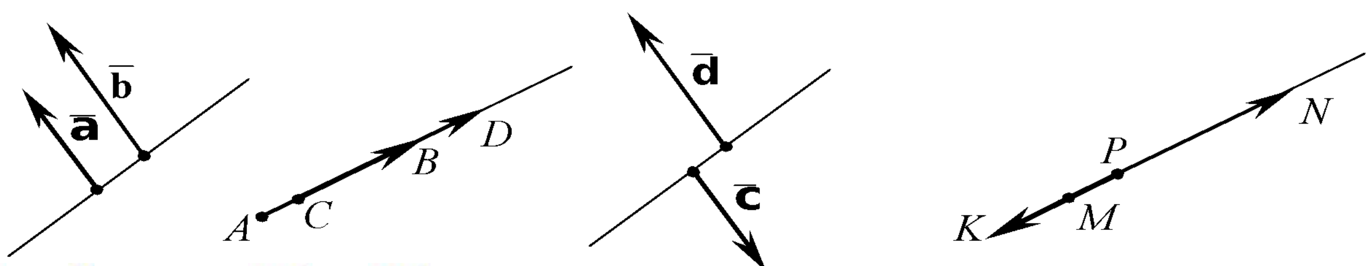
Векторы, лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях) называются компланарными.

Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ - коллинеарные и их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых) или один из лучей, AB или CD, целиком содержит в себе другой (для векторов лежащих на одной прямой), то векторы называются *сонаправленными.* В противном случае коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*.

Записывают:

$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ - если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправленные,

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ - если векторы противоположно направленные.



$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{BC}$ $\bar{c} \uparrow\downarrow \bar{d}$ $\overline{MN} \uparrow\downarrow \overline{PK}$

Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся операции сложения, вычитания и умножения вектора на число.

Сложение векторов

Суммой векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ называется вектор $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ с началом в точке А и концом в точке С (правило треугольника) (рис.1).

Вычитание векторов

$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$

Умножение вектора на число

Произведением вектора $\bar{a}$ и действительного числа *a* называется вектор *a* $\bar{a}$, модуль которого равен $|a|$ $|\bar{a}|$, направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, при *a*>0, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$ при *a*<0. При a=0, а $\bar{a} = |\bar{0}|$ (рис. 2)

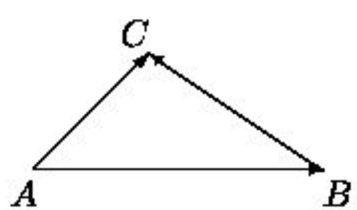


Рис. 1

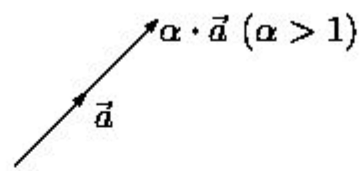


Рис. 2

Свойства линейных операций над векторами

- 1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$,
- 2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$,
- 3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$,
- 4. $\bar{a} + (-\bar{a}) = 0$,
- 5. $\lambda 1(\lambda 2 \bullet \bar{a}) = \lambda \bullet \lambda 2 \bullet \bar{a}$,
- 6. $(\lambda 1 + \lambda 2) \bullet \bar{a} = \lambda 1 \bar{a} + \lambda 2 \bar{a}$,
- 7. $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$,
- 8. $1 \bullet \bar{a} = \bar{a}$

В линейной алгебре множество элементов произвольной природы, на котором определены операции сложения и умножения на число, а также справедливы утверждения (1-8), называют ***линейным пространством***, а сами элементы - векторами (в широком смысле) этого пространства. Таким образом, введенные векторы, как направленные отрезки, образуют линейное пространство.

Линейной комбинацией векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r$ называют вектор

$$\overline{y} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_r \overline{x}_r = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \overline{x}_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in R(C)$ - коэффициенты линейной комбинации. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0,$ - комбинация называется тривиальной, если $\exists \alpha_i \neq 0,$ - нетривиальной.

Для того чтобы векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r$ ($r > 1$) были *линейно зависимы*, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

Свойства линейной зависимости

- Свойство 1. Если среди векторов есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
- Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
- Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.
- Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.
- Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.
- Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Размерность линейного пространства

Линейное пространство *V* называется *n*-мерным (имеет размерность *n*), если в нем:

- 1) существует *n* линейно независимых векторов;
- 2) любая система *n + 1* векторов линейно зависима.
- Обозначения : $n = \dim V$; V_n .

Базис пространства V_n Координаты вектора

Базис - любая упорядоченная система $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ из *n* линейно независимых векторов пространства V_n

Обозначение: $(\bar{e}) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$.

Для каждого вектора существуют числа такие что:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\bar{e}_k =$$

$$= (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{e})(\bar{x}).$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора $\bar{x}$ в базисе ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$) (определяются однозначно), $X = (x)$ - координатный столбец вектора $\bar{x}$ в этом базисе. Употребляется запись: $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Любой вектор линейного пространства можно представить и при том единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.

Ортонормированным (декартовым) базисом называется базис из попарно **ортогональных** (попарно перпендикулярных) векторов, **длина** каждого их которых равна **единице**.

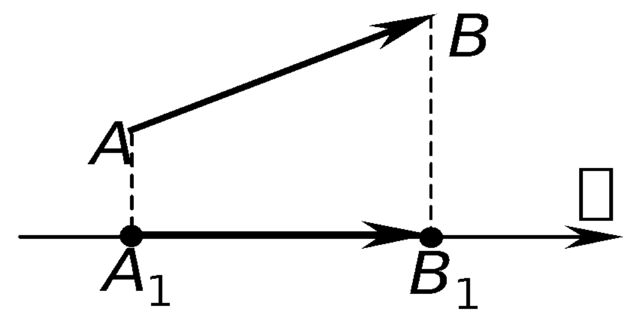
- Базисные векторы декартова базиса называют **ортами** и **в трёхмерном пространстве обозначают** $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$.
- Орты с общим началом в точке ***0*** образуют **декартову систему координат**.
- Если **базис не ортонормирован**, то система координат называется **аффинной**.

Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами этого вектора в данном базисе.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ координат свободных векторов в декартовом прямоугольном базисе:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямую, на которой выбрано направление, называют осью*.

Пусть □ – ось, $\overline{\mathbf{AB}}$ – некоторый вектор, A_1 и B_1 – ортогональные проекции на ось □ точек A и B соответственно.

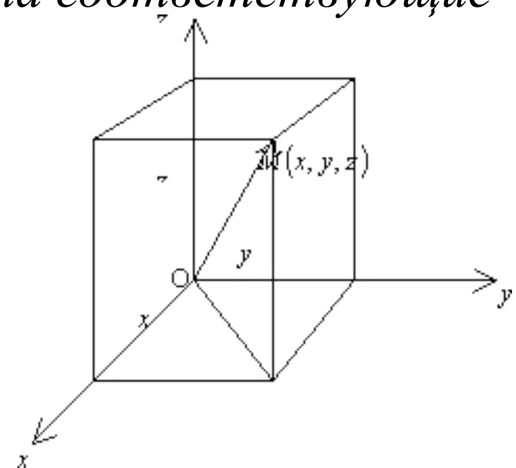


Вектор $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ назовем *векторной проекцией вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* □.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией (ортогональной проекцией) вектора* $\overline{\mathbf{AB}}$ *на ось* □ *называется длина его векторной проекции* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *на эту ось, взятая со знаком плюс, если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* □ *сонаправлены, и со знаком минус – если вектор* $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$ *и ось* □ *противоположно направлены.*

Обозначают: $\text{Пр}^{\perp}_{□}\overline{\mathbf{AB}}$, $\text{Пр}_{□}\overline{\mathbf{AB}}$.

Координаты вектора $\bar{\mathbf{a}} \in V^{(2)}$ $(V^{(3)})$ *в декартовом прямоугольном базисе* **i, j** (**i, j, k**) *есть проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.*



Нелинейные операции над векторами

- 1. Скалярное произведение векторов
- 2. Векторное произведение векторов
- 3. Смешанное произведение векторов

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$$

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$, *то скалярное произведение векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *полагают равным нулю.*

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ справедливы равенства:

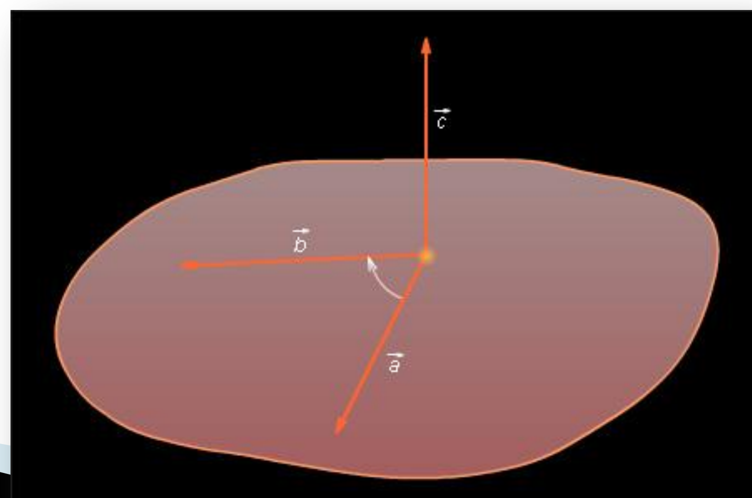
- $\vec{a}^2 = \left(\vec{a}, \vec{a}\right) \geq 0$, причем $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.
- $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ (переместительный закон).
- $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right)$ (распределительный закон).
- $\lambda\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}, \vec{b}\right)$ (сочетательный закон).

Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, ,который обладает следующими свойствами:

- Его длина равна $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$.
- Вектор $\vec{c}$, перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$
- Вектор $\vec{c}$, направлен так, что поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{c}$,(в этом случае, говорят, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,– правая).

Векторное произведение обозначается квадратными скобками: $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов

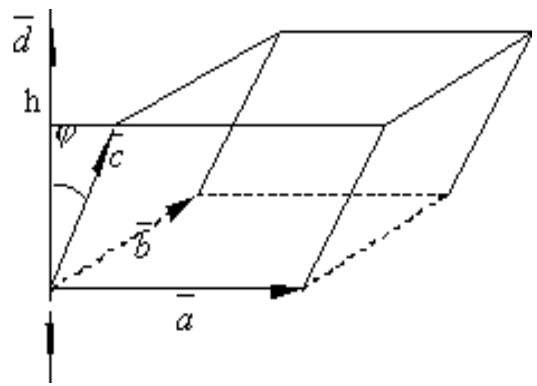
- векторное произведение произвольного вектора на нулевой вектор равно нулевому вектору;
- векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулевому вектору;
- координаты векторного произведения $\vec{c}$ векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ следующие: $\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.
- $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = -\left[\vec{b} \times \vec{a}\right]$.

Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением трех векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\bar{a}$ *на векторное произведение векторов* $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$, *т.е.* $(\bar{a},[\bar{b},\bar{c}])$.

Свойства смешанного произведения векторов

- *Геометрический смысл* смешанного произведения. Смешанное произведение 3-х векторов с точностью до знака равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах, т.е. $(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = \pm V_{пар}$. Смешанное произведение также равно 1/6 объема образованной векторами треугольной пирамиды. Таким образом $V_{пир} = \frac{1}{6}\left|(\overline{a}\overline{b}\overline{c})\right|$ и $V = \left|(\overline{a}\overline{b}\overline{c})\right|$.



- Для любых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ справедливо равенство:

$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

- При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак.
- Смешанное произведение $(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю или векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарны.
- Т.о., необходимым и достаточным условием компланарности 3-х векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Кроме того, отсюда следует, что три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис в пространстве, если $(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) \neq 0$.
- Если векторы заданы в координатной форме

$$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},\ \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k},\ \bar{c} = x_3\bar{i} + y_3\bar{j} + z_3\bar{k}$$

- то можно показать, что их смешанное произведение находится по формуле:

$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

- Т. о., смешанное произведение равно определителю третьего порядка, у которого в первой строке стоят координаты первого вектора, во второй строке – координаты второго вектора и в третьей строке – третьего вектора.