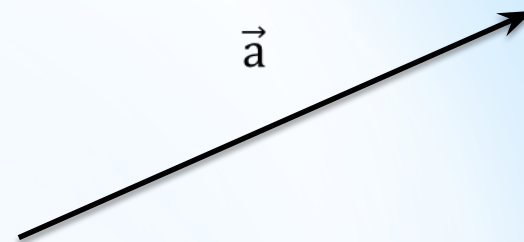


* Векторы в пространстве

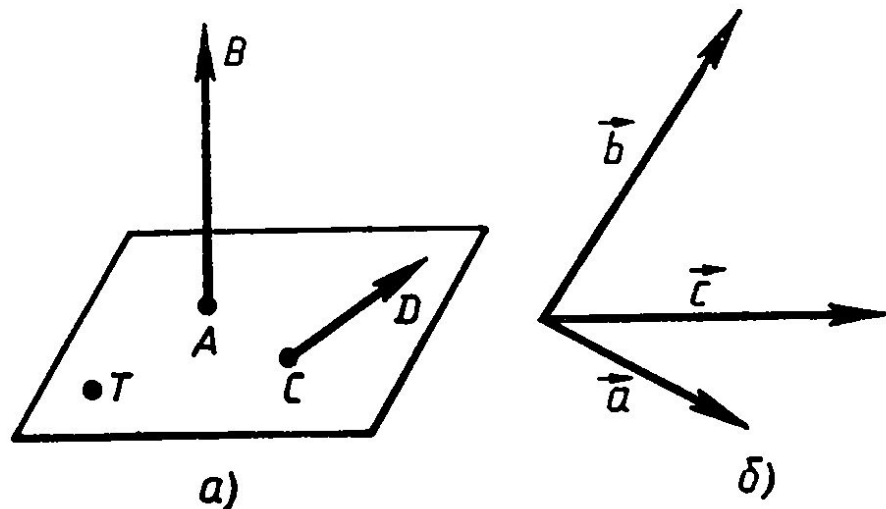
* Содержание темы

1. Понятие вектора. Равенство векторов
2. Сложение и вычитание векторов.
3. Сложение нескольких векторов
4. Умножение вектора на число
5. Компланарные вектора. Правило параллелепипеда
6. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам
7. Решение задач

Опред: Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется **вектором**.



точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**.



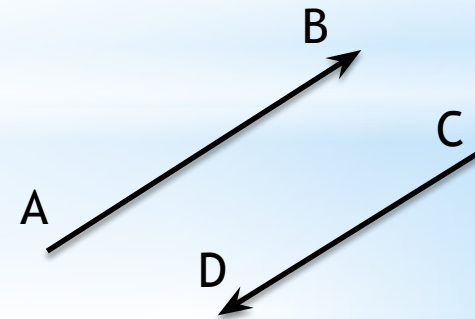
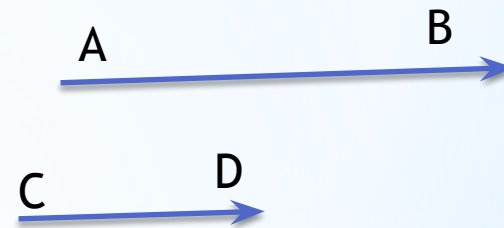
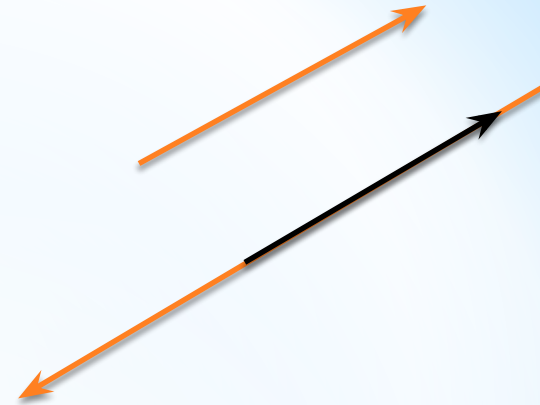
Длиной ненулевого вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка АВ.

Длина вектора \overrightarrow{AB} (вектора a) обозначается так $|AB|$ ($|a|$).

Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|0|=0$.



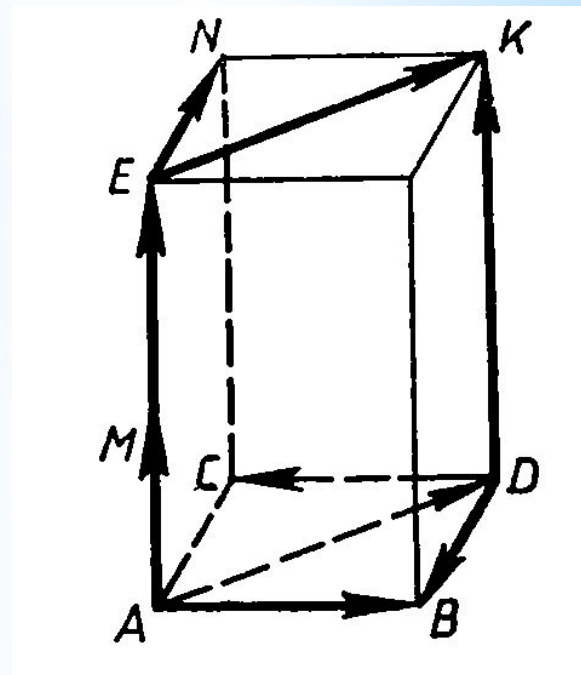
Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



Если два ненулевых вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы AB и CD называются сонаправленными, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы AB и CD называются противоположно направленными.

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

На рисунке $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$,
так как $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$,
а $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.



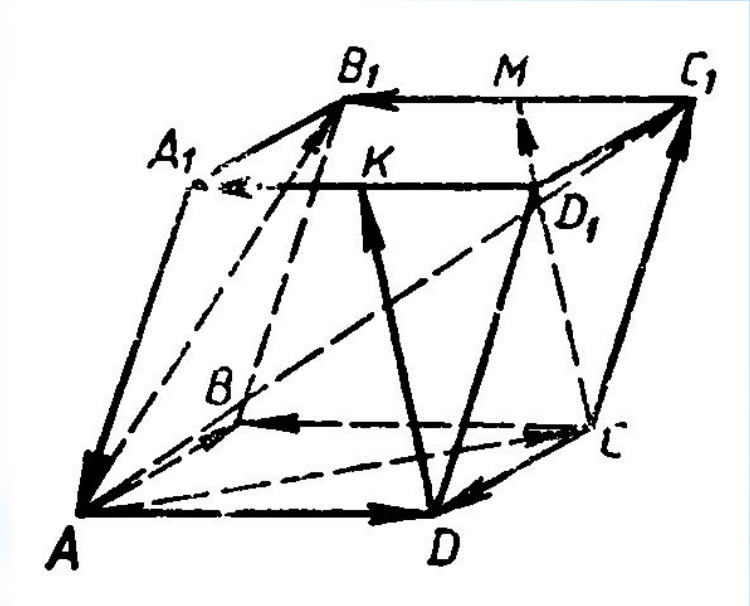
* Решение задач

На рисунке изображён параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Точки M и K – середины ребер $B_1 C_1$, и $A_1 D_1$. Укажите на

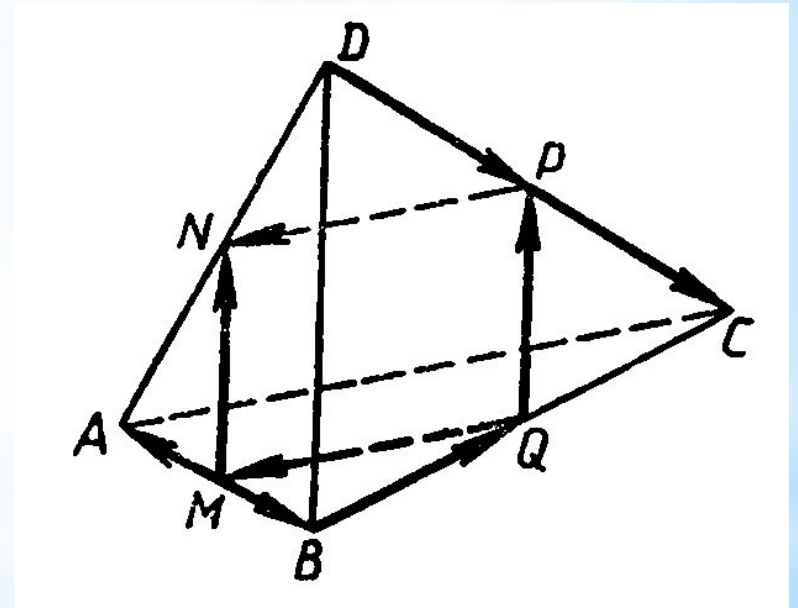
этом рисунке все пары:

- а) сонаправленных векторов;
- б) противоположно направленных векторов;
- в) равных векторов.



На рисунке изображён тетраэдр $ABCD$, ребра которого равны. Точки M , N , P и Q — середины сторон AB , AD , DC , BC .

- а) Выпишите все пары равных векторов, изображённых на этом рисунке,
- б) Определите вид четырёхугольника $MNPQ$.



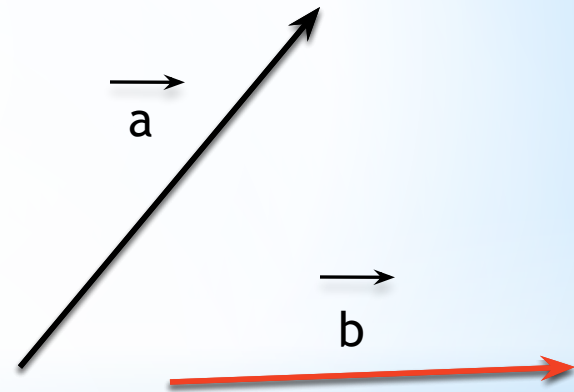
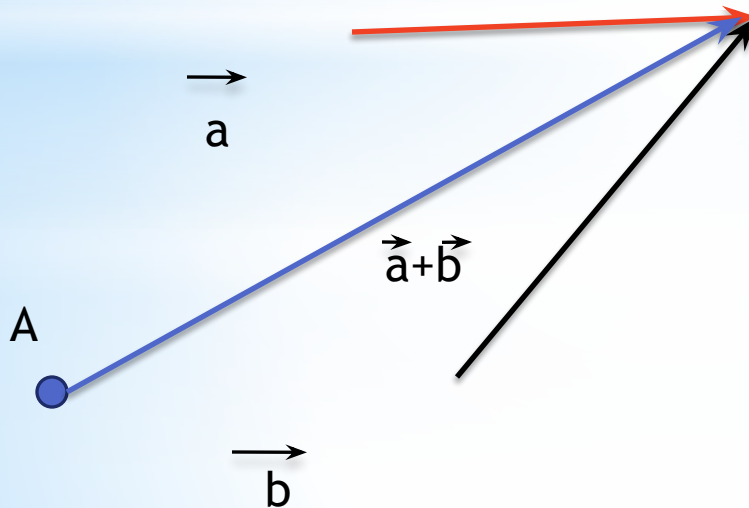
* Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ таковы: $AD=8$ см, $AB=9$ см и $AA_1=12$ см. Найдите длины векторов: а) CC_1 , CB , CD ; б) DC_1 , DB , DB_1

* Сложение векторов

* Сложение двух свободных векторов можно осуществлять как по правилу параллелограмма, так и по правилу треугольника.

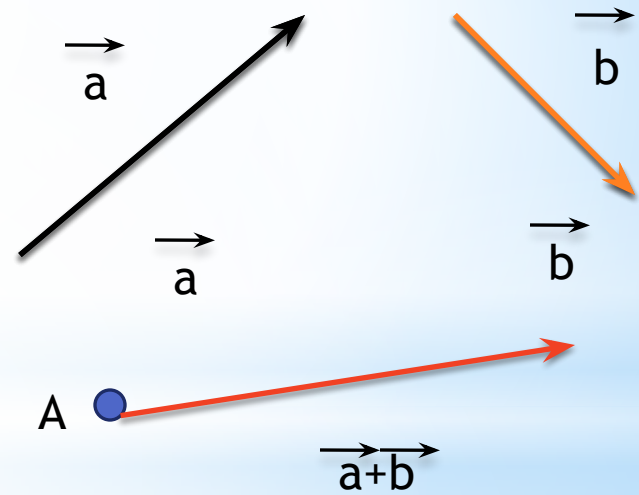
* Правило параллелограмма

Для сложения двух неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} , нужно отложить от какой-либо точки A векторы равные данным и построить параллелограмм. Тогда диагональ и будет суммой двух векторов.



* Правило треугольника

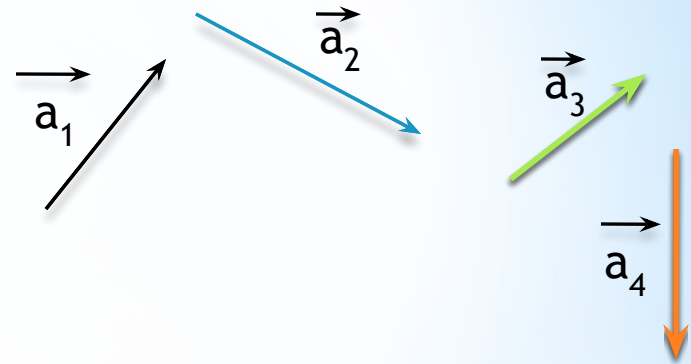
Для сложения двух векторов по правилу треугольника оба эти вектора переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало одного из них совпадало с концом другого. Тогда вектор суммы задаётся третьей стороной образовавшегося треугольника, причём его начало совпадает с началом первого вектора, а конец с концом второго вектора.



* ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА

- 1) От конца вектора a_1 отложить вектор a_2 , равный вектору a_2 ;
- 2) Повторить откладывание векторов столько раз, сколько векторов нужно отложить;
- 3) Провести вектор из конца вектора a_n в начало a .

ВЫВОД: полученный вектор a и будет суммой векторов a_1, a_2, a_3, \dots и a_n



* ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

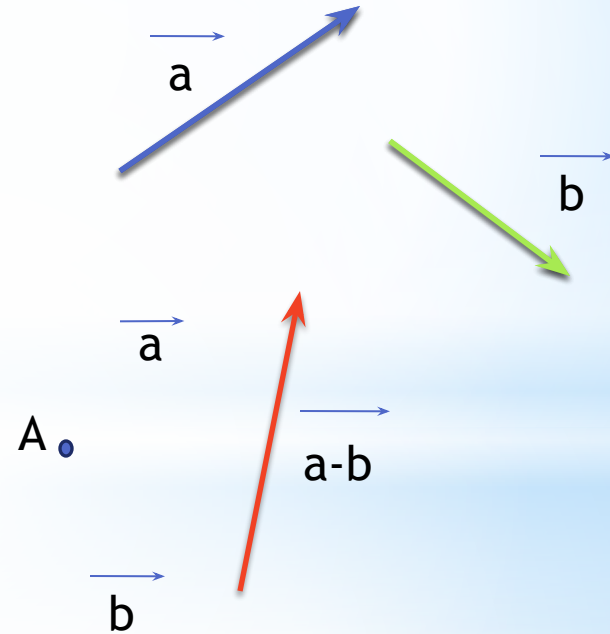
Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} справедливы равенства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - переместительный закон

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ - сочетательный закон

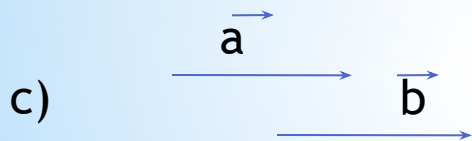
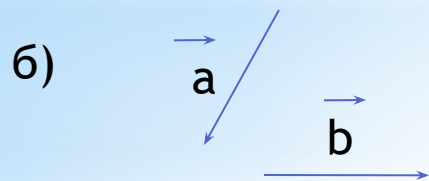
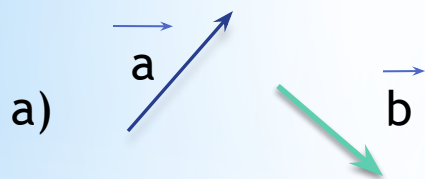
* ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a}



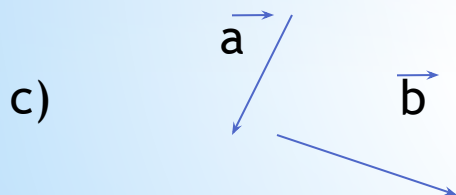
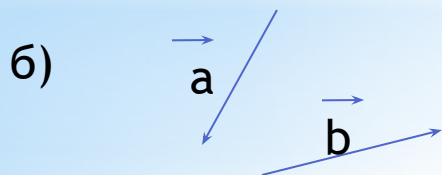
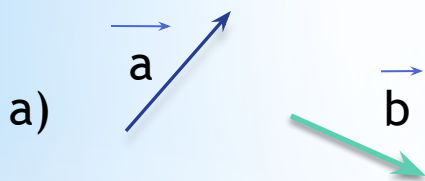
*Задачи

используя правило треугольника ,
параллелограмма постройте векторы $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$



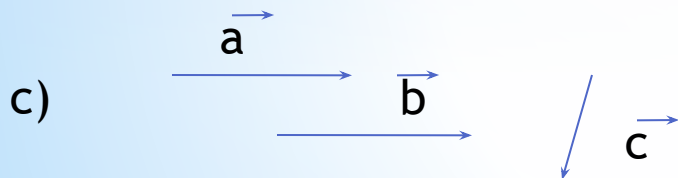
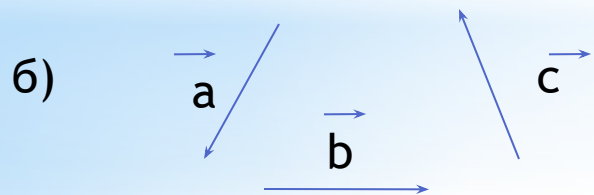
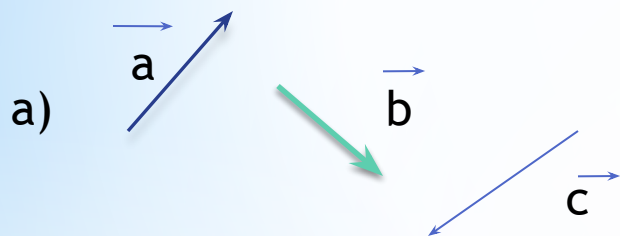
*Задачи

используя треугольника, постройте векторы
 $\vec{OA} = \vec{a} - \vec{b}$



*Задачи

используя правило треугольника, постройте векторы $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



Найдите:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

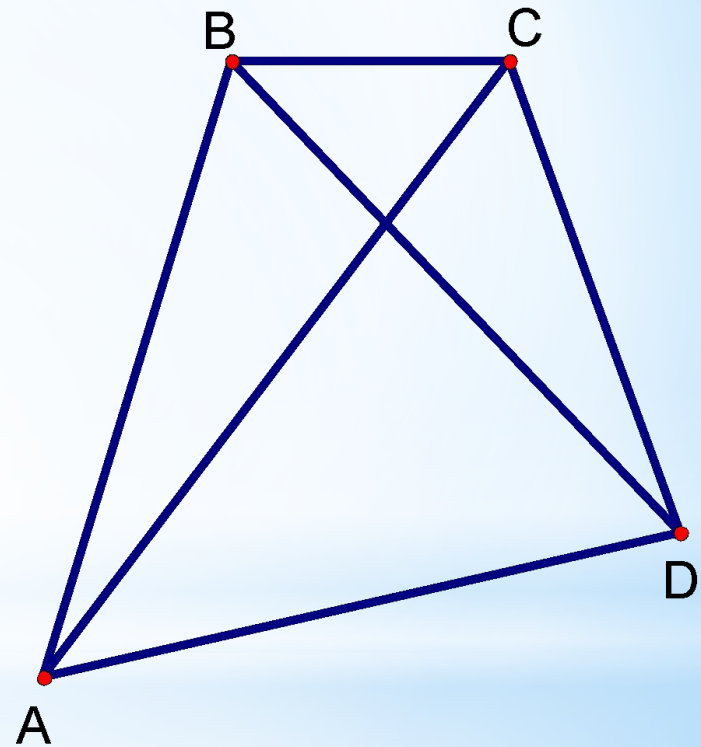
б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} =$

в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} =$

г) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} =$

д) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} =$

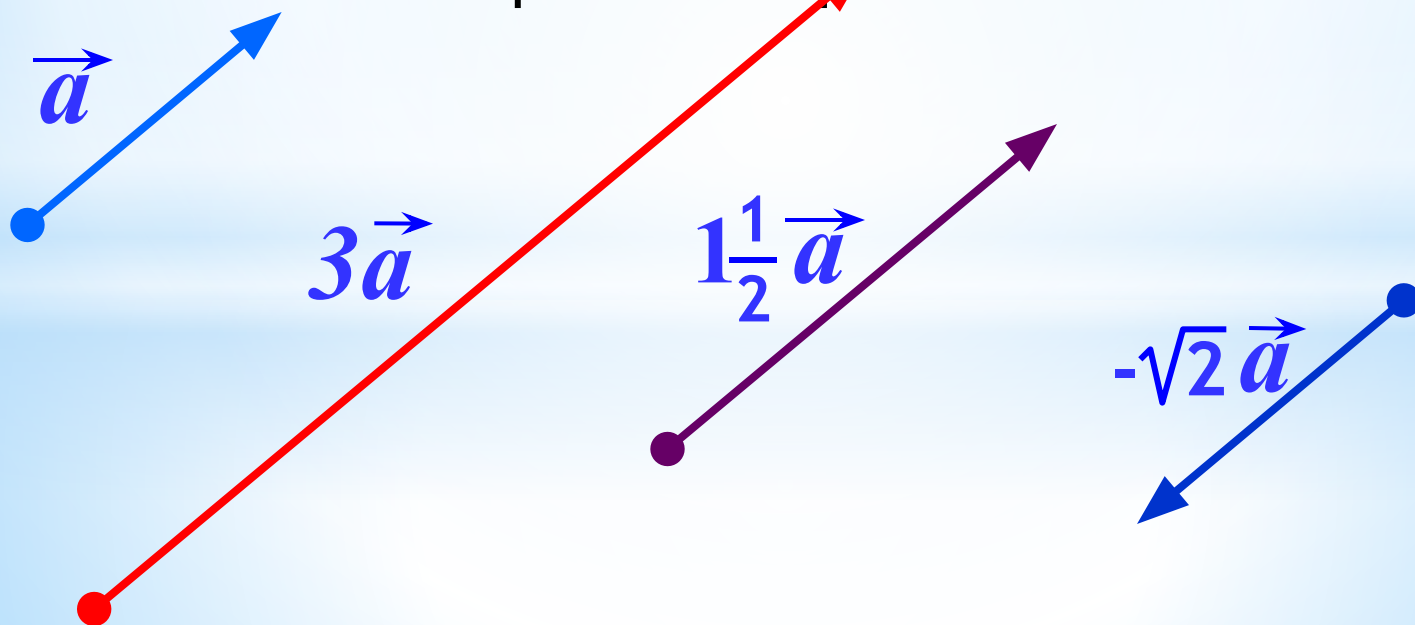
е) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} =$



Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора \vec{a} на число k называется такой вектор \vec{b} , длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$,

причем векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены при $k \geq 0$ и притивоположно направлены при $k < 0$.



Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами.

Для любых \vec{a} , \vec{b} и любых чисел k , l справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a}) \quad \text{Сочетательный закон}$$

$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

Первый распределительный закон

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

Второй распределительный закон

Пусть $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$

Выразите через \vec{m} и \vec{n} векторы

$$2\vec{x} - 2\vec{y}$$

$$2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$$

$$-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$$

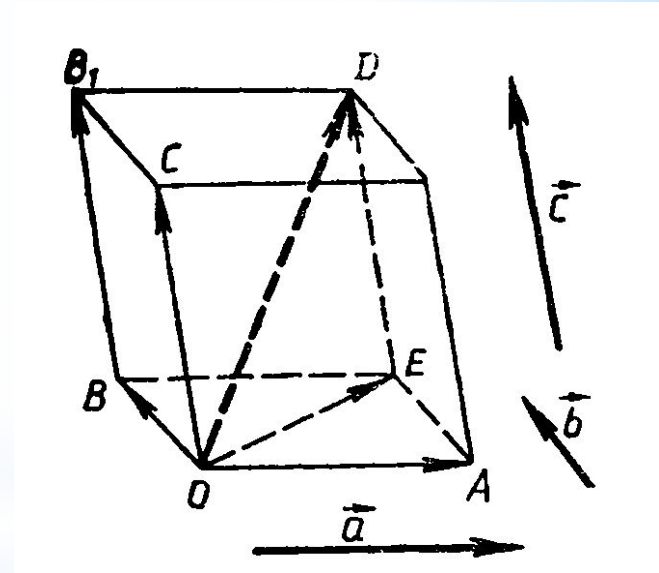
* Математический диктант

1 вариант	2 вариант
1. Опред. равных векторов (чертеж)	1. Опред. сонаправленных векторов (чертеж)
2. Опред. противоположно направленных векторов (четреж)	2. Опред. коллинеарных векторов (чертеж)
3. Начертить два произвольных вектора и покажите сумму и разность этих векторов	3. Начертить два произвольных вектора и покажите сумму и разность этих векторов
4. Начертить пять произвольных векторов и показать их сумму	4. Начертить пять произвольных векторов и показать их сумму
5. Упростить выражение: $2(m+n)-3(4m-n)+m$	5. Упростить выражение: $m-3(n-2m+p)+5(p-4m)$

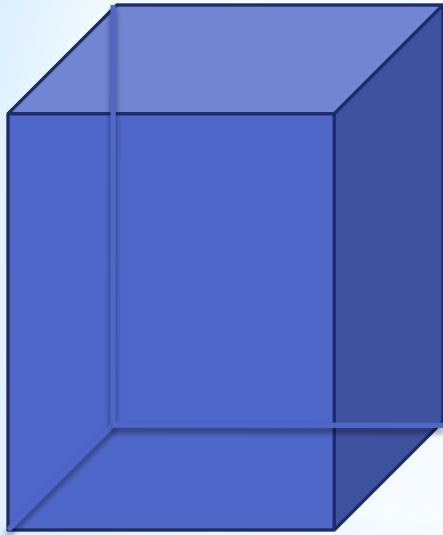
Задача: Пусть $ABCD$ – параллелограмм, а O – произвольная точка пространства. Докажите, что: а) $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}$; б) $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{DA}$.

* КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.



Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Какие из следующих трех векторов компланарны: а) AA_1, CC_1, BB_1 б) AB, AD, AA_1 ; в) $B_1 B, AC, DD_1$ г) AD, CC_1 и $A_1 B_1$,?



Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , т. е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны.

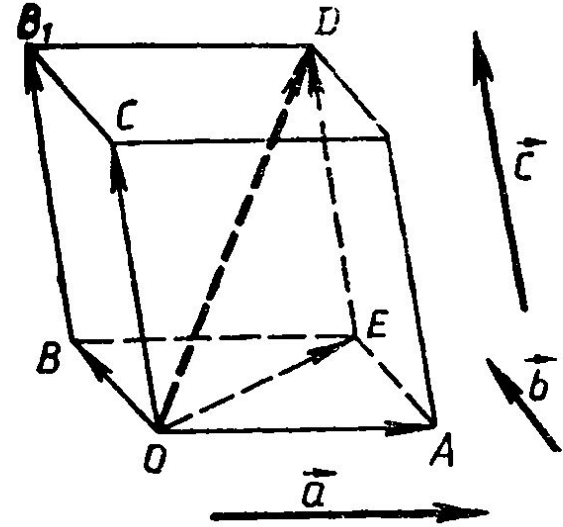
Справедливо и обратное утверждение: если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны, а векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , причем коэффициенты разложения (т. е. числа x , y) определяются единственным образом.

* Правило параллелепипеда.

Для сложения трех некопланарных векторов можно пользоваться так называемым правилом параллелепипеда.

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – некопланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA , OB и OC были его ребрами.

Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} : $\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$; б) $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD_1}$; в) $\vec{A_1 B_1} + \vec{C_1 B_1} + \vec{BB_1}$; г) $\vec{A_1 A} + \vec{A_1 D_1} + \vec{AB}$; д) $\vec{B_1 A_1} + \vec{BB_1} + \vec{BC}$.

Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. а) Разложите вектор \vec{BD}_1 по векторам \vec{BA} , \vec{BC} и \vec{BB}_1 . б) Разложите вектор $\vec{B_1 D_1}$ по векторам $\vec{A_1 A}$, $\vec{A_1 B}$ и $\vec{A_1 D_1}$.

* Разложение вектора по трем некопланарным векторам.

Если вектор \vec{p} представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x , y и z — некоторые числа, то говорят, что вектор \vec{p} разложен по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Числа x , y , z называются коэффициентами разложения.

Теорема. Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

366. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC , а O — произвольная точка пространства, то

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}). \quad (4)$$

Решение. По теореме о точке пересечения медиан треугольника

$\vec{AM} = 2\vec{MA}_1$, где AA_1 — медиана треугольника ABC (рис. 110). Согласно задаче 349

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OA}_1}{1+2} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OA}_1}{3}.$$

Но $OA_1 = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC})$ (объясните почему), поэтому

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}.$$

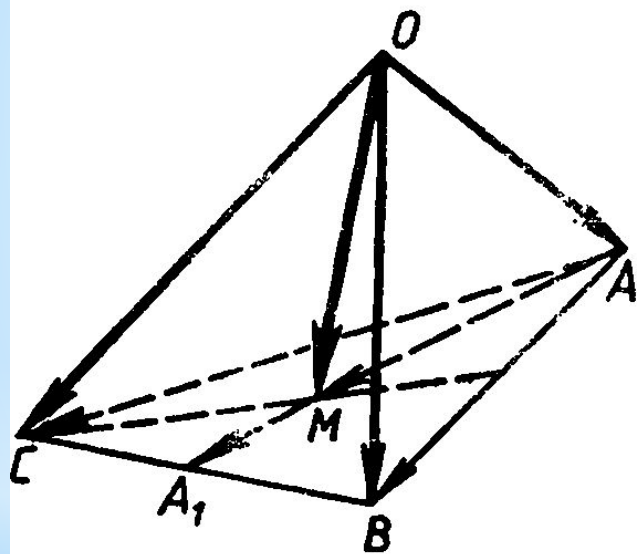


Рис. 110.