МЕТОД ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

ЭКСПЕРТИЗА В УПРАВЛЕНИИ

Роль экспертов в управлении:

Основные трудности, связанные с информацией, возникающие при выработке сложных решений:

- Исходная статистическая информация зачастую бывает недостаточно достоверной.
- Некоторая часть информации имеет качественный характер и не поддается количественной оценке.
- В процессе подготовки решений часто возникают ситуации, когда в принципе необходимую информацию получить можно, однако в момент принятия решения она отсутствует, поскольку это связано с большими затратами времени или средств.
- Существует большая группа факторов, которые могут повлиять на реализацию решения в будущем, но их нельзя точно предсказать.
- любая научная или техническая идея содержит в себе потенциальную возможность различных схем ее реализации, а любое экономическое действие может приводить к многочисленным исходам.
- В-шестых, при выборе наилучшего решения мы нередко сталкиваемся с многозначностью обобщенного критерия, на основе которого можно произвести сравнение возможных исходов.

Метод экспертных оценок

Сущность метода экспертных оценок заключается в проведении экспертами интуитивно-логического анализа проблемы с количественной оценкой суждений и формальной обработкой результатов. Получаемое в результате обработки обобщенное мнение экспертов принимается как решение проблемы.

В процессе управления эксперты производят две основные функции:

- формируют объекты (альтернативные ситуации, цели, решения и т. п.)
- производят измерение их характеристик (вероятности свершения событий, коэффициенты значимости целей, предпочтения решений и т. п.)

Область применения метода экспертных оценок:

- составление перечня возможных событий в различных областях за определенный промежуток времени;
- определение наиболее вероятных интервалов времени свершения совокупности событий;
- определение целей и задач управления с упорядочением их по степени важности;
- определение альтернативных (вариантов решения задачи с оценкой их предпочтения;
- альтернативное распределение ресурсов для решения задач с оценкой их предпочтительности;
- альтернативные варианты принятия решений в определенной ситуации с оценкой их предпочтительности.

Разновидности метода экспертных оценок

- анкетирование и интервьюирование
- мозговой штурм
- дискуссия
- совещание
- оперативная игра
- сценарий
- метод Дельфи

Организация экспертного оценивания

1) Подготовка и издание руководящего документа. Формулировка цели и основных положений работы.

2) Назначение руководителя экспертизы

3) Формирование рабочей группы (РГ)

4) Разработка организации и методики проведения опроса

5)Проведение опроса

6) Обработка результатов

Подбор экспертов

- Формирование системы характеристик эксперта
- Организация процедуры подбора экспертов
- Составление списка возможных экспертов
- Выбор из них экспертной комиссии в соответствии с компетентностью кандидатов.

Опрос экспертов

Опрос – главный этап совместной работы группы управления и экспертов. Основным содержанием опроса является:

- ✔ постановка задачи и предъявление вопросов экспертам
- ✔ информационное обеспечение работы экспертов
- ✔ выработка экспертами суждений, оценок, предложений
- ✔ сбор результатов работы экспертов

Можно назвать три типа задач, которые решаются в процессе опроса:

- оценка качественная или количественная заданных объектов
- построение новых объектов
- построение и оценка новых объектов

Формализация информации и шкалы сравнений

Фактор – это множество, состоящее, по крайней мере, из двух элементов, отражающих различные уровни некоторых подлежащих рассмотрению величин.

Факторы могут быть:

- количественные и качественные
- дискретные и непрерывные.

Номинальные шкалы

При использовании *номинальных шкал* исследуемые объекты можно опознавать и различать на основе трех аксиом идентификации:

1) *i* либо есть *j*, либо есть не *j*;
2) если *i* есть *j*, то *j* есть *i*;
3) если *i* есть *j* и *j* есть *k*, то *i* есть *k*.

Факторы в данном случае выступают как ассоциативные показатели, обладающие информацией, которая может быть формализована в виде бинарных оценок двух уровней: 1 (идентичен) или 0 (различен).

В случаях, когда исследуемые объекты можно в результате сравнения расположить в определенной последовательности с учетом какого-либо существенного фактора (факторов), используются *порядковые шкалы*.

Предположим, что необходимо расположить в определенной последовательности n объектов по какому-либо фактору (критерию). Представим это упорядочение в виде матрицы A где i, j = 1,2,…, n.

Величины устанавливают соотношения между объектами и могут быть определены следующим образом :

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, \textit{если} \quad i \quad \textit{предпочтительнее} \ j; \\ -1, \textit{если} \quad j \quad \textit{предпочтительнее} \ i; \\ 0, \textit{если} \quad i, j \quad \textit{равноценны} \quad . \end{cases}$$

Основные аксиомы:

Соотношение $a_{ij} = +1$, означающее, что i предпочтительнее j, должно быть ассиметричным, т.е., если $a_{ij} = +1$, то $a_{ji} = -1$, и транзитивным, т.е., если $a_{ij} = +1$, $a_{jk} = +1$, то $a_{ik} = +1$.

Соотношение $a_{ij} = 0$, означающее, что i и j равноценны, называется соотношением эквивалентности. Такое соотношение должно быть

рефлексивным, т.е. $a_{ij} = 0$;

симметричным, т.е., если $a_{ij} = 0$, то $a_{ji} = 0$;

транзитивным, т.е., если $a_{ij} = 0$ и $a_{jk} = 0$, то $a_{ik} = 0$.

Кроме того, эти два соотношения должны быть совместимы, т.е., если $a_{ij} = +1$ и $a_{jk} = 0$, то $a_{ik} = +1$, а также, если $a_{ij} = 0$ и $a_{jk} = +1$, то $a_{ik} = +1$.

И, наконец, упорядочение должно быть связным, т.е. для любых i и j или $a_{ij} = +1$, или $a_{ij} = -1$, или $a_{ij} = 0$.

Для формализации оценок, полученных от экспертов, часто используют *интервальные шкалы*. При использовании таких шкал для этих целей можно брать почти все обычные статистические меры. Исключением являются те меры, которые предполагают знание «истинно» нулевой точки шкалы, которая вводится здесь условно.

Интервальные шкалы предполагают возможность трансформации оценок, полученных на одной шкале, в оценки на другой шкале при помощи уравнения $x' = ax + b$

В ряде случаев при формализации экспертных оценок используется свойство аддитивности, которое присуще только шкале отношений. Наличие аддитивности выражается следующими аксиомами :

- если $j = a$ и $i > 0$, то $i + j > a$;
- $i + j = j + i$;
- если $i = a$ и $j = b$, то $i + j = a + b$;
- $(i + j) + k = i + (j + k)$.

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

В зависимости от целей экспертного оценивания и выбранного метода измерения при обработке результатов опроса возникают следующие основные задачи:

- построение обобщенной оценки объектов на основе индивидуальных оценок экспертов
- построение обобщенной оценки на основе парного сравнения объектов каждым экспертом
- определение относительных весов объектов
- определение согласованности мнений экспертов
- определение зависимостей между ранжировками
- оценка надежности результатов обработки

Групповая оценка объектов

Пусть *m* экспертов произвели оценку *n* объектов по *l* показателям. Результаты оценки представлены в виде величин , где *j* – номер эксперта, *i* – номер объекта, *h* – номер показателя (признака) сравнения. Если оценка объектов произведена методом ранжирования, то величины представляют собой ранги. Если оценка объектов выполнена методом непосредственной оценки или методом последовательного сравнения, то величины представляют собой числа из некоторого отрезка числовой оси, или баллы. Обработка результатов оценки существенно зависит от рассмотренных методов измерения.

Рассмотрим случай, когда величины $x_{ij}^{h} (i = 1,...,n; j = 1,2,...,m; h = 1,2,...,l)$ получены методами непосредственной оценки или последовательного сравнения, т. е. x_{ij}^{h} являются числами, или баллами. Для получения групповой оценки объектов в этом случае можно (воспользоваться средним значением оценки для каждого объекта

$$x_i = \sum_{h=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} q_h x_{ij}^{h} k_j \ (i = 1,2,...,n),$$

где q_h - коэффициенты весов показателей сравнения объектов, k_j - коэффициенты компетентности экспертов

Коэффициенты весов показателей и компетентности объектов являются нормированными величинами

$$\sum_{h=1}^{l} q_h = 1; \sum_{j=1}^{m} k_j = 1.$$

Коэффициенты весов показателей могут быть определены экспертным путем. Если q_{hj} - коэффициент веса h-го показателя, даваемый j-м экспертом, то средний коэффициент веса h-го показателя по всем экспертам равен

$$q_h = \sum_{j=1}^{m} q_{hj} k_j \, (h = 1, 2, \ldots, l).$$

Коэффициенты компетентности экспертов можно вычислить по апостериорным данным, т. е. по результатам оценки объектов. Основной идеей этого вычисления является предположение о том, что компетентность экспертов должна оцениваться по степени **согласованности** их оценок с групповой оценкой объектов.

Алгоритм вычисления коэффициентов компетентности экспертов имеет вид рекуррентной процедуры:

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_j^{t-1} (i = 1,2,\dots,n);$$

$$\lambda^t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} x_i^t (t = 1,2,\dots);$$

$$k_j^t = \frac{1}{\lambda^t} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_i^t ; \sum_{j=1}^{m} k_j^t = 1 (j = 1,2,\dots,m).$$

Вычисления начинаются с t=1.

Начальные значения коэффициентов компетентности принимаются одинаковыми и равными $k_j^{O} = 1/m$ Тогда групповые оценки объектов первого приближения равны средним арифметическим значениям оценок экспертов

$$x_i^1 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\ (i = 1,2,\ldots,n).$$

Далее вычисляется величина λ^1:

$$\lambda^1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} x_i^1$$

и значение коэффициентов компетентности первого приближения:

$$k_j^1 = \frac{1}{\lambda^1}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_i^1.$$

Рассмотрим теперь случай, когда эксперты производят оценку множества объектов методом ранжирования так, что величины x_{ij} есть ранги.

Ранжировку можно представить в виде матрицы парных сравнений, элементы которой определим следующим образом:

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, если O_k \square O_l, \\ -1, если O_l \square O_k, \\ 0, если O_k \propto O_l. \end{cases}$$

6 аксиом :

1. $d(R_i, R_j) \geq 0$, причем равенство достигается, если ранжировки R_i и R_j тождественны;

2. $d(R_i, R_j) = d(R_j, R_i)$;

3. $d(R_i, R_h) + d(R_h, R_j) \geq d(R_i, R_j)$,

причем равенство достигается, если ранжировка «лежит между» ранжировками R_i и R_j. Понятие «лежит между» означает, что суждение о некоторой паре $O_k O_l$ объектов в ранжировке совпадает с суждением об этой паре либо в R_i, либо в R_j или же в R_i $O_k \square O_l$, в R_j $O_l \square O_k$, а в R_h $O_k \propto O_l$;

4. $d(R_i^{'}, R_j^{'}) = d(R_i, R_j)$,

где $R_i^{'}$ получается из R_i некоторой перестановкой объектов, а $R_j^{'}$ из R_j той же самой перестановкой. Эта аксиома утверждает независимость расстояния от перенумерации объектов.

5. Если две ранжировки R_i, R_j одинаковы всюду, за исключением n-элементного множества элементов, являющегося одновременно сегментом обеих ранжировок, то $d(R_i, R_j)$ можно вычислить, как если бы рассматривалась ранжировка только этих n-объектов. Сегментом ранжировки называется множество, дополнение которого непусто и все элементы этого дополнения находятся либо впереди, либо позади каждою элемента сегмента. Смысл этой аксиомы состоит в том, что если две ранжировки полностью согласуются в начале и конце сегмента, а отличие состоит в упорядочении средних n-объектов, то естественно принять, что расстояние между ранжировками должно равняться расстоянию, соответствующему ранжировкам средних n-объектов.

6. Минимальное расстояние равно единице.

Сложность вычисления медианы или средней ранжировки привела к необходимости применения более простых способов построения обобщенной ранжировки.

К числу таких способов относится способ сумм рангов.

Этот способ заключается в ранжировании объектов по величинам сумм рангов, полученных каждым объектом от всех экспертов. Для матрицы ранжировок $\left\| r_{ij} \right\|$ составляются суммы

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \qquad (i=1,2,\dots,n).$$

Далее объекты упорядочиваются по цепочке неравенств $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$.

Для учета компетентности экспертов достаточно умножить каждую i-ю ранжировку на коэффициент компетентности j-го эксперта $0 \le k_j \le 1$. В этом случае вычисление суммы рангов для i-го объекта производится по следующей формуле:

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} k_j \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Обобщенная ранжировка с учетом компетентности экспертов строится на основе упорядочения сумм рангов для всех объектов

При ранжировании объектов эксперты обычно расходятся во мнениях по решаемой проблеме. В связи с этим возникает необходимость количественной оценки степени согласия экспертов. Получение количественной меры согласованности мнений экспертов позволяет более обоснованно интерпретировать причины в расхождении мнений.

В настоящее время известны две меры согласованности мнений группы экспертов: дисперсионный и энтропийный коэффициенты конкордации.

Дисперсионный коэффициент конкордации. Рассмотрим матрицу результатов ранжировки n объектов группой из m экспертов $\|r_{ij}\|$ (j=1,…,m; i=1,…,n), где r_{ij} - ранг, присваиваемый j-м экспертом i-му объекту. Составим суммы рангов по каждому столбцу. В результате получим вектор с компонентами

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Величины r_i рассмотрим как реализации случайной величины и найдем оценку дисперсии

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - r)^2,$$

где $\bar{r}$ - оценка математического ожидания, равная

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i .$$

Дисперсионный коэффициент конкордации определяется как отношение оценки дисперсии) к максимальному значению этой оценки

$$W = \frac{D}{D_{\max}}$$

Путем математических преобразований получим окончательное выражение для коэффициента конкордации

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}.$$

Где

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij} - \bar{r}\right)^2.$$

Если в ранжировках имеются связанные ранги, то максимальное значение дисперсии в знаменателе формулы становится меньше, чем при отсутствии связанных рангов. Можно показать, что при наличии связанных рангов коэффициент конкордации вычисляется по формуле:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} T_j},$$

где

$$T_j = \sum_{k=1}^{H_j}\left(h_k^3 - h_k\right).$$

В формуле T_j - показатель связанных рангов в *j*-й ранжировке, H_j - число групп равных рангов в *j*-й ранжировке, h_k - число равных рангов в *k*-й группе связанных рангов при ранжировке *j*-м экспертом.

Энтропийный коэффициент конкордации определяется формулой (коэффициент согласия)

$$W = 1 - \frac{H}{H_{\max}},$$

где H – энтропия, вычисляемая по формуле

$$H = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij},$$

Эти оценки вероятностей вычисляются в виде отношения количества экспертов m_j, приписавших объекту O_i ранг j к общему числу экспертов.

$$p_{ij} = \frac{m_j}{m}.$$

Обработка парных сравнений объектов

При решении задачи оценки большого числа объектов (ранжирование, определение относительных весов, балльная оценка) возникают трудности психологического характера, обусловленные восприятием экспертами множества свойств объектов. Возникает вопрос, каким образом получить оценку всей совокупности объектов на основе результатов парного сравнения, не накладывая условия транзитивности? Пусть *m* экспертов производят оценку всех пар объектов, давая числовую оценку

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, если O_i \succ O_j, \\ 0{,}5, если O_i \infty O_j, \\ 0, если O_i \prec O_j. \end{cases}$$

Обработка парных сравнений объектов

Оценка математического ожидания случайной величины r_{ij} равна

$$x_{ij} = M\left[r_{ij}\right] = \frac{m_i}{m} + 0{,}5\frac{m_h}{m} + 0\frac{m_j}{m}.$$

Общее количество экспертов равно сумме

$$m = m_i + m_h + m_j.$$

Определяя отсюда m_h получаем

$$x_{ij} = \frac{1}{2} + \frac{m_i - m_j}{2m}$$

Обработка парных сравнений объектов

Введем вектор коэффициентов относительной важности объектов порядка t следующей формулой:

$$k^t = \frac{1}{\lambda^t} X k^{t-1} \quad (t = 1, 2, \ldots),$$

где $X = \left\| x_{ij} \right\|$ - матрица $n \times n$ математических ожиданий оценок пар объектов, $k^t = (k_1^t, k_2^t, \ldots, k_n^t)$ - вектор коэффициентов относительной важности объектов порядка t. Величина λ^t равна

$$\lambda^t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} k_j^{t-1}.$$

Обработка парных сравнений объектов

Коэффициенты относительной важности первого порядка есть относительные суммы элементов строк матрицы X. Действительно, полагая t=1, получаем

$$k_i^1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}; \quad \sum_{i=1}^{n} k_i^1 = 1.$$

Коэффициенты относительной важности второго порядка (t=2) есть относительные суммы элементов строк матрицы X^2.

$$k_i^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}x_{jk}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ij}x_{jk}}; \quad \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = 1.$$

Если матрица X неотрицательна и неразложима, то при увеличении порядка $t \to \infty$ величина λ^t сходится к максимальному собственному числу матрицы X

$$\lambda_0 = \lim_{t \to \infty} \lambda^t,$$

а вектор коэффициентов относительной важности объектов стремится к собственному вектору матрицы X, соответствующему максимальному собственному числу λ_0:

$$k = \lim_{t \to \infty} k^t; \sum_{i=1}^{n} k_i = 1.$$

Определение собственных чисел и собственных векторов матрицы производится решением алгебраического уравнения

$$\left| X - \lambda E \right| = 0,$$

где Е—единичная матрица, и системы линейных уравнений

$$Xk = \lambda_0 k; \sum_{i=1}^{n} k_i = 1,$$

где k – собственный вектор матрицы X, соответствующий максимальному собственному числу λ_0. Компоненты собственного вектора есть коэффициенты относительной важности объектов, измеренные в шкале отношений.

С практической точки зрения вычисление коэффициентов относительной важности объектов проще производить последовательной процедурой по формуле при t=1, 2, … Как показывает опыт, 3-4 последовательных вычислений достаточно, чтобы получить значения λ_0 и k, близкие к предельным значениям

Матрица $X = \|x_{ij}\|$ неотрицательная, поскольку все ее элементы неотрицательны. Матрица называется неразложимой, если перестановкой рядов (строк и одноименных столбцов) ее нельзя привести к треугольному виду

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ll} \end{pmatrix},$$

где A_{jj} - неразложимые подматрицы матрицы X.

Данное представление матрицы означает разбиение объектов на l доминирующих множеств

$$A_{ll} \square A_{l-1\,l-1} \square \ldots \square A_{11}.$$

При $l=n$ матрица X неразложима, т. е. существует только одно доминирующее множество, совпадающее с исходным множеством объектов. Разложимость матрицы X означает, что среди экспертов имеются большие разногласия в оценке объектов.

Если матрица X неразложима, то вычисление коэффициентов относительной важности $k_i \, (i = 1,2,\ldots,n)$ позволяет определить, во сколько раз один объект превосходит другой объект по сравниваемым показателям. Вычисление коэффициентов относительной важности объектов позволяет одновременно построить ранжировку объектов. Объекты ранжируются так, что первым объектом считается объект, у которого коэффициент относительной важности наибольший. Полная ранжировка определяется цепочкой неравенств

$$k_1 > k_2 > k_3 > \ldots > k_n,$$

из которой следует

$$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ \ldots \succ O_n.$$

Если матрица X является разложимой, то определить коэффициенты относительной важности можно только для каждого множества A_{ii}. Для каждой матрицы A_{ii} определяется максимальное собственное число и соответствующий этому числу собственный вектор.

Компоненты собственного вектора и есть коэффициенты относительной важности объектов, входящих в множество A_{li}. По этим коэффициентам осуществляется ранжировка объектов данного множества. Общая ранжировка объектов дается соотношением

$$\underbrace{O_{l1} \succ \ldots \succ O_{ln_l}}_{A_l} \succ \ldots \succ \underbrace{O_{i1} \succ \ldots \succ O_{in_i}}_{A_i} \succ \ldots \succ \underbrace{O_{11} \succ \ldots \succ O_{1n_1}}_{A_{11}}.$$

Таким образом, если матрица *X* неразложима, то по результатам парного сравнения объектов возможно как измерение предпочтительности объектов в шкале отношений, так и в шкале порядка (ранжирование). Если же матрица *X* разложима, то возможно только ранжирование объектов.

Следует отметить, что отношение предпочтения $O_i \succ O_j$ может быть выражено любым положительным числом *C*. При этом должно выполняться условие $x_{ij} + x_{ji} = C$. В частности, можно выбрать *C*=2 так, что если $O_i \succ O_j$, то $x_{ij} = 2$, если $O_i \infty O_j$, то $x_{ij} = 1$, и если $O_i \prec O_j$, то $x_{ij} = 0$.

Определение взаимосвязи ранжировок

При обработке результатов ранжирования могут возникнуть задачи определения зависимости между ранжировками двух экспертов, связи между достижением двух различных целей при решении одной и той же совокупности проблем или взаимосвязи между двумя признаками.

В этих случаях мерой взаимосвязи может служить *коэффициент ранговой корреляции*. Характеристикой взаимосвязи множества ранжировок или целей будет являться матрица коэффициентов ранговой корреляции. Известны коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла.

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена определяется формулой:

$$\rho = \frac{K_{12}}{\sqrt{D_1 D_2}},$$

где K_{12} - взаимный корреляционный момент первой и второй ранжировок, D_1, D_2 - дисперсии этих ранжировок.

По данным двум ранжировкам оценки взаимного корреляционного момента и дисперсии вычисляются по формулам:

$$K_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j} - \bar{r}_1\right)\left(r_{2j} - \bar{r}_2\right),$$

$$D_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j} - \bar{r}_1\right)^2; \; D_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{2j} - \bar{r}_2\right)^2,$$

где n – число ранжируемых объектов, r_{1j}, r_{2j} - ранги в первой и второй ранжировках соответственно, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ - средние ранги в первой и второй ранжировках.

Оценки средних рангов

Оценки средних рангов определяются формулами:

$$\bar{r}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j} - \bar{r}_1\right)^2$$

$$\bar{r}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{2j}$$

Вычислим оценки средних рангов и дисперсий в предположении, что в ранжировках отсутствуют связанные ранги, т. е. обе ранжировки дают строгое упорядочение объектов.

$$\bar{r} = \bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \frac{n(n+1)}{n \cdot 2} = \frac{n+1}{2}$$

Две ранжировки могут отличаться друг от друга только перестановкой рангов, но сумма натуральных чисел и их квадратов не зависит от порядка (перестановки) слагаемых.

Дисперсии для двух любых ранжировок (при отсутствии связанных рангов) будут одинаковы и равны

$$D = D_1 = D_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij} - \bar{r}_i\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}^2 - 2\bar{r}_i\sum_{j=1}^{n} r_{ij} + n\bar{r}_i^{\,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{(n+1)(2n+1)n}{6} - 2\bar{r}_1^{\,2}n + \bar{r}_1^{\,2}n\right] = \frac{n(n+1)}{12} \quad (i=1,2).$$

Дисперсии для двух любых ранжировок (при отсутствии связанных рангов) будут одинаковы и равны

$$\rho = \frac{12}{n^3 - n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j} - \bar{r}\right)\left(r_{2j} - \bar{r}\right).$$

Для проведения практических расчетов удобнее пользоваться другой формулой

$$2\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j}-\bar{r}\right)\left(r_{2j}-\bar{r}\right)\equiv\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j}-\bar{r}\right)^{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(r_{2j}-\bar{r}\right)^{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j}-r_{2j}\right)^{2}.$$

Первые две суммы в правой части одинаковы и равны

$$\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j}-\bar{r}\right)^{2}+\sum_{j=1}^{n}\left(r_{2j}-\bar{r}\right)^{2}=\frac{n(n+1)(n-1)}{12}=\frac{n^{3}-n}{12}.$$

Формула: коэффициента ранговой корреляции Спирмена:

$$\rho=1-\frac{6}{n^{3}-n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{1j}-r_{2j}\right)^{2}.$$

Оценка коэффициента корреляцииявляется случайной величиной.

Для определения значимости этой оценки необходимо задаться величиной вероятности β, принять решение о значимости коэффициента корреляции и определить значение порога ε по приближенной формуле:

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\Psi\left(\frac{1-\beta}{2}\right),$$

где n – количество объектов, $\Psi(x)$ - функция, обратная функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt,$$

для которой имеются таблицы. После вычисления порогового значения оценка коэффициента корреляции считается значимой, если $|\rho| < \varepsilon$.

Определение значимости оценки

Для определения значимости оценки коэффициента Спирмена можно воспользоваться критерием Стьюдента, поскольку величина

$$t = \rho\sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}}$$

приближенно распределена по закону Стьюдента с $n-2$ степенями свободы.

Если в ранжировках имеются связанные ранги, то коэффициент Спирмена вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho + T_1 + T_2}{\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}},$$

где ρ - оценка коэффициента ранговой корреляции Спирмена, а величины T_1, T_2 равны:

$$T_1 = \frac{3}{n^3-n}\sum_{k_1} k_1(k_1-1);\ T_2 = \frac{3}{n^3-n}\sum_{k_2} k_2(k_2-1).$$

В этих формулах k_1 и k_2 - количество различных связанных рангов в первой и второй ранжировках соответственно.

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла при отсутствии связанных рангов определяется формулой:

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} sign\left[\left(r_{1i} - r_{1j}\right)\left(r_{2i} - r_{2j}\right)\right],$$

где n – количество объектов, r_{ij} - ранги объектов, $sign\ x$ – функция, равная

$$sign\, x = \begin{cases} 1 & при \quad x > 0, \\ -1 & при \quad x < 0, \\ 0 & при \quad x = 0. \end{cases}$$

Сравнительная оценка коэффициентов ранговой корреляции Спирмена и Кендалла показывает, что вычисление коэффициентов Спирмена производится по более простой формуле. Кроме того, коэффициент Спирмена дает более точный результат, поскольку он является оптимальной по критерию минимума средней квадрата ошибки оценкой коэффициента корреляции.

Отсюда следует, что при практических расчетах корреляционной зависимости ранжировок предпочтительнее использовать коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

ПРИМЕР:

9. *Пример выбора проекта.* По заданию руководства фирмы анализируется восемь проектов, предлагаемых для включения в план стратегического развития фирмы. Эти проекты обозначаются следующим образом: Д, Л, М–К, Б, Г–Б, Сол, Стеф, К (по фамилиям менеджеров, предложивших их для рассмотрения). Все проекты направляются 12 экспертам, назначенным Советом директоров фирмы. В таблице 1 приведены ранги восьми проектов, присвоенные им каждым из 12 экспертов в соответствии с представлением экспертов о целесообразности включения проекта в стратегический план фирмы. При этом эксперт присваивает ранг 1 самому лучшему проекту, который обязательно надо реализовать. Ранг 2 получает от эксперта второй по привлекательности проект и т.д. и, наконец, ранг 8 – наиболее сомнительный проект, который реализовывать стоит лишь в последнюю очередь).

Таблица 1П

№ эксперта	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

ПРИМЕР:

Анализируя результаты работы экспертов, члены Правления фирмы были вынуждены констатировать, что полного

согласия между экспертами нет, а потому данные, приведенные в табл. 1П, следует подвергнуть более тщательному

математическому анализу. С этой целью был использован метод средних арифметических рангов. Для этого прежде всего

была подсчитана сумма рангов, присвоенных проектам (табл. 1П). Затем эта сумма была разделена на число экспертов, в

результате был рассчитан средний арифметический ранг. По средним рангам строится итоговая ранжировка (упорядочение),

исходя из принципа – чем меньше средний ранг, тем лучше проект.

ПРИМЕР:

Результаты анализа показывают, что эксперт № 4 считает проекты М–К и Б равноценными, они уступают лишь одному проекту – проекту Сол. Поэтому проекты М–К и Б должны были бы стоять на втором и третьем местах и получить баллы 2 и 3. Поскольку они равноценны, то получают средний балл (2+3) / 2 = 5/ 2 = 2,5.

Наименьший средний ранг, равный 2,625, у проекта Б, следовательно, в итоговой ранжировке он получает ранг 1.

Следующая по величине сумма, равная 3,125, у проекта М–К. И он получает итоговый ранг 2. Проекты Л и Сол имеют одинаковые суммы (равные 3,25), значит, с точки зрения экспертов они равноценны (при рассматриваемом способе сведения вместе мнений экспертов с целью получения итоговой ранжировки), а потому они должны бы стоять на 3 и 4 местах и получают средний балл (3+4) /2 = 3,5. Дальнейшие результаты приведены в табл. 2П.

ПРИМЕР:

Таблица 2П

	Д	Л	М-К	Б	Г-Б	Сол	Стеф	К
Сумма рангов	60	39	37,5	31,5	76	39	64	85
Среднее арифметическое рангов	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Итоговый ранг по среднему арифметическому	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8
Медианы рангов	5	3	3	2,25	7,5	4	6	7
Итоговый ранг по медианам	5	2,5	2,5	1	8	4	6	7

ПРИМЕР:

Два эксперта провели оценку шести альтернатив, используя собственные шкалы в баллах, определить групповую оценку каждой альтернативы:

Эксперт	Альтернативы					
	а1	а2	а3	а4	а5	а6
Э1	10	6	9	2	4	6
Э2	9	7	20	5	2	6