Введение в теорию конечных автоматов

В вычислительной технике используются системы двух классов:

-*Комбинационные системы*

Особенности: имеют функциональную зависимость между входными и выходными сигналами $y(t)=f(x(t)$, не имеют элементов памяти.

- *Цифровые автоматы (схемы второго класса* или просто *автоматы)*

Особенности: содержат в своем составе запоминающие элементы, выходные сигналы зависят не только от входных(в один и тот же момент времени), но и от состояния схемы, которое зависит от поступивших в предыдущие моменты времени входных сигналов.

Автомат-это дискретный преобразователь информации, способный принимать различные состояния, переходить под воздействием входных сигналов из одного состояния в другое и выдавать

Математической моделью конечного автомата является абстрактный автомат, с одним входным и выходным каналом:

$X(x_1, \ldots, x_F)$--->$A(a_0, ..., a_M)$--->$Y(y_1, \ldots, y_G)$

Автомат функционирует в дискретные моменты времени, интервал между которыми Т (*такт)*. В каждый дискретный момент времени на вход автомата поступает одна буква входного алфавита, автомат переходит из одного состояния в другое и выдается одна буква выходного алфавита. В зависимости от такта Т, различают автоматы *синхронного действия* (Т = *const*) и *асинхронного действия* (Т≠*const*).

Детерминированные автоматы

Для задания конечного автомата S необходима совокупность из пяти объектов: S{A, X, Y, d, l}

$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_M\}$ – множество состояний автомата,

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_f, \ldots, x_F\}$ – множество входных сигналов или входной алфавит,

$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_g, \ldots, y_G\}$ – множество выходных сигналов или выходной алфавит,

d – функция переходов, определяющая состояние автомата в момент времени (t + 1) в зависимости от состояния автомата и входного сигнала в момент времени t, т.е. $a(t + 1) = d\,[a(t), x(t)]$,

l – функция выходов, определяющая значение выходного сигнала в зависимости от состояния автомата и входного сигнала в тот же момент времени, т.е. $y(t) = l[a(t), x(t)]$.

Для того, чтобы автомат был конечным необходимо чтобы множества A, X, Y были конечны

Принцип работы детерминированного автомата:

В каждый момент времени t он находится в определенном состоянии $a(t)$ из множества А возможных состояний, причем в начальный момент времени $t = 0$ он находится в состоянии a_0. Автомат воспринимает входной сигнал $x(t)$, выдает выходной сигнал:

$y(t) = l[a(t), x(t)]$

и переходит в состояние:

$a(t + 1) = d[a(t), x(t)]$

Таким образом:

<u>Детерминированными</u> называют автоматы, которые каждой паре символов $a(t)$ и $x(t)$ ставит в однозначное соответствие пару символов $a(t + 1)$ и $y(t)$

Преобразование информации в детерминированных автоматах

1. Любое входное слово длиною l букв преобразуется в выходное слово той же длины.
2. Если каждый раз перед подачей входных сигналов автомат находится в одном и том же состоянии, то при совпадении в двух входных словах первых l_1 букв, в выходных словах первые l_1 букв также совпадут.

Кроме детерминированных автоматов существуют *вероятностные* автоматы, в которых переход из одного состояния в другое под воздействием случайных или детерминированных входных сигналов происходит случайно. Работа таких автоматов описывается уже матрицей переходов d, элементами которой являются вероятности переходов из одного состояния в другое.

Автоматы Мили и Мура

Применяемые на практике автоматы принято разделять на два класса – это автоматы *Мили* и автоматы *Мура*, названные так по имени американских ученых, которые впервые начали их изучать

Автомат Мили— конечный автомат, выходные сигналы которого зависят как от состояния автомата, так и от значения входного сигнала

Закон функционирования автомата Мили

$a(t + 1) = d\,[a(t), x(t)],$

$y(t) = l[a(t), x(t)]$

Автомат Мура- конечный автомат, входные сигналы которого y(t) в каждый дискретный момент времени t однозначно определяется состоянием автомата в тот же момент времени и не зависят от входного сигнала

$a(t + 1) = d\ [a(t), x(t)]$,

$y(t) = l[a(t)]$.

Способы задания автоматов

Чтобы задать конечный автомат S, необходимо описать все элементы множества S = {A, X, Y, d, l},

Т.е. необходимо описать входной и выходной алфавиты и алфавит состояний, а также функции переходов d и выходов l. При этом среди множества $A = \{a_0, a_1, \dots a_M\}$ необходимо выделить начальное состояния a_0, в котором автомат находится в момент времени $t = 0$. Существует несколько способов задания работы автомата, но наиболее часто используются *табличный* и *графический*.

Табличный способ

При табличном способе задания автомат *Мили* описывается двумя таблицами:

таблицей переходов и*таблицей выходов:*

Таблица переходов

x_j/ a_1	a_0	…	a_M
x_1	$d(a_0, x_1)$	…	$d(a_M, x_1)$
…	…	…	…
x_F	$d(a_0, x_F)$	…	$d(a_M, x_F)$

Таблица выходов

x_j/ a_1	a_0	…	a_M
x_1	$l(a_0, x_1)$	…	$l(a_M, x_1)$
…	…	…	…
x_F	$l(a_0, x_F)$	…	$l(a_M, x_F)$

Строки этих таблиц соответствуют входным сигналам $x(t)$, а столбцы – состояниям. На пересечении столбца a_i и строки x_j в таблице переходов ставится состояние $as = d[a_i, x_j]$, в которое автомат перейдет из состояния a_i под воздействием сигнала x_j, а в таблице выходов – соответствующий этому переходу выходной сигнал $yg = l[a_i, x_j]$. Иногда автомат Мили задают совмещенной таблицей переходов и выходов: x_j/a_1

x_j/a_1	a_0	…	a_M
x_1	$d(a_0, x_1) / l(a_0, x_1)$	…	$d(a_M, x_1) / l(a_M, x_1)$
…	…	…	…
x_F	$d(a_0, x_F) / l(a_0, x_F)$	…	$d(a_M, x_F) / l(a_M, x_F)$

Так как в автомате *Мура* выходной сигнал однозначно определяется состоянием автомата, то для его задания требуется только одна таблица, которая называется *отмеченной* таблицей переходов автомата *Мура:*

y_g	$l(a_0)$	…	$l(a_M)$
x_j / a_1	a_0	…	a_M
x_1	$d(a_0, x_1)$	…	$d(a_M, x_1)$
…	…	…	…
x_F	$d(a_0, x_F)$	…	$d(a_M, x_F)$

В этой таблице каждому столбцу приписан, кроме состояния a_i, еще и выходной сигнал $y(t) = l(a(t))$, соответствующий этому состоянию. Таблица переходов автомата *Мура* называется отмеченной потому, что каждое состояние отмечено выходным сигналом.

Задание таблиц переходов и выходов полностью описывает работу конечного автомата, поскольку задаются не только сами функции переходов и выходов, но также и все три алфавита: входной, выходной и алфавит состояний. Рассмотрим примеры табличного задания автоматов *Мили* и *Мура:*

Автомат Мура:

y_g	y_2	y_1	y_1	y_3	y_2
x_j / a_i	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_2	a_1	a_3	a_4	a_2
x_2	a_3	a_4	a_4	a_0	a_1

Автомат Мили:

x_j / a_i	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	a_1 / y_1	a_2 / y_3	a_3 / y_2	a_0 / y_1
x_2	a_0/y_2	a_0 / y_1	$a_{3\,/}\,y_1$	a_2 / y_3

•

По этим таблицам можно найти реакцию автомата на любое входное слово.

Для автомата Мура:

$x_1\ x_2\ x_2\ x_2\ x_1$

$a_0\ a_2\ a_4\ a_1 a_4$

$y_2\ y_1\ y_2\ y_1 y_2$

Для автомата Мили:

$x_1\ x_2\ x_2\ x_2\ x_1$

$a_0\ a_1\ a_0\ a_0\ a_0\ a_1$

$y_1\ y_1\ y_2\ y_2\ y_1$

Графический способ

Этот способ основан на использовании ориентированных связных графов. Вершины графов соответствуют состояниям автомата, а дуги – переходам между ними. Две вершины графа a_i и a_s соединяются дугой, направленной от a_i к a_s, если в автомате имеется переход из a_i в a_s, то есть $a_s = d(a_i, x_j)$. В автомате Мили (рис. 4.2) дуга отмечается входным сигналом x_j, под действием которого происходит этот переход, и выходным сигналом y_g, который возникает при переходе. Внутри кружочка, обозначающего вершину графа, записывается состояние автомата. В автомате Мура (рис. 4.3) в вершинах графа кроме состояния автомата отмечается соответствующий выходной сигнал, а дуга отмечается только входным сигналом x_j, под действием
которого происходит этот переход.

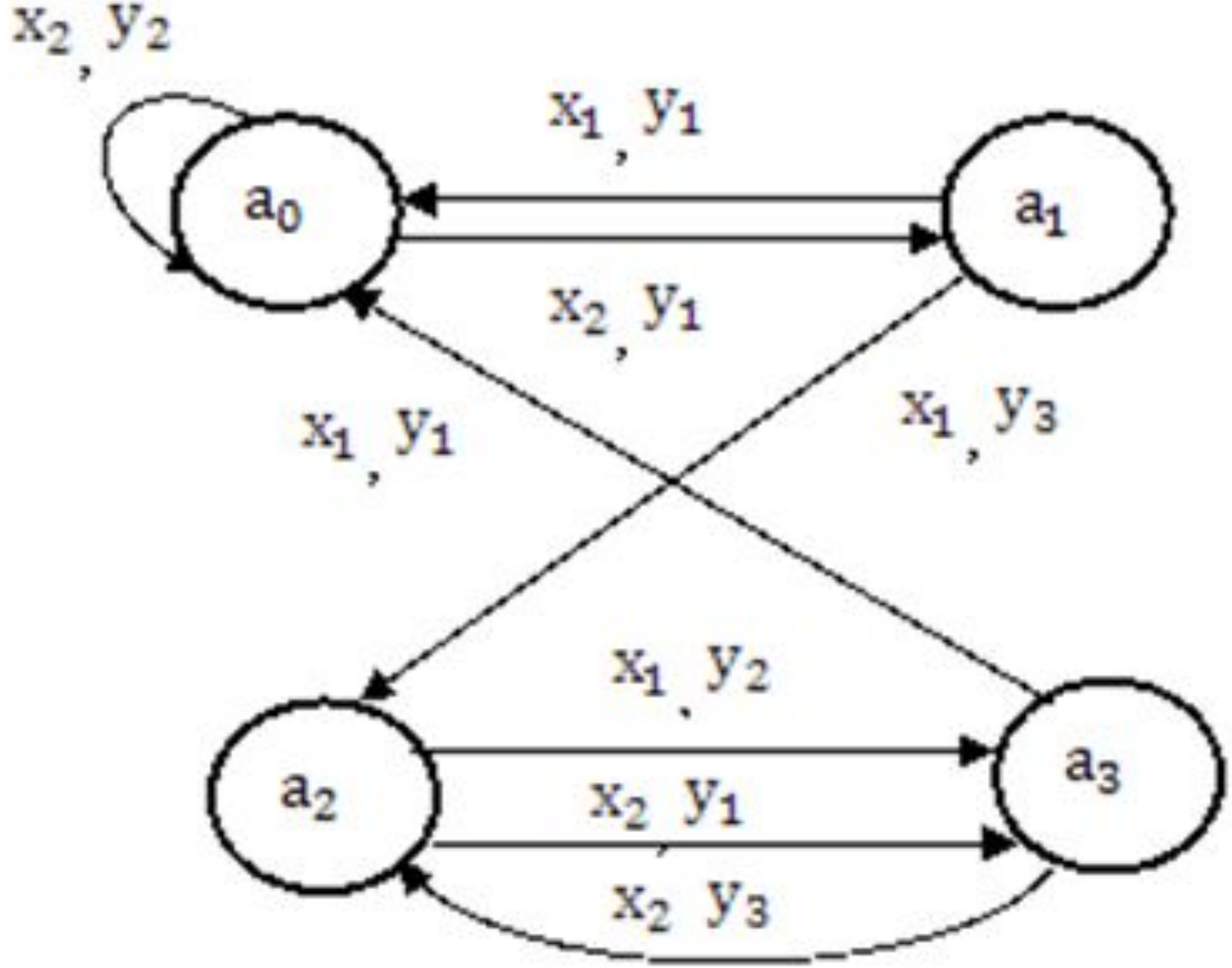


Рис. 4.2. Граф для автомата Мили

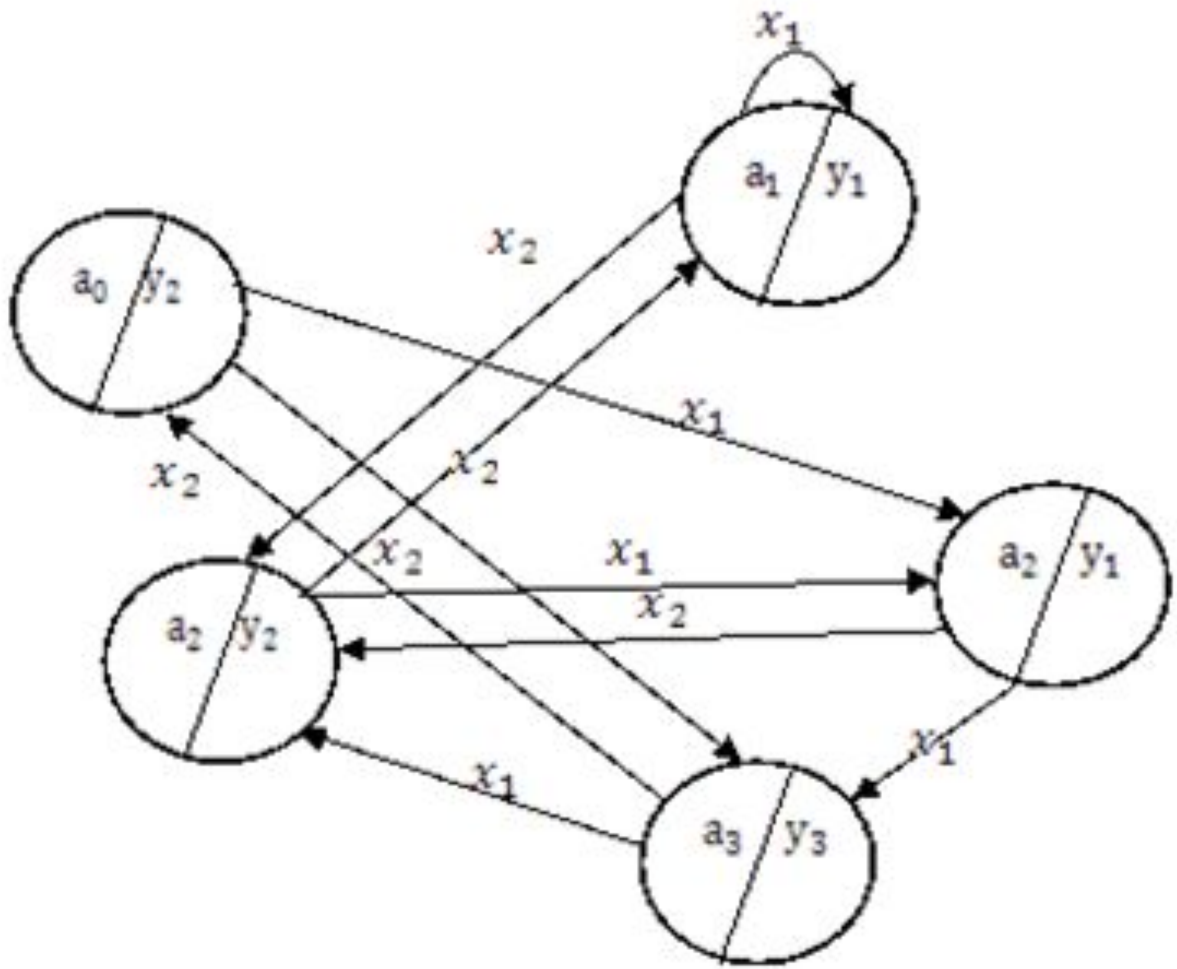
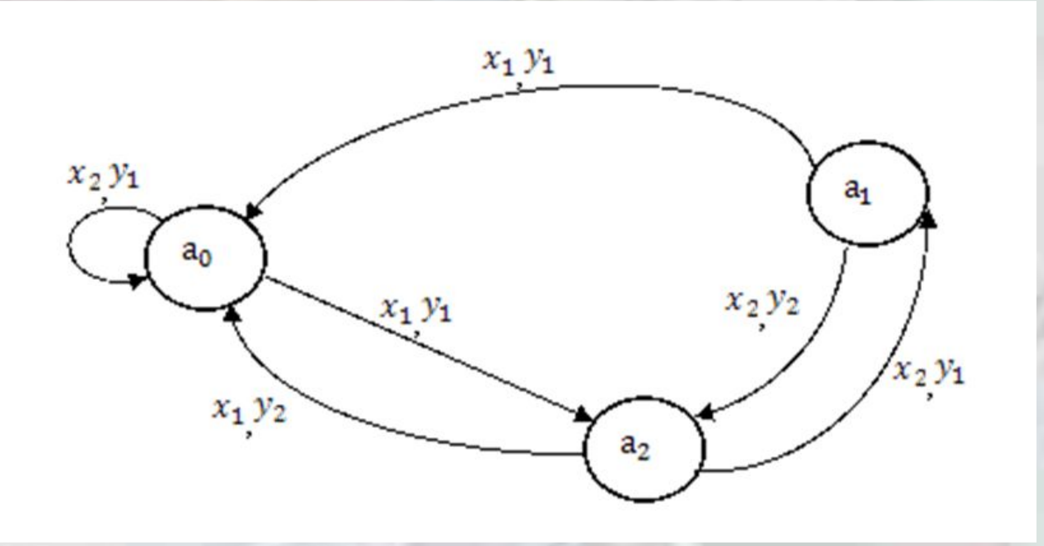


Рис. 4.3. Граф для автомата Мура

Преобразование автомата Мили в автомат Мура

Граф автомата Мили имеет вид:



В автомате Мили $X_a = \{x_1, x_2\}$, $Y_a = \{y_1, y_2\}$, $A_a = \{a_0, a_1, a_2\}$.

В эквивалентном автомате Мура $X_b = X_a = \{x_1, x_2\}$, $Y_b = Y_a = \{y_1, y_2\}$

Построим множество состояний A_b автомата Мура, для чего найдем множества пар, порождаемых каждым состоянием автомата S_a.

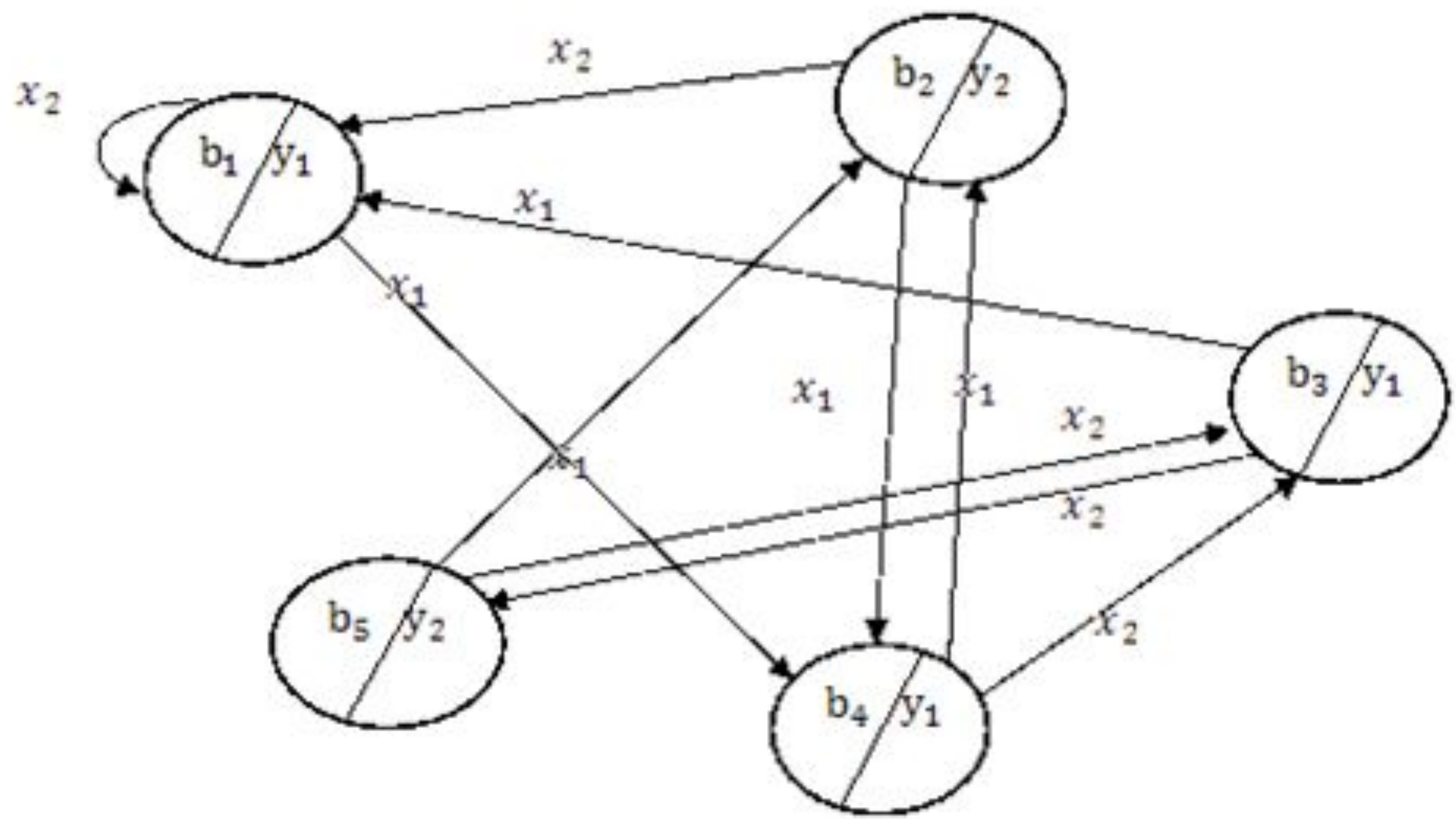
Состояние	Порождаемые пары
a_0	$\{(a_0, y_1), (a_0, y_2)\} = \{b_1, b_2\}$
a_1	$\{(a_1, y_1)\} = \{b_3\}$
a_2	$\{(a_2, y_1), (a_2, y_2)\} = \{b_4, b_5\}$

Отсюда имеем множества A_b состояний автомата Мура $A_b = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Для нахождения функции выходов l_b с каждым состоянием, представляющим собой пару вида (a_i, y_g), отождествим выходной сигнал, являющийся вторым элементом этой пары. В результате имеем:

$l_b(b_1) = l_b(b_3) = l_b(b_4) = y_1$; $l_b(b_2) = l_b(b_5) = y_2$.

- Построим функцию переходов d_b. Так как в автомате S_a из состояния a_0 есть переход под действием сигнала x_1 в состояние a_2 с выдачей y_1,то из множества состояний $\{b_1, b_2\}$, порождаемых a_0, в автомате S_b должен быть переход в состояние $(a_2, y_1) = b_4$ под действием сигнала x_1. Аналогично, из $\{b_1, b_2\}$ под действием x_2должен быть переход в $(a_0, y_1) = b_1$. Из $(a_1, y_1) = b_3$ под действием x_1 переход в $(a_0, y_1) = b_1$, а под действием x_2 – в $(a_2, y_2) = b_5$. Наконец из состояний $\{(a_2, y_1), (a_2, y_2)\} = \{b_4, b_5\}$ под действием x_1 в $(a_0, y_2) = b_2$, а под действием x_2 – в $(a_1, y_1) = b_3$. В результате имеем граф (рис. 7.11) и таблицу переходов эквивалентного автомата Мура.

Граф эквивалентного автомата Мура



В качестве начального состояния автомата S_b можно взять любое из состояний b_1 или b_2, так как оба порождены состоянием a_0 автомата S_a.

y_g	y_1	y_2	y_1	y_1	y_2
$x_j \backslash b_j$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
x_1	b_4	b_4	b_1	b_2	b_2
x_2	b_1	b_1	b_5	b_3	b_3

Переход от автомата Мура к автомату Мили

Пусть дан автомат Мура $S_b = \{A_b, X_b, Y_b, d_b, l_b\}$. Необходимо построить эквивалентный ему автомат Мили $S_a = \{A_a, X_a, Y_a, d_a, l_a\}$.

По определению эквивалентности имеем $X_a = X_b$; $Y_a = Y_b$. Кроме того, $A_a = A_b$, $d_a = d_b$. Остается только построить функцию выходов. Если в автомате Мура $d_b(a_i, x_j) = a_s$, а $l_b(a_s) = y_g$, то в автомате Мили $l_a(a_i, x_j) = y_g$. Другими словами: $l(a_i, x_j) = l_b(d_b(a_i, x_j))$. Таким

образом, таблица переходов автоматов Мили и Мура совпадают. А таблица выходов эквивалентного автомата Мили строится так, что в каждую клетку таблицы записывается выходной сигнал, которым отмечено состояние, расположенное в данной клетке.

Дан автомат Мура

$x_j \backslash y_i$	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
$x_j \backslash a_i$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_1	a_4	a_4	a_2	a_2
x_2	a_3	a_1	a_1	a_0	a_0

Тогда эквивалентный ему автомат Мили имеет следующую совмещенную таблицу переходов и выходов:

$x_j \backslash a_i$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	$a_1 \backslash y_1$	$a_4 \backslash y_3$	$a_4 \backslash y_3$	$a_2 \backslash y_3$	$a_2 \backslash y_3$
x_2	$a_3 \backslash y_2$	$a_1 \backslash y_1$	$a_1 \backslash y_1$	$a_0 \backslash y_1$	$a_0 \backslash y_1$