Множество комплексных чисел

*Выполнила работу:
студентка группы ГТ-11,
Бикназарова А.А.*

Определение комплексного числа

Комплексные числа называются числа вида:

$$z = x + i\ y,$$

где x и y - действительные числа.

Мнимая единица

Мнимая единица — число, квадрат которого равен −1.

Таким образом *i* —это решение уравнения $\boxed{x^2+1=0,}$ или $\boxed{x^2=-1.}$

Степени *i* повторяются в цикле:

$i^4=1$, $i^3=-i$,$i^2=-1$,

$i^{-2}=-1$, $i^{-3}=i$.

Пример:

$$x^2+1=0$$

$$(x-i)(x+i)=0$$

Ответ: $x_1=i;\ x_2=-i$

Равные комплексные числа

Сравнение:

$x + yi = c + di$ означает, что $x = c$ и $y = d$

(два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части).

Комплексная плоскость

Рассмотрим координатную плоскость и поставим в соответствие каждому комплексному числу $a + bi$ точку с координатами (a, b).

Тогда устанавливается взаимно однозначное соответствие между полем $\mathbb{C}$ и множеством точек координатной плоскости. Координатную плоскость в этом случае будем называть комплексной плоскостью.

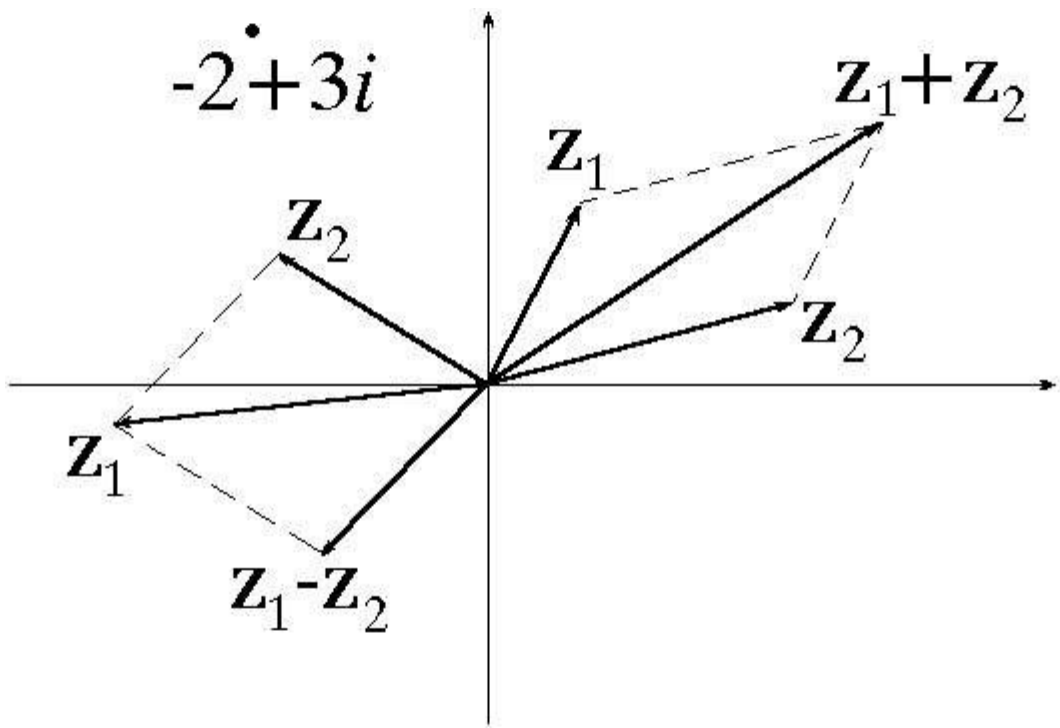
Ось абсцисс –вещественная ось, а ось ординат- мнимая ось.

С каждой точкой комплексной плоскости можно связать вектор, идущий из нуля в эту точку (радиус-вектор). Координаты этого вектора — вещественная и мнимая части его конца.

$$\Re e(z_1 + z_2) = \Re e z_1 + \Re e z_2$$
$$\Im m(z_1 + z_2) = \Im m z_1 + \Im m z_2.$$

Радиус-вектор числа $z_1 + z_2$ равен сумме радиус-векторов чисел z_1 и z_2 .

Аналогично с вычитанием.


-2+3i
z1+z2
z1
z2
z2
z1
z1-z2

Комплексно-сопряженные

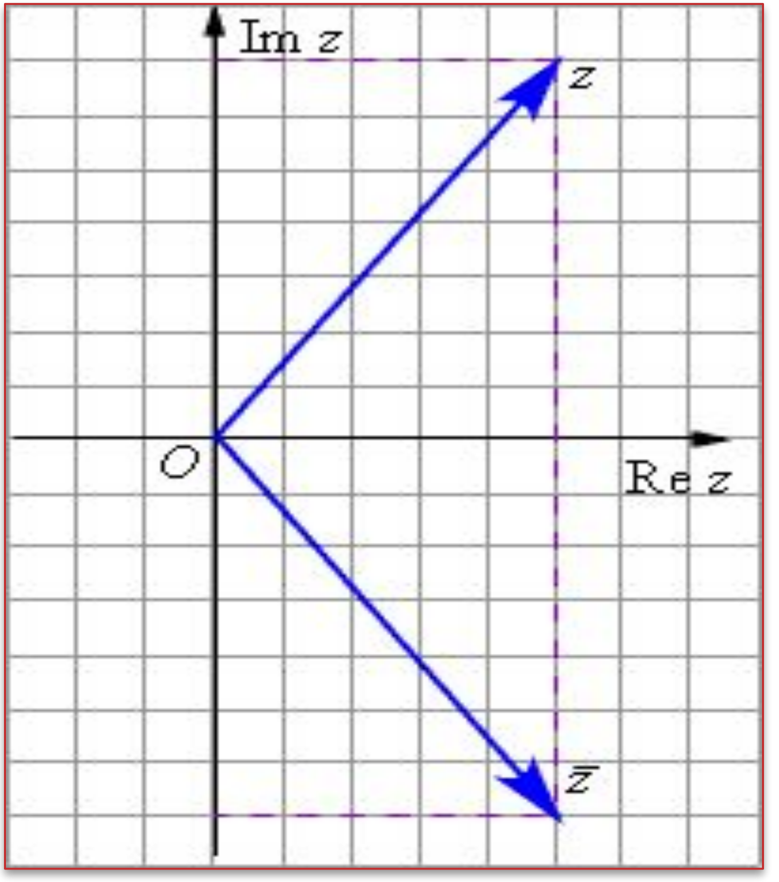
Комплексное число

$$\bar{z} = x - iy$$

называется сопряженным числу

$$z = x + iy.$$

Два комплексных числа, отличающиеся лишь знаком комплексной части, называются комплексно-сопряженными .



Im z
z
O
Re z
z̄

Пример №1:

Найдите число, сопряжённое к комплексному числу (1 + 2i)(3 – 4i).

Решение:

Имеем $z = (1 + 2i)(3 - 4i) = 3 + 8 + (6 - 4)i = 11 + 2i.$

Следовательно, $\bar{z} = 11 - 2i.$

Ответ. 11 – 2i.

Пример №2:

Вычислите : $\frac{1+2i}{2-i}$.

Решение:

Имеем $$\frac{1+2i}{2-i}=\frac{1+2i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{2-2+i(4+1)}{4+1}=\frac{5i}{5}=i.$$

Ответ. i.

Алгебраическая форма

Запись комплексного числа в виде

$$z = x + iy$$

называется алгебраической формой комплексного числа.

Число x называют вещественной (реальной) частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначают $\operatorname{Re} z$.

Число y называют мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$ и обозначают $\operatorname{Im} z$.

Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x + yi$ и $z_2 = c + di$ называется комплексное число

$$z = (x+c) + (y+d)i.$$

Пример:

Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$

Тогда:

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (1 + 4i) = 3 + i,$$

Вычитание комплексных чисел

Разностью двух комплексных чисел $z1= a + bi$ и $z2= c + di$ называется комплексное число $x + yi$, которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое.

$$z = (x+yi) - (c+di) = (x-c) + (y-d)i.$$

Пример:

Пусть $z_1 = 2 - 3i$ $z_2 = 1 + 4i$,

Тогда:

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (1 + 4i) = 1 - 7i,$$

Произведение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел

$z_1 = x + yi$ и $z_2 = c + di$

называется комплексное число

$z = (xc - yd) + (xd + yc)i$,

$z_1 z_2 = (x + yi)(c + di) = (xc - yd) + (xd + yc)i$.

Пример:

Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$

Тогда:

$$z_1 z_2 = (2-3i)(1+4i) = 2 - 3i + 8i - 12i^2 = 2 + 5i + 12 = 14 + 5i,$$

Деление комплексных чисел

Деление комплексных чисел определяется, как домножение числителя на выражение, сопряженное знаменателю.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Результат определен для всех

$$c+di \neq 0 = 0+0i$$

Пример:

Пусть $z_1 = 2 - 3i$ $z_2 = , 1 + 4i$

Тогда:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\overline{z}_1}{z_1\overline{z}_1} = \frac{(1+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{4-9i^2} == \frac{2+11i-12}{4+9} = -\frac{10}{13} + \frac{11}{13}i.$$

Тригонометрическая форма

Если вещественную x и мнимую y части комплексного числа выразить через модуль $r = |z|$ и аргумент ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$), то всякое комплексное число z, кроме нуля, можно записать в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пример

Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ **в тригонометрической форме.**

Найдём модуль этого числа: $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

Аргумент данного числа находится из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Значит, один из аргументов числа $z = 1 - \sqrt{3}i$ равен $-\dfrac{\pi}{3}.$

Получаем: $$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Ответ. $$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Произведение и частное

Арифметические действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, производятся следующим образом. Пусть z1 = r1(cos φ1 + i sin φ1) и z2 = r2(cos φ2 + i sin φ2). Имеем:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Видно, что в тригонометрической форме операции умножения и деления производятся особенно просто: для того, чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) их аргументы.

Отсюда следует, что для того чтобы перемножить n комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы: если φ1, φ2, ..., φn – аргументы чисел z1, z2, ..., zn, то

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n,$$

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|.$$

Первая формула Муавра

В частности, если все эти числа равны между собой, то получим формулу, позволяющую возводить комплексное число в любую натуральную степень.

Первая формула Муавра:

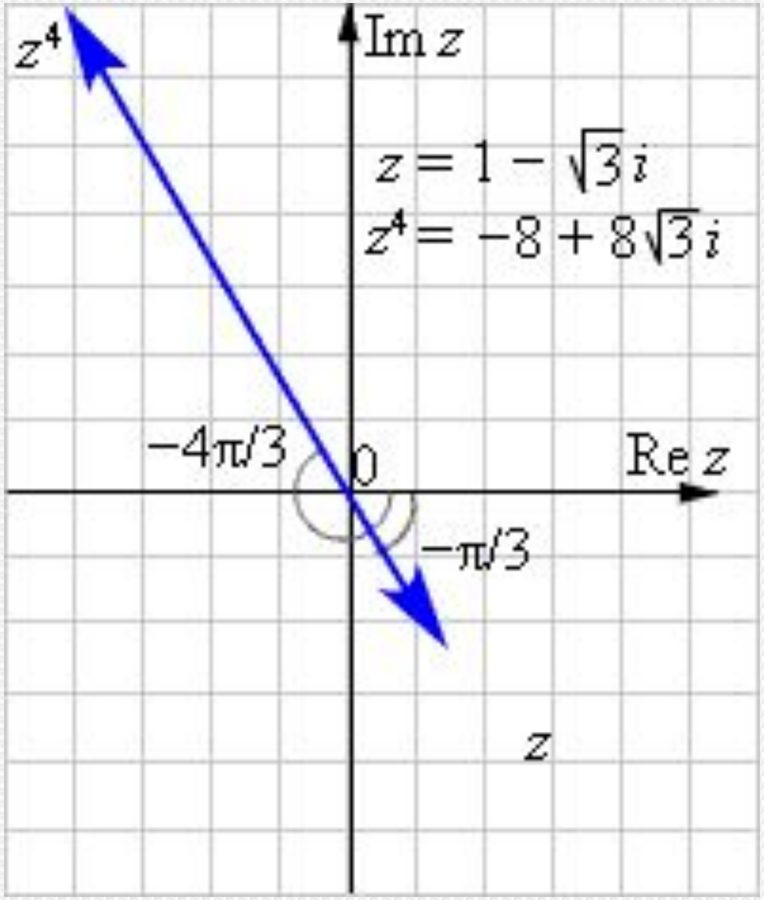
$$z^n = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Где r — модуль, а φ— аргумент комплексного числа.

Пример

Вычислить z^4, если $z = 1 - \sqrt{3}i.$

Рисунок



Как было найдено в предыдущем примере, данное число в тригонометрической форме имеет вид

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

По первой формуле Муавра получаем:

$$z^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^3\left(\sqrt{3}i - 1\right) = 8\left(\sqrt{3}i - 1\right).$$

Ответ. $8(\sqrt{3}i - 1).$

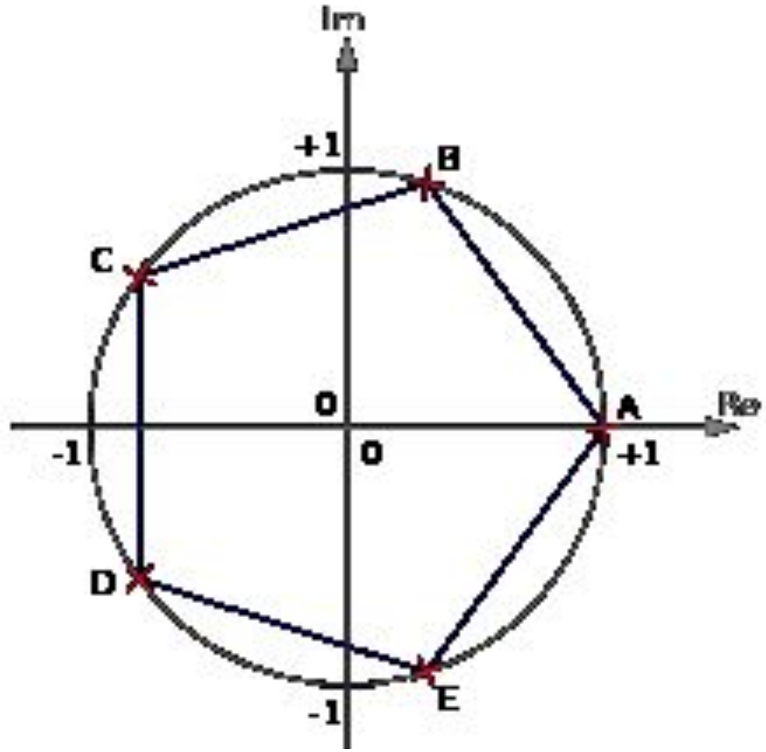
Аналогичная формула применима также и при вычислении корней n -ой степени из ненулевого комплексного числа:

$$z^{1/n} = [r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k))]^{1/n} =$$

$$= r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$$n > 1, k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Отметим, что корни n -й степени из ненулевого комплексного числа всегда существуют, и их количество равно n. На комплексной плоскости, как видно из формулы, все эти корни являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (см. рисунок).


Im
+1
B
C
0
A
Re
-1
0
+1
D
E
-1

Показательная форма

Показательная форма записи комплексных чисел, тесно связанна с тригонометрической через формулу Эйлера:

$$z = re^{i\varphi},$$

где $e^{i\varphi}$ — расширение экспоненты, для случая комплексного показателя степени.

Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

которая носит название формулы Эйлера.

Пусть комплексное число в тригонометрической форме имеет вид

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

На основании формулы Эйлера выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим $\boxed{z = re^{i\varphi}.}$

Эта запись называется показательной формой комплексного числа.

Так же, как и в тригонометрической форме, здесь $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Пример

Пусть $z = -1 + i$. Напишите показательную форму числа z.

Решение. Находим модуль и аргумент числа: $r = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$