



# *Множество комплексных чисел*

*Выполнила работу:  
студентка группы ГТ-11,  
Бикназарова А.А.*

# Определение комплексного числа

Комплексные числа называются числа вида:

$$z = x + i y,$$

где  $x$  и  $y$  - действительные числа.

# Мнимая единица

Мнимая единица — число, квадрат которого равен  $-1$ .

Таким образом  $i$  — это решение уравнения  $x^2 + 1 = 0$ , или  $x^2 = -1$ .

Степени  $i$  повторяются в цикле:

$$i^4 = 1, \quad i^3 = -i, \quad i^2 = -1, \\ i^{-2} = -1, \quad i^{-3} = i.$$

Пример:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$(x - i)(x + i) = 0$$

$$\text{Ответ: } x_1 = i; x_2 = -i$$

# Равные комплексные числа

Сравнение:

$x + yi = c + di$  означает, что  $x = c$  и  $y = d$

(два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части).

# Комплексная плоскость

Рассмотрим координатную плоскость и поставим в соответствие каждому комплексному числу  $a + bi$  точку с координатами  $(a, b)$ .

Тогда устанавливается взаимно однозначное соответствие между полем  $\mathbb{C}$  и множеством точек координатной плоскости. Координатную плоскость в этом случае будем называть **комплексной плоскостью**.

Ось абсцисс – вещественная ось, а ось ординат – мнимая ось.

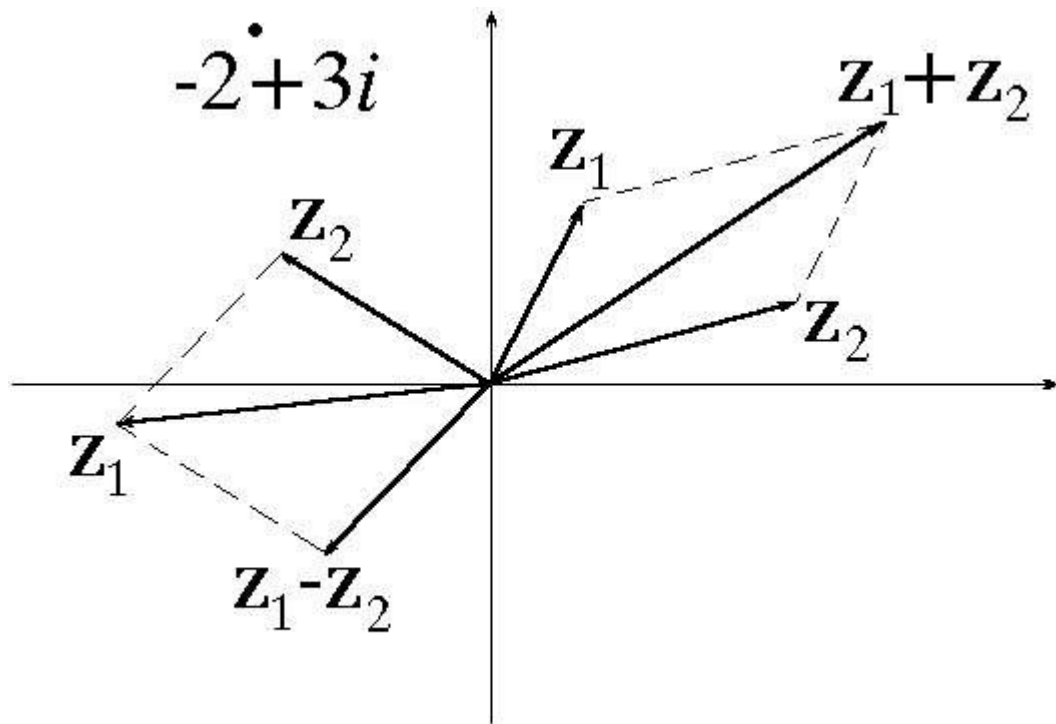
С каждой точкой комплексной плоскости можно связать вектор, идущий из нуля в эту точку (радиус-вектор). Координаты этого вектора — вещественная и мнимая части его конца.

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}z_1 + \operatorname{Re}z_2$$

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}z_1 + \operatorname{Im}z_2.$$

Радиус-вектор числа  $z_1 + z_2$  равен сумме радиус-векторов чисел  $z_1$  и  $z_2$ .

Аналогично с вычитанием.





# Комплексно-сопряженные

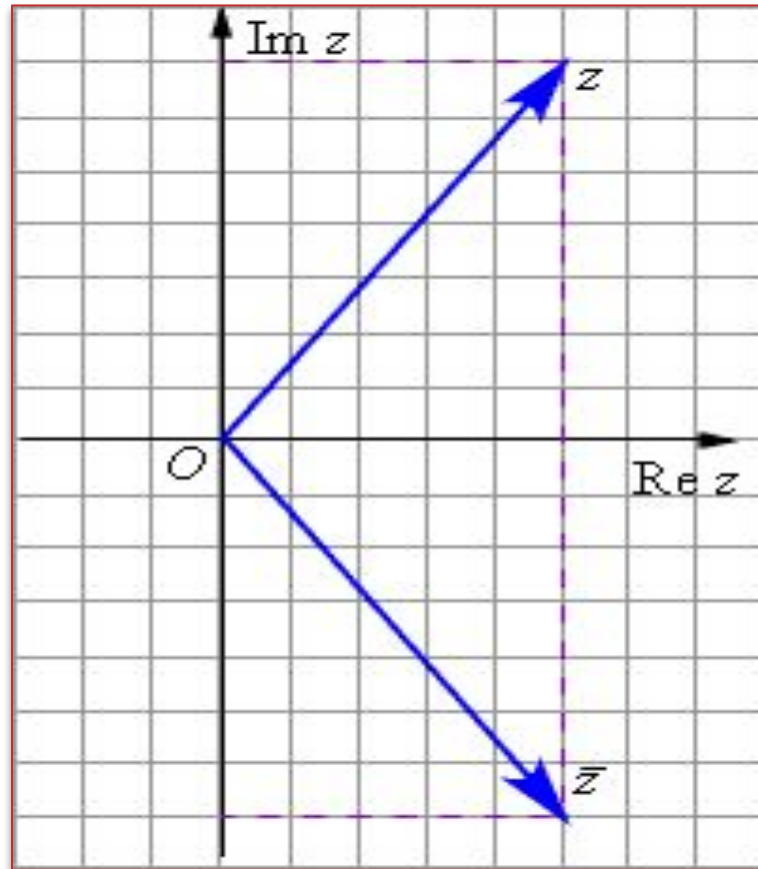
Комплексное число

$$\bar{z} = x - iy$$

называется сопряженным числу

$$z = x + iy.$$

Два комплексных числа, отличающиеся лишь знаком комплексной части, называются комплексно-сопряженными.



Пример №1:

Найдите число, сопряжённое к  
комплексному числу  $(1 + 2i)(3 - 4i)$ .

Решение:

Имеем  $z = (1 + 2i)(3 - 4i) = 3 + 8 + (6 - 4)i = 11 + 2i$ .

Следовательно,  $\bar{z} = 11 - 2i$ .

Ответ.  $11 - 2i$ .

Пример №2:

Вычислите :  $\frac{1 + 2i}{2 - i}$

Решение:

Имеем  $\frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{1 + 2i}{2 - i} \cdot \frac{2 + i}{2 + i} = \frac{2 - 2 + i(4 + 1)}{4 + 1} = \frac{5i}{5} = i.$

Ответ.  $i.$

# Алгебраическая форма

Запись комплексного числа в виде

$$z = x + iy$$

называется алгебраической формой комплексного числа.

Число  $x$  называют вещественной (реальной) частью комплексного числа

$$z = x + iy \quad \text{и обозначают } \operatorname{Re} z .$$

Число  $y$  называют мнимой частью комплексного числа  $z = x + iy$

и обозначают  $\operatorname{Im} z$  .

# Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел  $z_1 = x + yi$  и  $z_2 = c + di$  называется комплексное число

$$z = (x+c) + (y+d)i.$$

Пример:

Пусть  $z_1 = 2 - 3i$  ,  $z_2 = 1 + 4i$

Тогда:

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (1 + 4i) = 3 + i,$$

# Вычитание комплексных чисел

Разностью двух комплексных чисел  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = c + di$  называется комплексное число  $x + yi$ , которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое.

$$z = (x+yi) - (c+di) = (x-c) + (y-d)i.$$



Пример:

Пусть  $z_1 = 2 - 3i$      $z_2 = 1 + 4i$

Тогда:

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (1 + 4i) = 1 - 7i,$$

# Произведение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел

$$z_1 = x + yi \text{ и } z_2 = c + di$$

называется комплексное число

$$z = (xc - yd) + (xd + yc)i,$$

$$z_1 z_2 = (x + yi)(c + di) = (xc - yd) + (xd + yc)i.$$

Пример:

Пусть  $z_1 = 2 - 3i$  ,  $z_2 = 1 + 4i$

Тогда:

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + 4i) = 2 - 3i + 8i - 12i^2 = 2 + 5i + 12 = 14 + 5i,$$

# Деление комплексных чисел

Деление комплексных чисел определяется, как домножение числителя на выражение, сопряженное знаменателю.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Результат определен для всех

$$c + di \neq 0 = 0 + 0i$$

Пример:

Пусть  $z_1 = 2 - 3i$      $z_2 = 1 + 4i$

Тогда:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{(1 + 4i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 8i + 3i + 12i^2}{4 - 9i^2} = \frac{2 + 11i - 12}{4 + 9} = -\frac{10}{13} + \frac{11}{13}i.$$

# Тригонометрическая форма

Если вещественную  $x$  и мнимую  $y$  части комплексного числа выразить через модуль  $r = |z|$  и аргумент ( $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ), то всякое комплексное число  $z$ , кроме нуля, можно записать в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

# Пример

Записать число  $z = 1 - \sqrt{3}i$  в тригонометрической форме.

Найдём модуль этого числа:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Аргумент данного числа находится из системы

Значит, один из аргументов числа равен  $-\frac{\pi}{3}$ .

$$z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2}, \\ \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Получаем:

$$z = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

Ответ.

$$2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

# Произведение и частное

Арифметические действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, производятся следующим образом. Пусть  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$



Видно, что в тригонометрической форме операции умножения и деления производятся особенно просто: для того, чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) их аргументы.

Отсюда следует, что для того чтобы перемножить  $n$  комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы: если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  – аргументы чисел  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n,$$

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|.$$

# Первая формула Муавра

В частности, если все эти числа равны между собой, то получим формулу, позволяющую возводить комплексное число в любую натуральную степень.

## Первая формула Муавра:

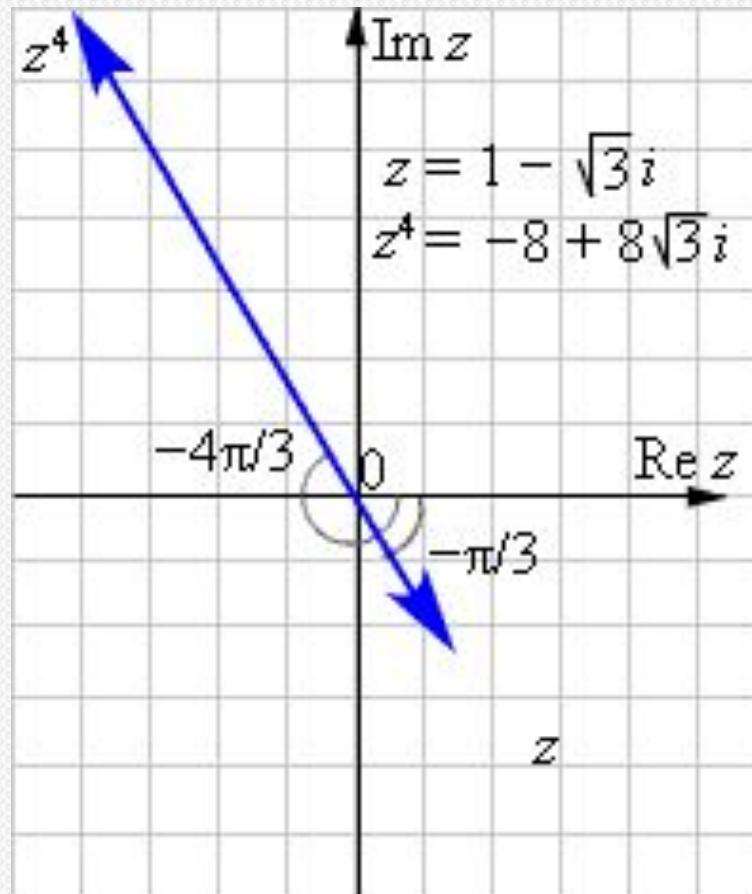
$$z^n = \left( r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \right)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Где  $r$  — модуль, а  $\varphi$  — аргумент комплексного числа.

# Пример

Вычислить  $z^4$ , если  $z = 1 - \sqrt{3}i$ .

Рисунок



Как было найдено в предыдущем примере, данное число в тригонометрической форме имеет вид

$$z = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

По первой формуле Муавра получаем:

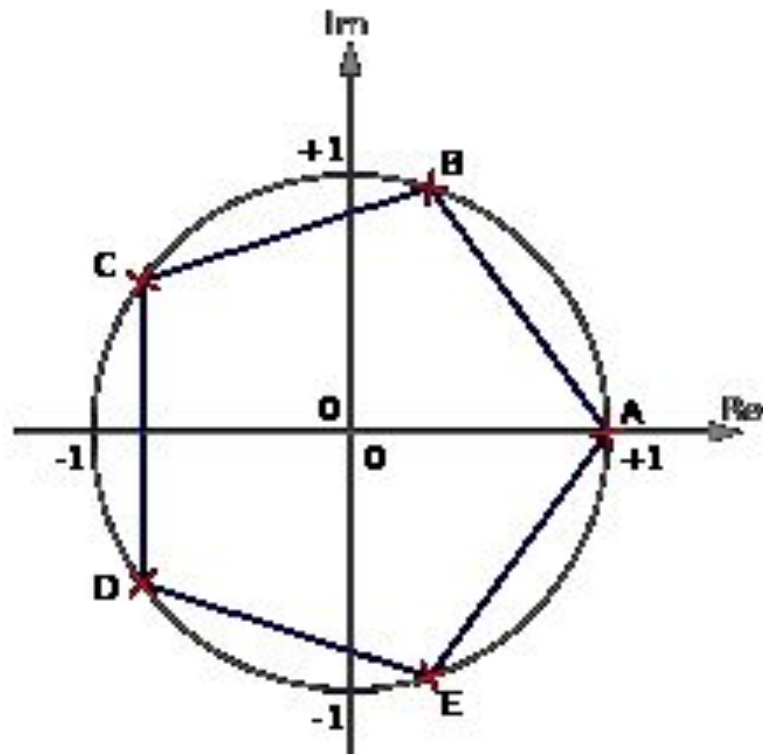
$$\begin{aligned} z^4 &= 2^4 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right)^4 = 2^4 \left( \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \\ &= 2^4 \left( -\cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2^4 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^3 (\sqrt{3}i - 1) = 8(\sqrt{3}i - 1). \end{aligned}$$

Ответ.  $8(\sqrt{3}i - 1)$ .

Аналогичная формула применима также и при вычислении корней  $n$ -ой степени из ненулевого комплексного числа:

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= [r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k))]^{1/n} = \\ &= r^{1/n} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \\ n &> 1, k = 0, 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Отметим, что корни  $n$ -й степени из ненулевого комплексного числа всегда существуют, и их количество равно  $n$ . На комплексной плоскости, как видно из формулы, все эти корни являются вершинами правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $\sqrt[n]{r}$  с центром в начале координат (см. рисунок).



# Показательная форма

*Показательная* форма записи комплексных чисел, тесно связанна с тригонометрической через формулу Эйлера:

$$z = re^{i\varphi},$$

где  $e^{i\varphi}$  — расширение экспоненты, для случая комплексного показателя степени.

Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

которая носит название **формулы Эйлера**.



Пусть комплексное число в тригонометрической форме имеет вид

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

На основании формулы Эйлера выражение в скобках можно заменить на показательное выражение. В результате получим

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Эта запись называется показательной формой комплексного числа.

Так же, как и в тригонометрической  
форме, здесь

$$\tau = |z|$$

$$, \varphi = \arg z .$$

# Пример

Пусть  $z = -1 + i$ . Напишите показательную форму числа  $z$ .

Решение. Находим модуль и аргумент числа:  $r = |z| = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}$ .

Следовательно, показательная форма комплексного числа такова:

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$