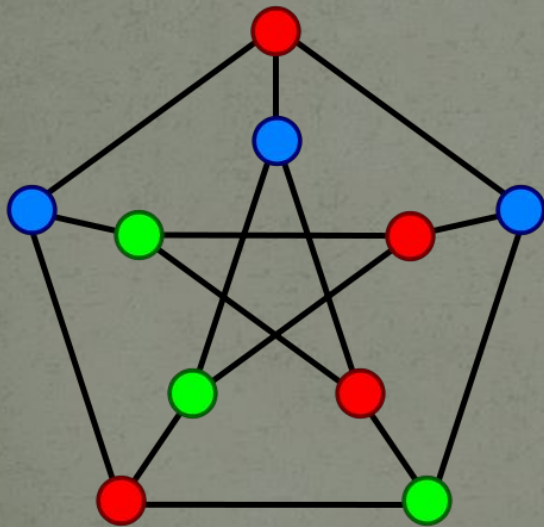


Задача о раскраска графа.  
Хроматические  
многочлены (полигоны).

# Хроматическое число

- Хроматическое число графа  $G$  — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа  $G$  так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Обозначается  $\chi(G)$ .



$$V = \bigcup_i C_i; C_i \cap C_j = \emptyset,$$



# Определение

- Хроматическое число графа — минимальное число  $k$ , такое что множество  $V$  вершин графа можно разбить на  $k$  непересекающихся классов, таких, что вершины в каждом классе независимы, то есть любое ребро графа не соединяет вершины одного и того же класса.
- Множество вершин графа называется независимым, если никакие две вершины этого множества не соединены ребром. Другими словами, индуцированный этим множеством подграф состоит из изолированных вершин. Иногда также говорят, что каждое ребро графа инцидентно не более чем одной вершине из независимого множества. Задача разрешения выглядит так: существует ли в заданном графе  $G$  независимое множество размера  $k$ ? Соответствующая ей оптимизационная задача, она же задача о независимом множестве, формулируется следующим образом: в заданном графе  $G$  требуется найти независимое множество максимального размера.

# Независимый набор из 9 голубых вершин.

- Иногда эту задачу называют поиском независимого множества максимального размера или максимального (по размеру) независимого множества. Не стоит путать это понятие с максимальным (по включению) независимым множеством, которое определяется как такое независимое множество вершин, что при добавлении к нему еще одной (любой) вершины исходного графа оно перестает быть независимым. Понятно, что таких множеств, вообще говоря, может быть несколько и разных размеров. Максимальное по включению независимое множество отнюдь не всегда является максимальным по размеру. В то же время, каждое независимое множество максимального размера по определению является также и максимальным по включению. Для нахождения (какого-то) максимального по включению независимого множества можно воспользоваться жадным алгоритмом, работающим за полиномиальное время, тогда как задача о независимом множестве максимального размера принадлежит к классу NP-полных задач.

$$I(u) = \max \left\{ 1 + \sum_{\text{grandchild } w \text{ of } u} I(w), \sum_{\text{child } w \text{ of } u} I(w) \right\},$$



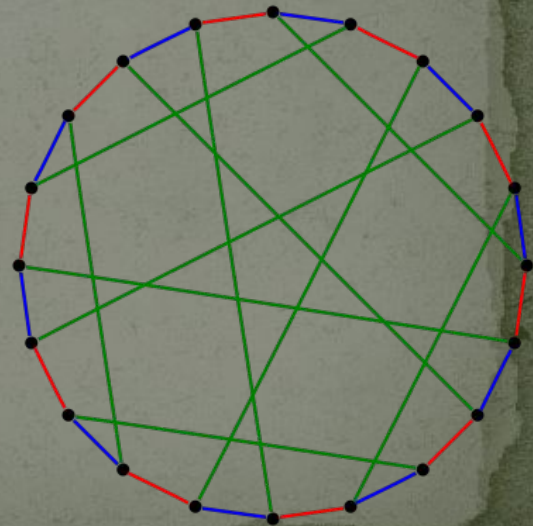


# Связанные определения

- $K$ -раскрашиваемый граф — граф, хроматическое число которого не превосходит  $K$ . То есть его вершины можно раскрасить  $K$  разными цветами так, что у любого ребра концы будут разного цвета.
- $K$ -хроматический граф — граф, хроматическое число которого равно  $K$ . То есть вершины графа можно раскрасить  $K$  цветами так, что у любого ребра концы будут разного цвета, но так раскрасить  $K - 1$  цветами — уже нельзя.

# Реберная раскраска

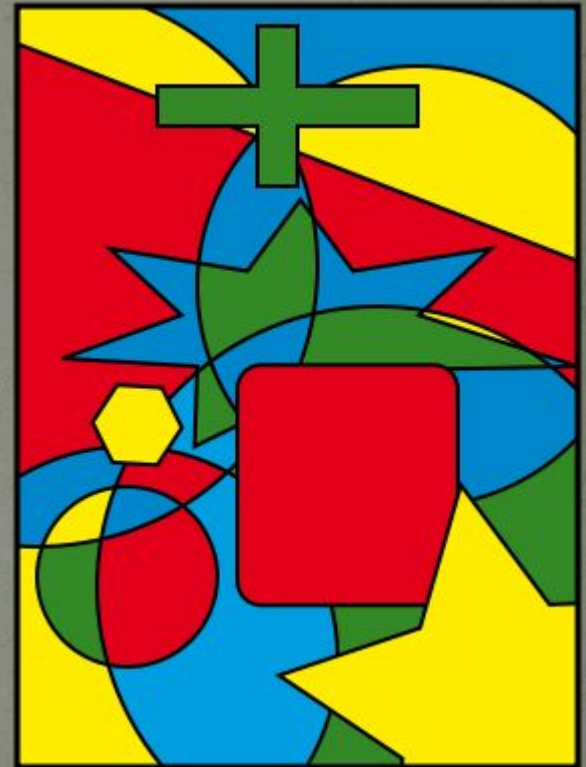
- Хроматический класс графа  $G$  — минимальное число цветов, в которые можно раскрасить ребра графа  $G$  так, чтобы смежные ребра имели разные цвета. Обозначается  $\chi'(G)$ . Проблема реберной раскраски произвольного плоского кубического графа без мостов тремя цветами эквивалентна знаменитой Проблеме четырех красок. Реберная раскраска определяет 1-факторизацию графа.





# Проблема четырёх красок

- Проблема четырёх красок — математическая задача, предложенная Ф. Гутри (англ.) в 1852 году. К. Appel и В. Хакен доказали в 1976 г., что так можно раскрасить любую карту. Это была первая крупная математическая теорема, для доказательства которой был применён компьютер. Несмотря на последующие упрощения, доказательство практически невозможно проверить, не используя компьютер. Поэтому некоторые математики отнеслись к этому доказательству с недоверием, что объяснялось не только использованием компьютера, но и громоздкостью описания алгоритма первых доказательств (741 страница), впоследствии были предложены более компактные алгоритмы и скорректирован ряд ошибок[1]. Проблема четырех красок является одним из известнейших прецедентов неклассического доказательства в современной математике.



# Хроматический многочлен

- Если рассмотреть количество различных раскрасок помеченного графа как функцию от доступного числа цветов  $t$ , то оказывается, что эта функция всегда будет полиномом от  $t$ . Этот факт был обнаружен Биркгофом и Льюисом [1] при попытке доказать гипотезу четырех красок.
- Треугольник  $K_3$   $t(t-1)(t-2)$
- Полный граф  $K_n$   $t(t-1)(t-2)\dots(t-(n-1))$
- Дерево с  $n$  вершинами  $t(t-1)^{n-1}$
- Цикл  $C_n$   $(t-1)^n + (-1)^n(t-1)$
- Граф Петерсена  $t(t-1)(t-2)(t^7 - 12t^6 + 67t^5 - 230t^4 + 529t^3 - 814t^2 + 775t - 352)$



# Нахождение хроматического многочлена произвольного графа

- Для графа-вершины хроматический многочлен равен  $t$   
 $|V(G)| = 1 \Rightarrow P(G, t) = t.$
- Хроматический многочлен графа равен произведению хроматических многочленов его компонент  
 $G_1 \cap G_2 = \emptyset \Rightarrow P((G_1 \cup G_2), t) = P(G_1, t)P(G_2, t).$
- Также существует рекуррентное соотношение
- $P(G, t) = P(G - (u, v), t) - P(G / (u, v), t),$
- где  $u$  и  $v$  — смежные вершины,  $G - (u, v)$  — граф, получающийся из графа  $G$  путем удаления ребра  $(u, v)$ , а  $G / (u, v)$  — граф, получающийся из графа  $G$  путем стягивания ребра  $(u, v)$  в точку.
- Можно использовать эквивалентную формулу  
 $P(G, t) = P(G + (u, v), t) + P(G \uparrow (u, v), t),$
- где  $u$  и  $v$  — несмежные вершины, а  $G + (u, v)$  — граф, получающийся из графа  $G$  путем добавления ребра  $(u, v)$ .
- [править]
- Свойства хроматического многочлена
- Для всех целых положительных  $t$   
 $P(G, t) \geq 0.$
- Хроматическое число  $\chi(G)$  — наименьшее целое положительное  $t$ , для которого
- $P(G, t) > 0.$

# Обобщения

- Также хроматическое число можно рассматривать для других объектов, например, для метрических пространств. Так, хроматическим числом плоскости называется минимальное число  $\chi$  такое, что существует раскраска всех точек плоскости в один из  $\chi$  цветов и при этом никакие две точки одного цвета не находятся на расстоянии 1 друг от друга (плоскость не содержит монохроматических отрезков длины 1). Аналогично для любой размерности пространства. Элементарно доказывається, что для плоскости  $4 \leq \chi \leq 7$  однако больше до сих пор неизвестно.



# Значение для теории графов

- Множество глубоких задач теории графов легко формулируются в терминах раскраски. Самая знаменитая из таких задач, проблема четырёх красок, в настоящее время решена, однако появляются новые, например, обобщение проблемы четырёх красок, гипотеза Хадвигера.

# Полный граф

- Полный граф — простой граф, в котором каждая пара различных вершин смежна. Полный граф с  $n$  вершинами имеет  $n(n - 1) / 2$  рёбер и обозначается  $K_n$ . Является регулярным графом степени  $n - 1$ .
- Графы с  $K_1$  по  $K_4$  являются планарными. Полные графы с большим количеством вершин не являются планарными, так как содержат подграф  $K_5$  и, следовательно, не удовлетворяют критерию Понтрягина-Куратовского.



# Дерево (теория графов)

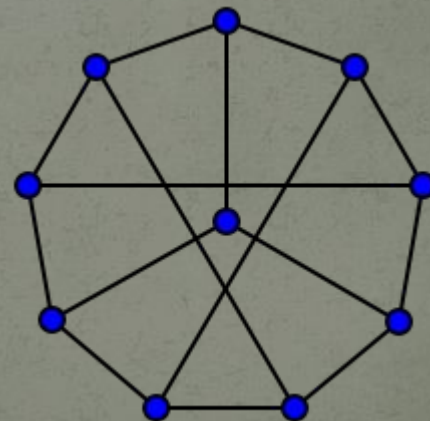
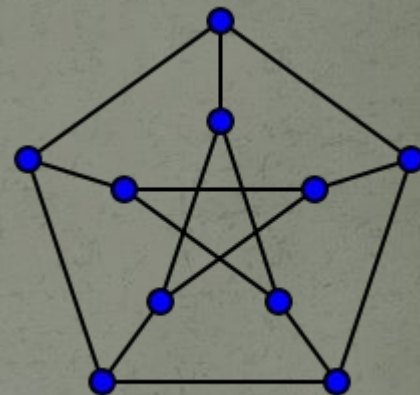
- Дерево — это связный граф (то есть такой граф, между любой парой вершин которого существует по крайней мере один путь), не содержащий циклов (то есть ациклический граф).[1] Ацикличность означает, что между любой парой вершин в дереве существует только один путь.
- Ориентированное (направленное) дерево — ациклический орграф (ориентированный граф, не содержащий циклов), в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода (в неё не ведут дуги), а все остальные вершины имеют степень захода 1 (в них ведёт ровно по одной дуге). Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются концевыми вершинами или листьями.[2]
- Формально дерево определяется как конечное множество  $T$  одного или более узлов со следующими свойствами:
- существует один корень дерева  $T$
- остальные узлы (за исключением корня) распределены среди непересекающихся множеств  $T_1, \dots, T_m$ , и каждое из множеств является деревом; деревья  $T_1, \dots, T_m$  называются поддеревьями данного корня  $T$

# Граф Петерсена

- Граф Петерсена — достаточно простой объект теории графов с интересными свойствами. Назван в Граф Петерсена является неориентированным кубическим графом. Его можно построить, взяв дополнение рёберного графа от полного 5-графа. Имеет 10 вершин и 15 рёбер. Сильно регулярен и рёберно регулярен, то есть, выбрав вершину или ребро можно отобразить граф на себя, переводя выбранный объект в любую вершину (ребро). Граф является клеткой и графом Мура. Его группа —  $S_5$ . Конфигурация Дезарга в проективной геометрии соответствует дополнению графа Петерсена и соответственно имеет ту же группу  $S_5$ .

Свойства:

- Не является гамильтоновым, в то же время, результат удаления вершины — гамильтонов граф.
- Хроматическое число графа — 3.
- Хроматический класс (раскраска рёбер) — 4, иными словами, граф не является суммой трех 1-факторов, что показал ещё сам Петерсен.[1]
- При изображении на плоскости имеет не менее двух самопересечений.
- Между любыми двумя вершинами существует единственный путь длины не более двух. честь Юлиуса Петерсена, датского математика.





# Литература

- О. Оре. Теория графов. Перевод с английского И. Н. Врублевской, под редакцией Н. Н. Воробьева. М.: Наука, 1986.
- [http://ru.wikipedia.org/wiki/Раскраска\\_графа](http://ru.wikipedia.org/wiki/Раскраска_графа)