

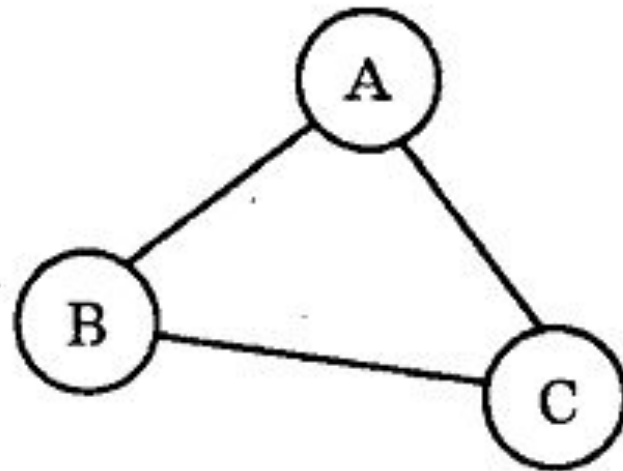
Задачи на графах

Граф — один из способов графического представления информации, отражающий количество объектов изучаемой системы и взаимосвязи между ними.

Объекты, отраженные в графе, представлены в нём как **вершины (узлы)** графа, а связи между ними — как **дуги (рёбра)**. Таким образом, граф представляет собой совокупность непустого множества вершин и множества связей между вершинами.

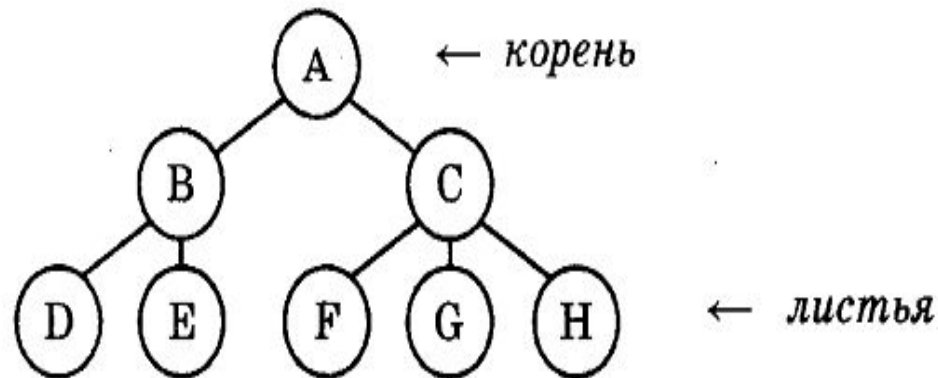
Количество вершин графа называют его **порядком**. Количество рёбер называют **размером** графа.

Путь (цепь) в графе — конечная последовательность вершин, каждая из которых (кроме последней) соединена со следующей ребром. **Циклом** называют путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Путь (или цикл) называют **простым**, если рёбра в нём не повторяются. Простой путь (цикл) называют **элементарным**, если вершины в нём не повторяются.



Дерево — граф, в котором существует один-единственный путь между любой парой вершин и не имеется ни одного цикла. Одна из вершин дерева (его **корень**) не имеет входящих в неё дуг, а все остальные вершины имеют ровно одну входящую дугу. При этом вершины, не имеющие исходящих из них дуг, называются **листьями**.

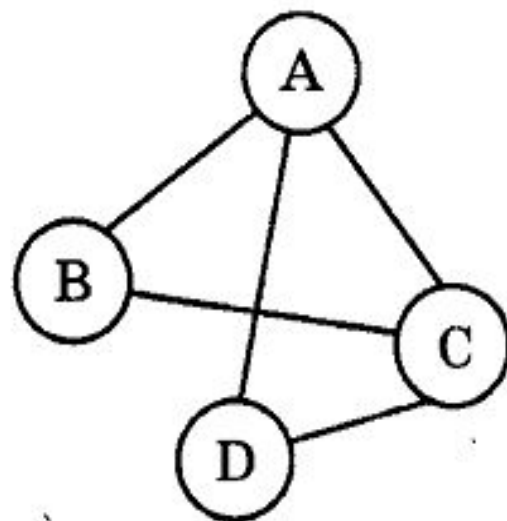
Пример дерева:



Способы представления графов

1. Графический способ — изображение графа.

Пример:



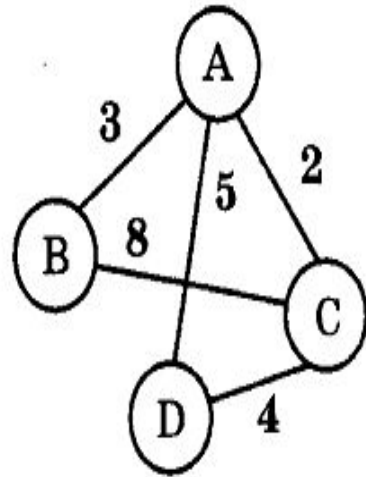
2. Список ребер – перечисление всех ребер графа как пар обозначений связываемых этими ребрами вершин.

Пример: {A,B}, {A,D}, {A,C}, {B,C}, {C,D}

3. **Матрица смежности** — квадратная симметричная таблица (матрица), в которой и столбцы, и строки соответствуют вершинам графа, а в ячейках на их пересечении записываются числа, обозначающие наличие или отсутствие связей между соответствующими парами вершин (обычно — количество связей между вершинами).

В простейшем случае, когда граф не имеет кратных рёбер и петель, матрица смежности содержит единицы для ячеек, соответствующих парам вершин, связанных ребром, и нули — для несвязанных вершин.

Пример:



	A	B	C	D
A		3	2	5
B	3		8	
C	2			4
D	5		4	

Разбор задач:

Задача 1. Между городами A, B, C, D, E, F проложены дороги, протяжённость которых указана в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что дороги между соответствующими пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F
A				1	4	3
B			4			5
C		4		2	1	
D	1		2			2
E	4		1			
F	3	5		2		

Определите длину кратчайшего пути между городами A и B (передвигаться можно только по имеющимся дорогам).

1) 6

2) 7

3) 8

4) 9

Решение

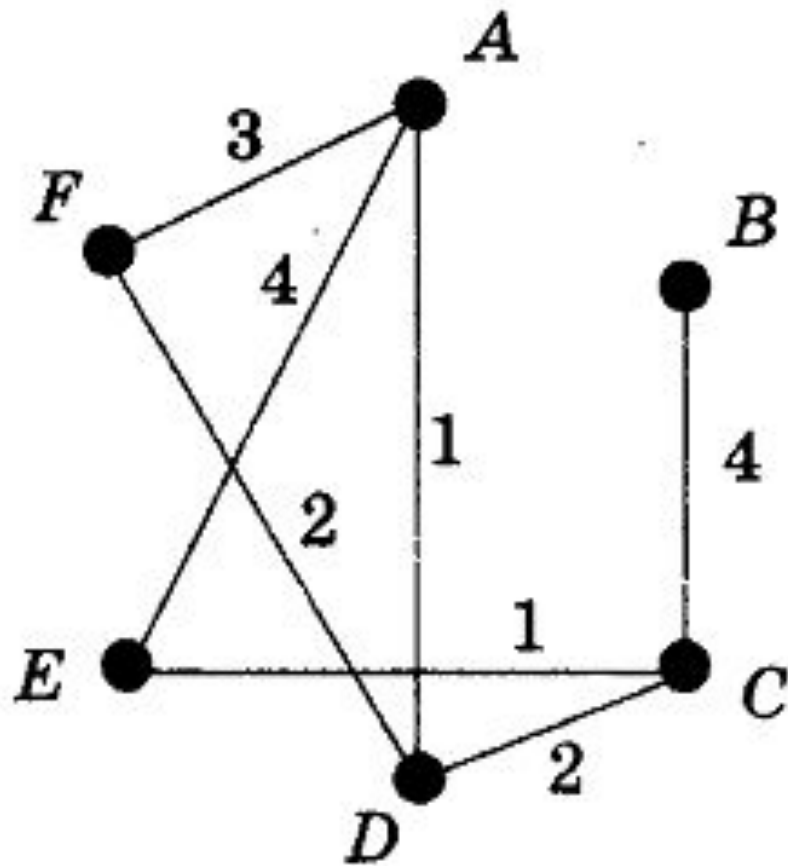
Задача на построение графа. Вершинами искомого графа являются названия городов от А до F, ребра определяются наличием в таблице чисел, указывающих весА этих ребер.

Для построения графа достаточно разместить точки А, В, С, D, Е, F и соединить их линиями.

Данный граф является ориентированным или неориентированным?

Неориентированный граф, т.к. в условии задачи не указано, что нужно двигаться в каком-то направлении.

Получается граф вида:



Остаётся перебрать все возможные пути от вершины A к вершине B :

1) $AFDCB$ — длина пути: $3 + 2 + 2 + 4 = 11$;

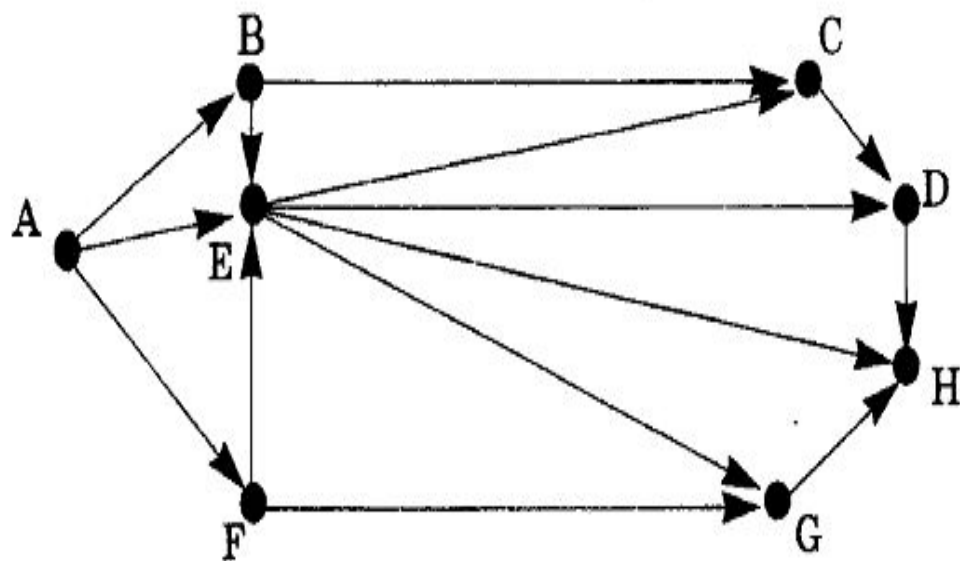
2) $AECB$ — длина пути: $4 + 1 + 4 = 9$;

3) $ADCB$ — длина пути: $1 + 2 + 4 = 7$.

Очевидно, что других путей прямо к вершине A нет. А из существующих самый короткий — путь $ADCB$ длиной 7 единиц.

Ответ: 7 (вариант ответа №2).

Задача 2. На рисунке показана схема дорог между городами А, В, С, D, E, F, G, H. По этим дорогам можно двигаться только в одном направлении, показанном стрелкой. Сколько возможно различных путей из города А в город H?

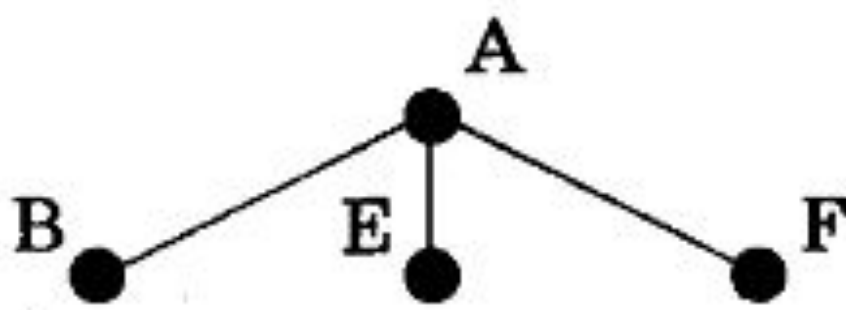


Граф является ориентированным или неориентированным?

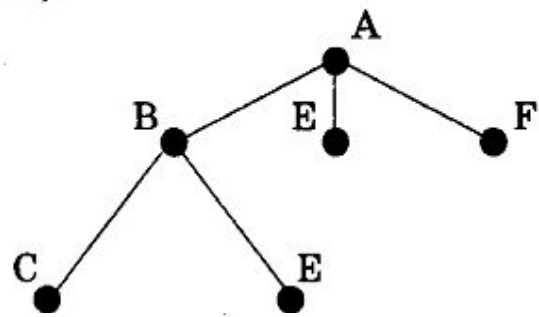
По данному графу нужно проследить все возможные пути от А до Н.

Для этого строятся вспомогательные деревья.

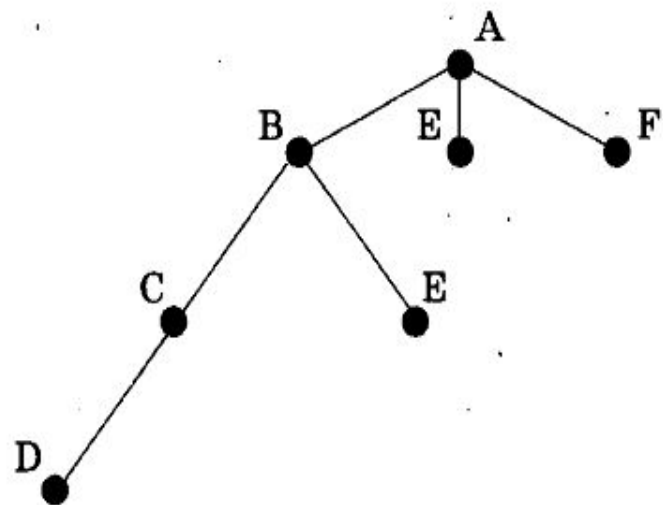
Построение начинается с вершины А. К каким вершинам ведут ребра исходного графа?



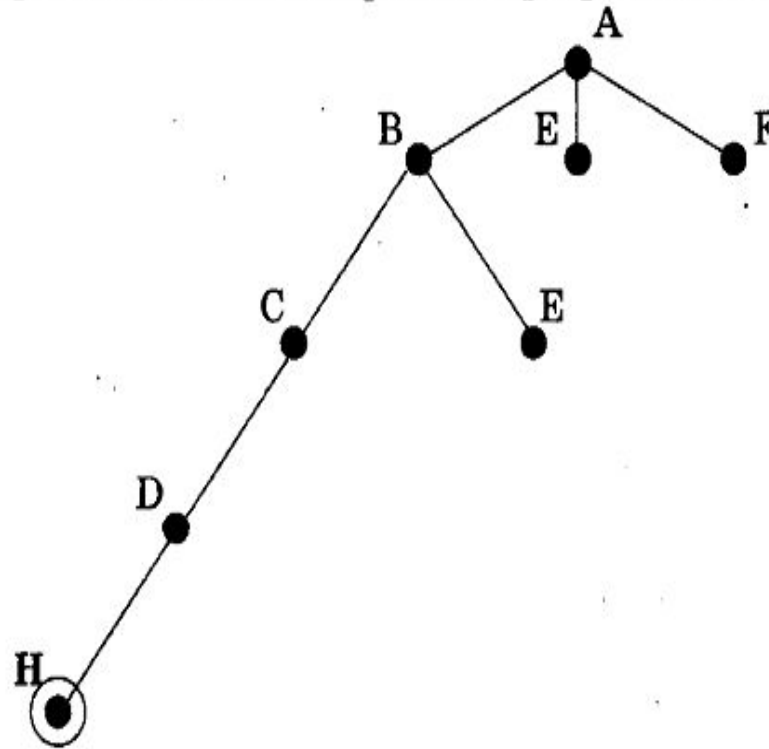
1) От вершины В можно проехать к вершинам С и Е, — рисуется от неё две ветви (а ветвь к вершине А уже нарисована ранее):



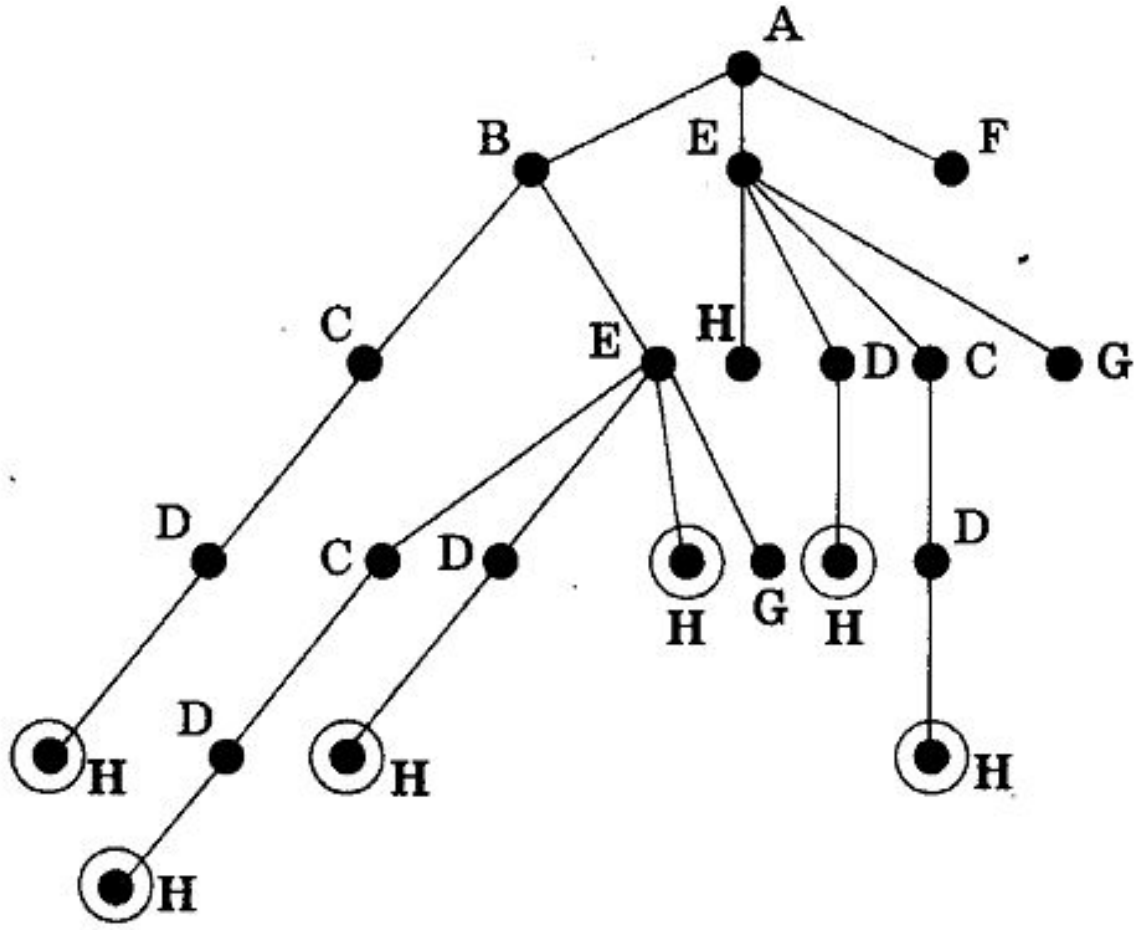
2) От вершины С можно проехать только к вершине D, — вычерчивается только одна ветвь-продолжение.



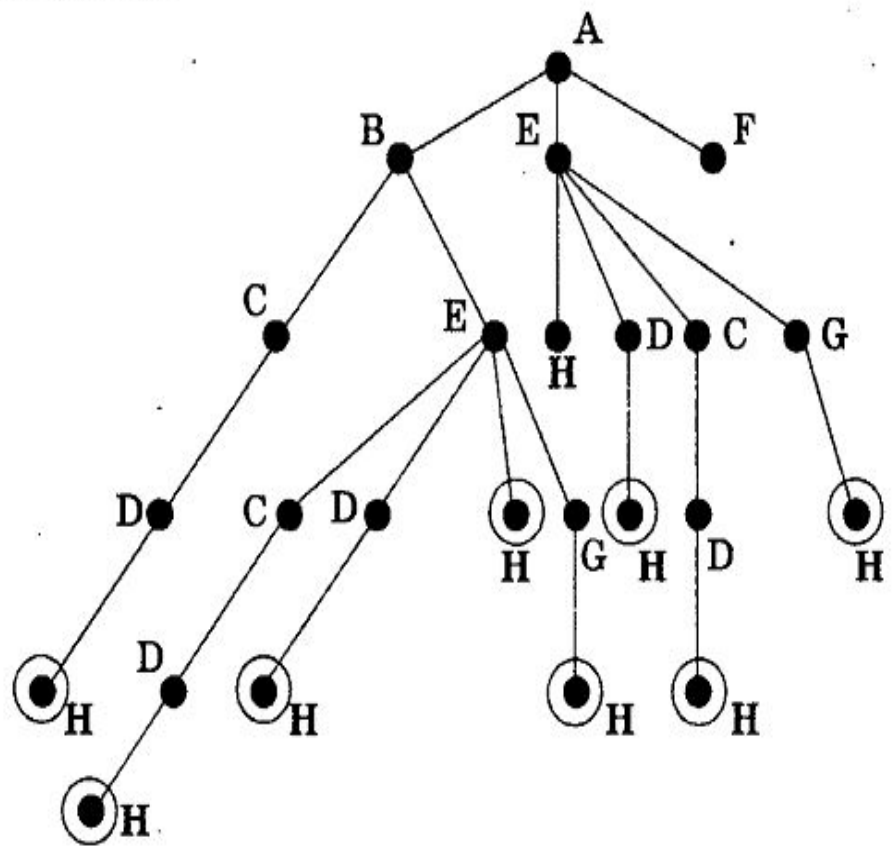
3) От вершины D можно попасть только в вершину H. Она является конечной целью путешествия, поэтому, например, помечается жирным шрифтом и обводится кружочком:



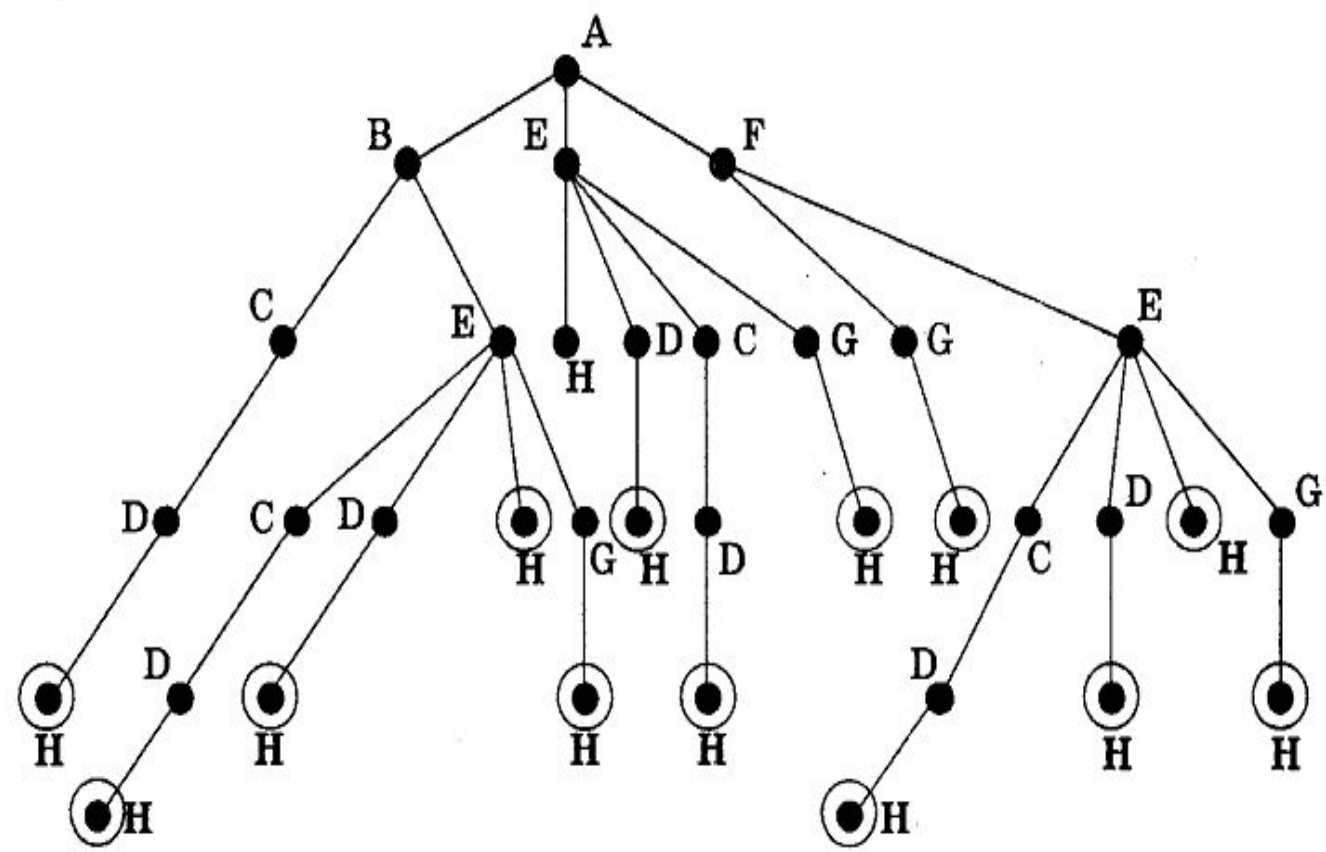
4) Учитывая, что в вершинах С и D дерево не имело ветвлений, возвращаемся к вершине Е. От неё, согласно заданной схеме, можно попасть в вершины С, D, H и G. Соответственно, вычерчивается в дереве такой «пучок» ветвей дважды, поскольку вершина Е в этом дереве уже повторена дважды. А затем для полученных вершин С и D дочерчиваются ветви к конечной вершине H и везде помечается эта вершина жирным шрифтом и обводится кружочком:



5) Теперь переходим к вершине G. Аналогично D, из неё можно попасть только в H. Дочерниваются соответствующие ветви:



б) Вернувшись к вершине F. Из неё можно попасть в вершины E и G, — чертятся эти ветви. От G можно перейти только в H, — рисуется эта ветвь. А от вершины E повторяется ещё раз «пучок» возможных путей. Полное дерево возможных путей от вершины A к вершине H тогда имеет вид:



Теперь, когда построенное дерево гарантирует, что не упущен ни один возможный вариант пути от А к Н, остаётся только подсчитать количество этих вариантов. Сделать это очень просто: достаточно подсчитать количество «концевых» вершин Н в этом дереве, которые за-
благовременно выделяется жирным шрифтом. Их 14 штук.

Ответ: 14 возможных вариантов пути.

Самостоятельное решение:

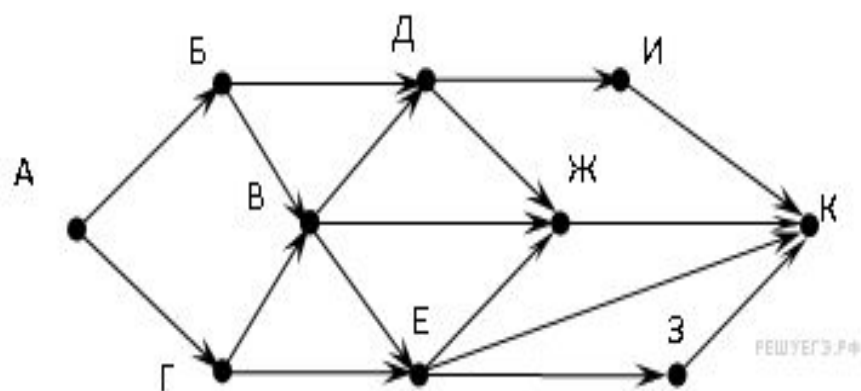
Задание 3 № 1006. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A		4				
B	4		6	3	6	
C		6			4	
D		3			2	
E		6	4	2		5
F					5	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

- 1) 9
- 2) 13
- 3) 14
- 4) 15

Задание 15 № 3295. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



<http://inf.reshuege.ru/test?theme=213>

Задачи по матрице смежности

<http://inf.reshuege.ru/test?theme=203>

Задачи по графам