# Задачи оптимизации

Преподаватель
Трофимова Виолетта Шамильевна
к.э.н., доцент кафедры
Математических методов в
экономике МГТУ им. Носова

# *Исследование операций*

*Исследование операций* — научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

Цель исследования операций — *количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.*

При решении задачи управления применение методов исследования операций предполагает:

- построение экономических и математических *моделей* для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;
- изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

# Примеры задач исследования операций

Задача 1. Для обеспечения высокого качества выпускаемых изделий на заводе организуется система выборочного контроля. Требуется выбрать такие формы его организации — например, назначить размеры контрольных партий, указать последовательность контрольных операций, определить правила отбраковки, — чтобы обеспечить необходимое качество при минимальных расходах.

Задача 2. Для реализации определенной партии сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать параметры сети — число точек, их размещение, количество персонала — так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

Задача 3. Металлургический комбинат имеет 4 доменных печи. Производимый ими чугун транспортируется в 4 сталеплавильных цеха. Известны значения расходных коэффициентов чугуна, показывающих, сколько тонн чугуна из каждой доменной печи расходуется на производство одной тоны стали в каждом сталеплавильном цехе. Определить сколько нужно производить стали в каждом цехе и из чугуна какой доменной печи, так, чтобы прибыль от производства была максимальной.

# Основные понятия

*Операция* - любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели.

Результат операции зависит от способа её проведения и организации, т.е. выбора определенных параметров.

Всякий определенный выбор параметров называется *решением*.

*Оптимальным решением* считают те, которые по тем или иным соображениям лучше других.

# Основные понятия

*Модель операции* — это достаточно точное описание операции с помощью математического аппарата (различного рода функций, уравнений, систем уравнений и неравенств и т.п.)

*Эффективность операции* - степень ее приспособленность к выполнению задачи - количественно выражается в виде критерия эффективности - целевой функции.

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

$\alpha_j$ *– постоянные факторы (условия проведения операции)*

$x_i$ *– зависимые факторы (элементы решения)*

# Классификация моделей исследования операций

Все модели исследования операций могут быть классифицированы в зависимости от природы и свойств операции, характера решаемых задач, особенностей применяемых математических методов.

Классы задач:

- *Оптимизационные задачи*
- *Задачи сетевого планирования и управления*
- *Задачи массового обслуживания*
- *Задачи управления запасами*
- *Задачи распределения ресурсов*
- *Задачи ремонта и замены оборудования*
- *Задачи составления расписания (календарного планирования)*
- *Задачи планировки и размещения*
- *Задачи выбора маршрута,* или сетевые задачи
- *Задачи принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях (игровые модели)*
- *Многокритериальные задачи исследования операции и т.д.*

# Оптимизационные задачи

Общая постановка задачи оптимизации:

Найти переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ которые удовлетворяют системе неравенств (уравнений)

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

и обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to max\ (min)$$

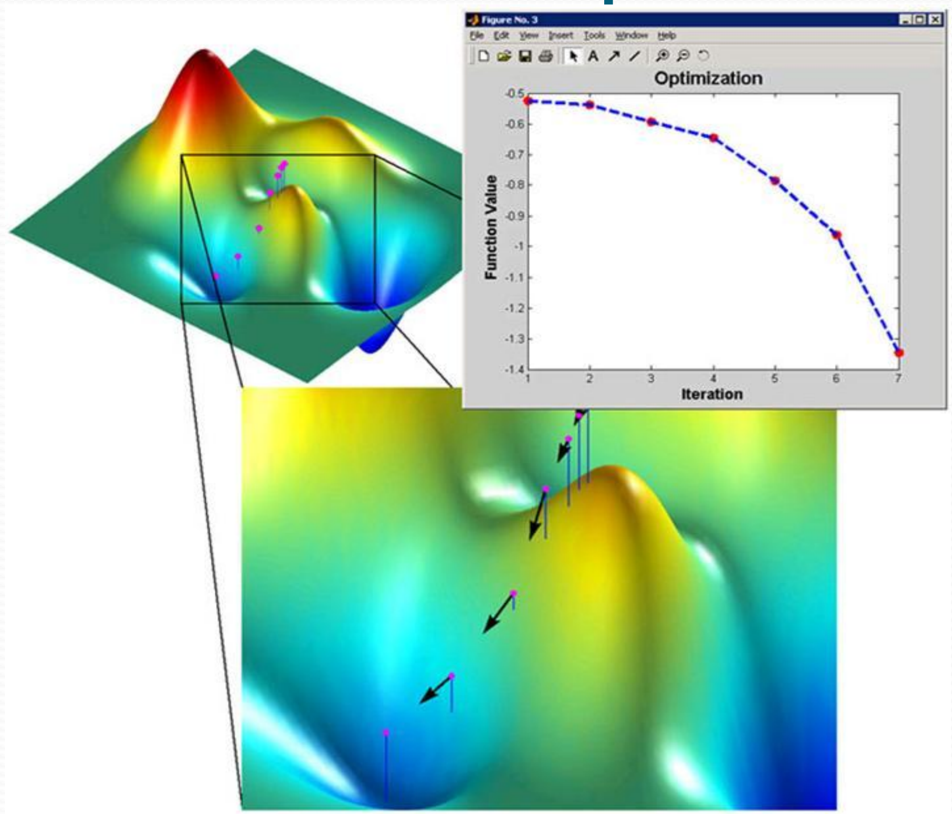
Решением является точка n-мерного пространства

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$$

# Классификация методов решения задач оптимизации

- классические методы оптимизации
- методы математического программирования
  - *линейного*
  - *целочисленного линейного*
  - *нелинейного*
  - *выпуклого*
  - *динамического*
  - *геометрического*
  - *параметрического*
  - *стохастического*
  - *эвристического*

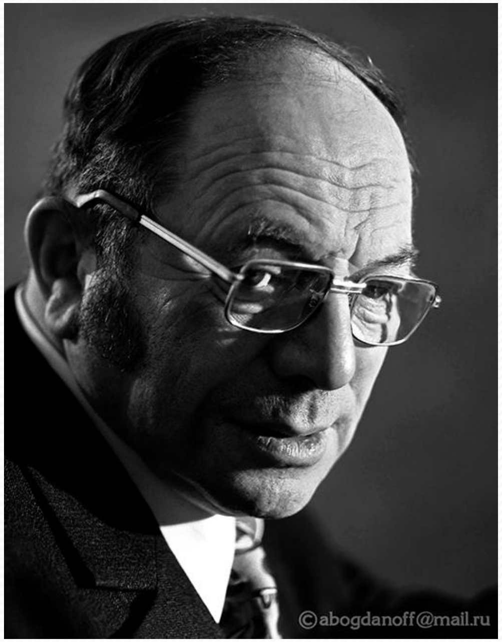
*программирования*



# Основоположники исследования операций

российские ученые: Л. В. Канторович, Н.П. Бусленко, Е.С. Вентцель, Н.Н. Воробьев, Н.Н. Моисеев, Д.Б. Юдин и многие другие

зарубежные ученые: Р. Акоф, Р. Беллман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Саати, Р. Черчмен, А. Кофман и др.




**Леонид Витальевич Канторович**

(6 (19) января 1912, Санкт-Петербург — 7 апреля 1986, Москва) — советский математик и экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года (с Т. Купманс (1910-1985, родился в Нидерландах, работал в основном в США) «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Пионер и один из создателей линейного программирования.

# Линейное программирование

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

***Общая постановка задачи линейного программирования***

Найти значения переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$, максимизирующие линейную форму

$$\max f(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{k}, \ (\mathrm{k} \le \mathrm{m})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \mathrm{i}=\mathrm{k}+1,\ldots,\mathrm{m} \qquad x_{\mathrm{j}} \ge 0, \ \mathrm{j}=1,\ldots,\mathrm{h} \ (\mathrm{h} \le \mathrm{n})$$

# Постановка задачи линейного программирования

Целевая функция: $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n \rightarrow \max$ ,

Ограничения:

$$
\begin{cases}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \le b_1 , \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \le b_2 , \\
\ldots . \\
a_{k\,1} X_1 + a_{k\,2} X_2 + \ldots + a_{k\,n} X_n \le b_k , \quad k \le m \\
a_{k+1\,1} X_1 + a_{k+1\,2} X_2 + \ldots + a_{k+1\,n} X_n = b_{k+1} , \\
\ldots .. \\
a_{m\,1} X_1 + a_{m\,2} X_2 + \ldots + a_{m\,n} X_n = b_m ,
\end{cases}
$$

Условие неотрицательности: $X_1 \ge 0$ , $X_2 \ge 0, \ldots, X_h \ge 0$ , $h \le n$ .

Искомые переменные: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

# Примеры задач линейного программирования:
## планирование производства или использования ресурсов

**Задача 1**

Цех может производить стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола - 20 единиц (футов красного дерева). Стул требует 10 человеко-часов, стол - 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула - 45 долларов США, при производстве стола - 80 долларов США. Сколько надо сделать стульев и столов, чтобы получить максимальную прибыль?

Математическая модель задачи имеет вид:

Обозначим: $X_1$ - число изготовленных стульев, $X_2$ - число сделанных столов.

Целевая функция: $45X_1 + 80X_2 \rightarrow \max$,

Ограничения: $5X_1 + 20X_2 \le 400$,

$10X_1 + 15X_2 \le 450$,

$X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$ и целые.

**Задача 2**

Предприятие располагает производственными мощностями четырех видов: трудовыми ресурсами, станками, автотранспортом и погрузочным оборудованием, использующимися для производства изделий двух типов. В таблице приведены затраты времени по каждому ресурсу, необходимые для изготовления изделий, а также ресурсы производственных мощностей. Составить оптимальный план производства продукции, при котором прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы максимальной, если прибыль от реализации единицы продукции первого вида составляет 3 руб., а от единицы продукции второго вида - 4 руб. Так же необходимо учитывать, что существует норма выработки на общее количество изделий – не менее 4 штук.

| Производственные мощности | Нормы времени на производство единицы продукции, ч. | | Ресурсы производственных мощностей, ч. |
|---|---|---|---|
| | Изделие №1 | Изделие №2 | |
| Трудовые ресурсы | 2 | 1 | 16 |
| Станки | 1 | 1 | 10 |
| Автотранспорт | 0 | 1 | 6 |
| Погрузочное оборудование | 1 | 0 | 7 |

Математическая модель задачи имеет вид:

$X_1$ - число изготовленных изделий №1,

$X_2$ - число изделий №2.

Целевая функция:

$3X_1 + 4X_2 \to \max$,

Ограничения:

$2X_1 + X_2 \le 16$,

$X_1 + X_2 \le 10$,

$X_2 \le 6$,

$X_1 \le 7$,

$X_1 + X_2 \ge 4$,

$X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$ и целые.

## Задача 3

В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры разрядов 1 и 2. Норма выработки ОТК за восьмичасовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер 1 разряда проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер 2 разряда проверяет 15 изделий в час, и его точность составляет 95%.

Заработная плата контролера 1 разряда равна 4 $ в час, контролер 2 разряда получает 3 $ в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере 2 долл. Фирма может нанять максимум 8 контролеров 1 разряда и 10 контролеров 2 разряда.

Определить оптимальный состав ОТК, при котором общие расходы фирмы на контроль будут минимальными.

Математическая модель задачи имеет вид:

Обозначим: $X_1$ - число контролеров 1 разряда, $X_2$ - контролеров 2 разряда

Целевая функция (общие затраты на оплату труда контролеров в час):

$$4X_1 + 3X_2 + 2(25\cdot 0{,}02\cdot X_1 + 15\cdot 0{,}05\cdot X_2)\rightarrow \min,$$

Ограничения: $8\cdot(25X_1 + 15X_2) \geq 1800$,

$X_1 \leq 8$,

$X_2 \leq 10$,

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ и целые.

# Примеры задач линейного программирования:
## задача составления смесей или задача о диете

**Задача 4** Из двух сортов бензина составляют для различных целей две смеси А и В. Смесь А содержит 60% бензина первого и 40% бензина второго сорта, смесь В - 80% бензина первого и 20% бензина второго сорта.

Составить оптимальный план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если имеется 50000 л бензина первого и 30000 л второго сорта. и продажная цена 1 л смеси А составляет 10 руб., а смеси В - 12 руб. При этом, смеси А должно быть не менее, чем в 2 раза больше, чем смеси В.

Математическая модель задачи имеет вид:

Обозначим: $X_1$ – количество смеси А, $X_2$ - количество смеси В (тыс. литров)

Целевая функция (доход от реализации смесей) в тыс. руб.:

$$10X_1 + 12\,X_2 \to \max\ ,$$

Ограничения:

$$0{,}6X_1 + 0{,}8\,X_2 \le 50\ ,$$
$$0{,}4X_1 + 0{,}2\,X_2 \le 30\ ,$$
$$X_1 - 2\,X_2 \ge 0 \qquad\qquad X_1 \ge 0\ ,\ X_2 \ge 0.$$

**Задача 5 (о диете)** Предположим, что необходимо составить самый дешевый рацион питания цыплят, содержащий необходимое количество определенных питательных веществ (например, тиамина Т и ниацина Н).

| | **Содержание веществ в 1 унции** | | **Потребность** |
|---|---|---|---|
| | Продукт 1 | Продукт 2 | |
| Вещество Т | 0,10 мг | 0,25 мг | 1,00 мг |
| Вещество Н | 1,00 мг | 0,25 мг | 5,00 мг |
| Калории | 110,00 | 120,00 | 400,00 |
| Стоимость 1 унции продукта, в центах | 3,8 | 4,2 | |

Пищевая ценность рациона должна быть не менее 400 калорий. Смесь для цыплят изготавливается из двух продуктов. Известно содержание тиамина и ниацина в этих продуктах, а также питательная ценность. Сколько унций каждого продукта надо взять для одной порции куриного корма, чтобы цыплята получили необходимую им дозу веществ Н и Т и калорий (или больше), а стоимость порции была минимальна?

Задача линейного программирования имеет вид:

$3{,}8\,X_1 + 4{,}2\,X_2 \to \min$ ,

$0{,}10\,X_1 + 0{,}25\,X_2 \geq 1{,}00$ ,

$1{,}00\,X_1 + 0{,}25\,X_2 \geq 5{,}00$ ,

$110{,}00\,X_1 + 120{,}00\,X_2 \geq 400{,}00$ ,

$X_1 \geq 0$ , $X_2 \geq 0$ .

# Примеры задач линейного программирования:
## задача о раскрое

**Задача 6** Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в следующей таблице:

| Длина заготовки, (см) | Вариант разреза | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 45 | 2 | 1 | 1 | | | |
| 35 | | 1 | | 3 | 1 | |
| 50 | | | 1 | | 1 | 2 |
| Величина отходов (см) | 20 | 30 | 15 | 5 | 25 | 10 |

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

Математическая модель задачи имеет вид:

Обозначим: $X_i$ – количество прутьев, разрезанных по i-му варианту разреза, i=1,…,6

Целевая функция (отходы), см: $20X_1 + 30X_2 + 15X_3 + 5X_4 + 25X_5 + 10X_6 \to \min$

Ограничения:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 40$$
$$X_2 + 3X_4 + X_5 \geq 30$$
$$X_3 + X_5 + 2X_6 \geq 20$$
$$X_j \geq 0,\ j=1,\dots,6 \text{ и целые.}$$

## Задача 7

Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов.

| Способ распила | Число получаемых брусьев длиной | | | Отходы, м |
|---|---|---|---|---|
| | 1,2 м | 3 м | 5 м | |
| 1 | 5 | | | 0 |
| 2 | 2 | 1 | | 0,6 |
| 3 | | 2 | | 0 |
| 4 | | | 1 | 1 |

Математическая модель задачи имеет вид:

Обозначим: $X_i$ – количество бревен, разрезанных по i-му варианту разреза, i=1,2,3,4;

x – количество комплектов;

Целевая функция: x → max (максимизация кол-ва комплектов)

или : $0{,}6\,X_2 + X_4 \to \min$ (минимизация отходов)

Ограничения: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 195$

$5X_1 + 2X_2 = 2x$

$X_2 + 2X_3 = x$

$X_4 = 3x$

$X_j \geq 0$, $j$=1,2,3,4 и целые.

# Методы решения задач линейного программирования

- Графический метод (n=2)
- Симплексный метод (simplex (лат) – простой)
- Метод искусственного базиса (больших штрафов)
- Модифицированный симплекс-метод
- Метод потенциалов
- Венгерский метод
- Метод отсечения
- Метод Гомори
- Метод ветвей и границ и др.

# Решение ЗЛП графическим способом

**Задача 8.** ***Условие:*** Фабрика выпускает пряжу двух видов: П1 и П2. Продукция поступает в оптовую продажу. Для производства используется три вида сырья – шерсть, капрон и акрил. Максимально возможные суточные запасы этих материалов составляют 6, 8 и 5 тонн соответственно. Расходы сырья на партию пряжи и оптовые цены приведены в таблице:

| Сырьё | Расход сырья на 1 партию пряжи | | Запас, тонн |
|---|---|---|---|
| | П1 | П2 | |
| шерсть | 1 | 2 | 6 |
| капрон | 2 | 1 | 8 |
| акрил | 1 | 0,8 | 5 |
| оптовая цена партии, тыс.у.е. | 3 | 2 | |

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на пряжу П2 никогда не превышает спроса на пряжу П1 более чем на одну партию. Кроме того, установлено, что спрос на пряжу П2 никогда не превышает 2 партий.

***Вопрос:*** Какое количество пряжи (в партиях) каждого вида должна производить фабрика, что бы доход от реализации продукции был максимальным?

# Решение задачи 8

Обозначим:

$X_1$ – суточный объем производства пряжи П1;

$X_2$ - суточный объем производства пряжи П2 в количестве партий.

Получаем следующую математическую модель задачи:

$3X_1 + 2X_2 \to \max$

при ограничениях

$X_1 + 2X_2 \le 6$ (а)

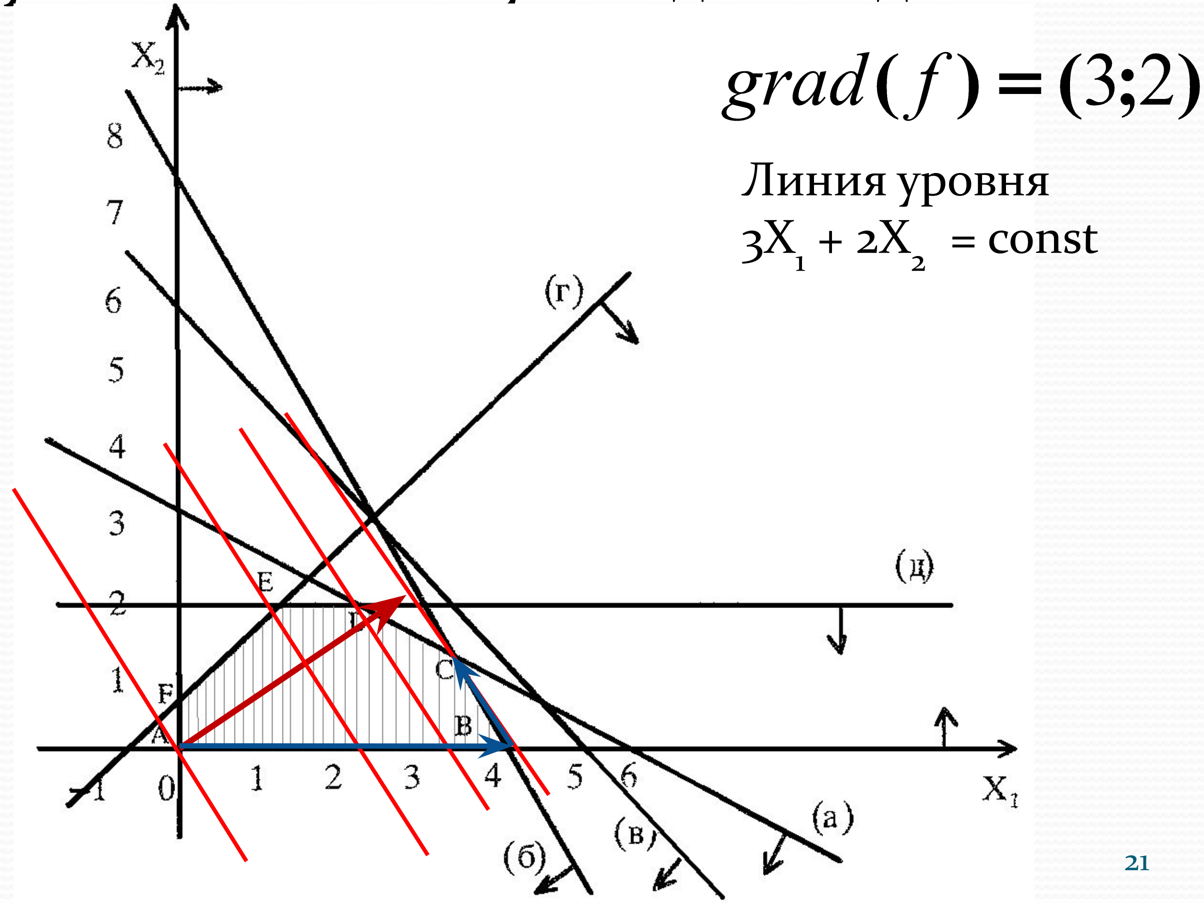
$2X_1 + X_2 \le 8$ (б)

$X_1 + 0{,}8X_2 \le 5$ (в)

$-X_1 + X_2 \le 1$ (г)

$X_2 \le 2$ (д)

$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0$ (е)



# Решение задачи 8

Угловая точка С – является точкой максимума , она лежит на пересечении прямых (а) и (б). Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 6 \\ 2X_1 + X_2 = 8. \end{cases}$$

Откуда $X^*_1 = 10/3$; $X^*_2 = 4/3$ или $\overline{X}^* = (10/3\ ;\ 4/3)$.

Подставляя значения $X^*_1$ и $X^*_2$ в функцию , найдем

$$\max f(\overline{X}) = f(\overline{X}^*) = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3 = 12{,}67.$$

**Ответ:** фабрике необходимо производить пряжи первого вида 3 и 1/3 партий, а второго вида – 1 и 1/3 партий. При этом фабрика получит максимальный доход от реализации всей пряжи 12,67 тыс. у.е.

# Решение ЗЛП симплексным методом

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (КЗЛП)

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \quad i = 1,\dots,m$$

$$x_i \geq 0, \quad j = 1,\dots,n; \quad b_i \geq 0; \quad i = 1,\dots,m$$

Симплексные метод решения ЗЛП – это метод последовательного улучшения плана, который позволяет за конечное число шагов либо найти оптимальный план, либо установить его отсутствие.

Симплексный метод состоит из трех основных этапов:

1. Отыскание начального опорного плана.
2. Переход от одного опорного плана к другому, значение целевой функции в котором больше, чем в предыдущем.
3. Проверка оптимальности полученного плана, позволяющая своевременно остановить перебор опорных планов или сделать вывод об отсутствии оптимального плана.

# Пример 8

Решить ЗЛП из примера 8 симплексным методом:

$$\max f(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ \qquad\quad x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Приводим систему линейных неравенств к **каноническому виду**, вводя в каждое неравенство дополнительную неотрицательную переменную. Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ \qquad\quad x_2 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}$$

Целевая функция будет иметь вид

$$\max f(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

Составляем симплекс – таблицу:

# Симплекс-таблица

| № | Базис | $c_j$ базиса | $c_1=3$ $x_1$ | $c_2=2$ $x_2$ | $c_3=0$ $x_3$ | $c_4=0$ $x_4$ | $c_5=0$ $x_5$ | $c_6=0$ $x_6$ | $b_i$ | $\frac{b_i}{a_{ip}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_3$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6/1 |
| 2 | $x_4$ | 0 | $\boxed{2}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 8 | 8/2 |
| 3 | $x_5$ | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 4 | $x_6$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | |
| 5 | $\Delta_j$ | | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | $x_3$ | 0 | 0 | $\boxed{3/2}$ | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 2 | 4/3 |
| 2 | $x_1$ | 3 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 | 4 | 8 |
| 3 | $x_5$ | 0 | 0 | 3/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 5 | 10/3 |
| 4 | $x_6$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2/1 |
| 5 | $\Delta_j$ | | 0 | -1/2 | 0 | 3/2 | 0 | 0 | 12 | |
| 1 | $x_2$ | 2 | 0 | 1 | 2/3 | -1/3 | 0 | 0 | 4/3 | |
| 2 | $x_1$ | 3 | 1 | 0 | -1/3 | 2/3 | 0 | 0 | 10/3 | |
| 3 | $x_5$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | 3 | |
| 4 | $x_6$ | 0 | 0 | 0 | -2/3 | 1/3 | 0 | 1 | 2/3 | |
| 5 | $\Delta_j$ | | 0 | 0 | 1/3 | 4/3 | 0 | 0 | $\boxed{38/3}$ | |

$\overline{X} = (0,0,6,8,1,2)$ (*точка A*)

$\overline{X}_1 = (4,0,2,0,5,2)$ (*точка B*)

$\overline{X}_2 = (10/3;\ 4/3;\ 0;\ 0;\ 3;\ 2/3)$ (*точка C*)

# Задача 9

Производственное предприятие изготавливает два вида изделия А и В. Потребители продукции готовы приобрести за неделю 100 единиц продукции А по цене 3000 руб за единицу и 50 единиц продукции В по цене 3200 руб за единицу.

Предприятие использует в производственном процессе 9 агрегатов. Структура технологических маршрутов предприятия с длительностью операций представлена на рисунке.

Общий фонд времени работы каждого агрегата за неделю 2400 мин (5 дней по 8 часов).

Для производства единицы изделия А используется два вида исходного сырья: «а» по 600 руб/ед и «б» по 400 руб/ед. Изделие В изготавливается из сырья «б» и «в» по 400 руб/ед.

Необходимо определить максимальную прибыль, которую может получить предприятие за неделю, если объем постоянных расходов составляет 100 тыс. руб.

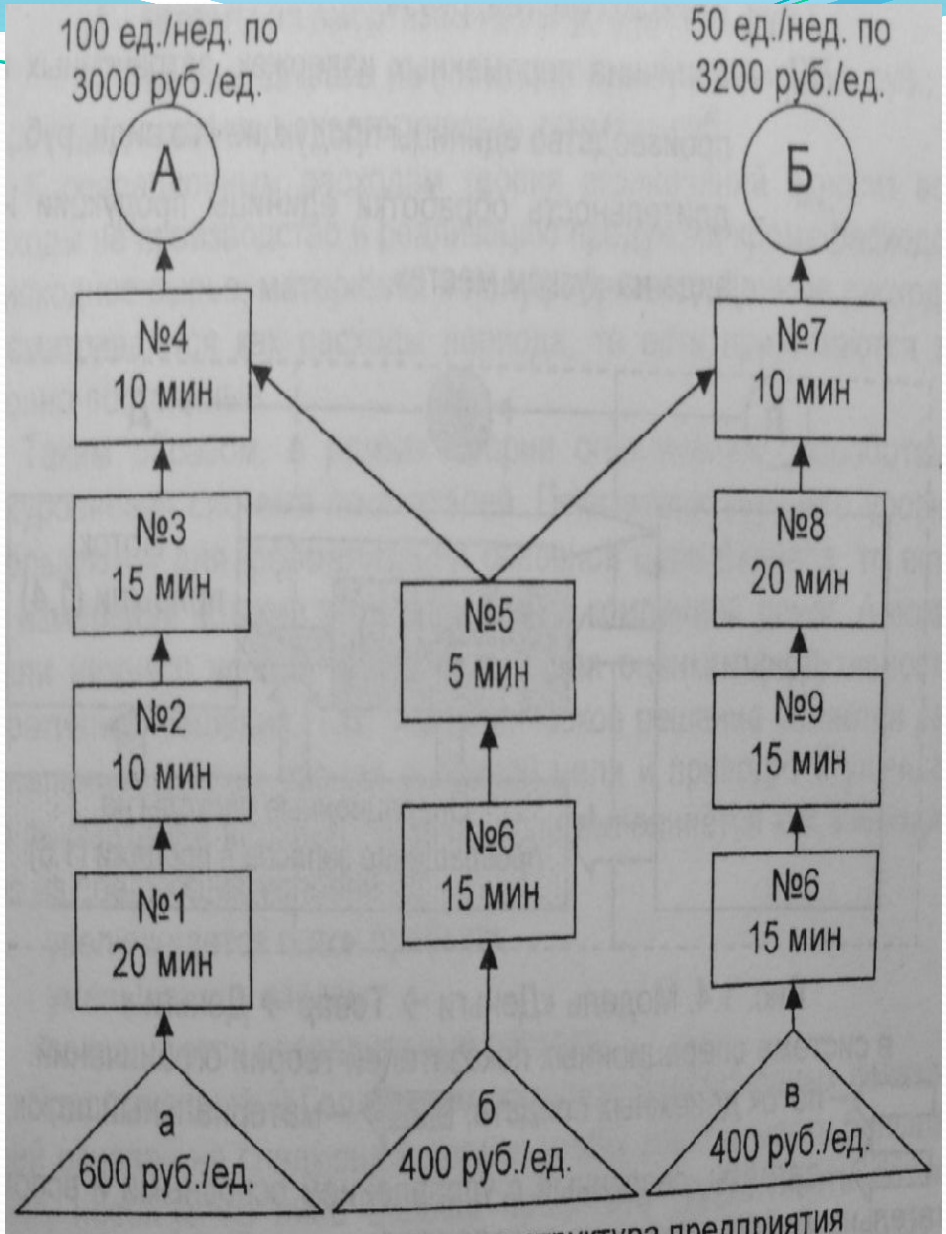


Рис. 1.5. Производственная структура предприятия

Составим **математическую модель задачи**:

**Переменные**:

$x_1$ – количество изделий А, производимых за планируемую неделю;

$x_2$ - количество изделий В, производимых за планируемую неделю.

**Целевая функция** – прибыль предприятия, рублей за неделю:

$$f = (3000 - 600 - 400)x_1 + (3200 - 400 - 400)x_2 - 100000 \to \max$$

**Ограничения на переменные:**

по фонду времени работы каждого агрегата:

агрегат 1: $20 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 2: $10 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 3: $15 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 4: $10 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 5: $5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 6: $15 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 7: $0 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 8: $0 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \le 2400$

агрегат 9: $0 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 \le 2400$

ограничения со стороны службы сбыта:

спрос на А: $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \le 100$

спрос на В: $0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 50$

неотрицательность переменных: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$2000\,x_1 + 2400\,x_2 - 100\,000 \to \max$

$x_1 \le 120$

$x_1 \le 240$

$x_1 \le 160$

$x_1 \le 240$

$x_1 + x_2 \le 480$

$x_1 + 2\,x_2 \le 160$

$x_2 \le 240$

$x_2 \le 120$

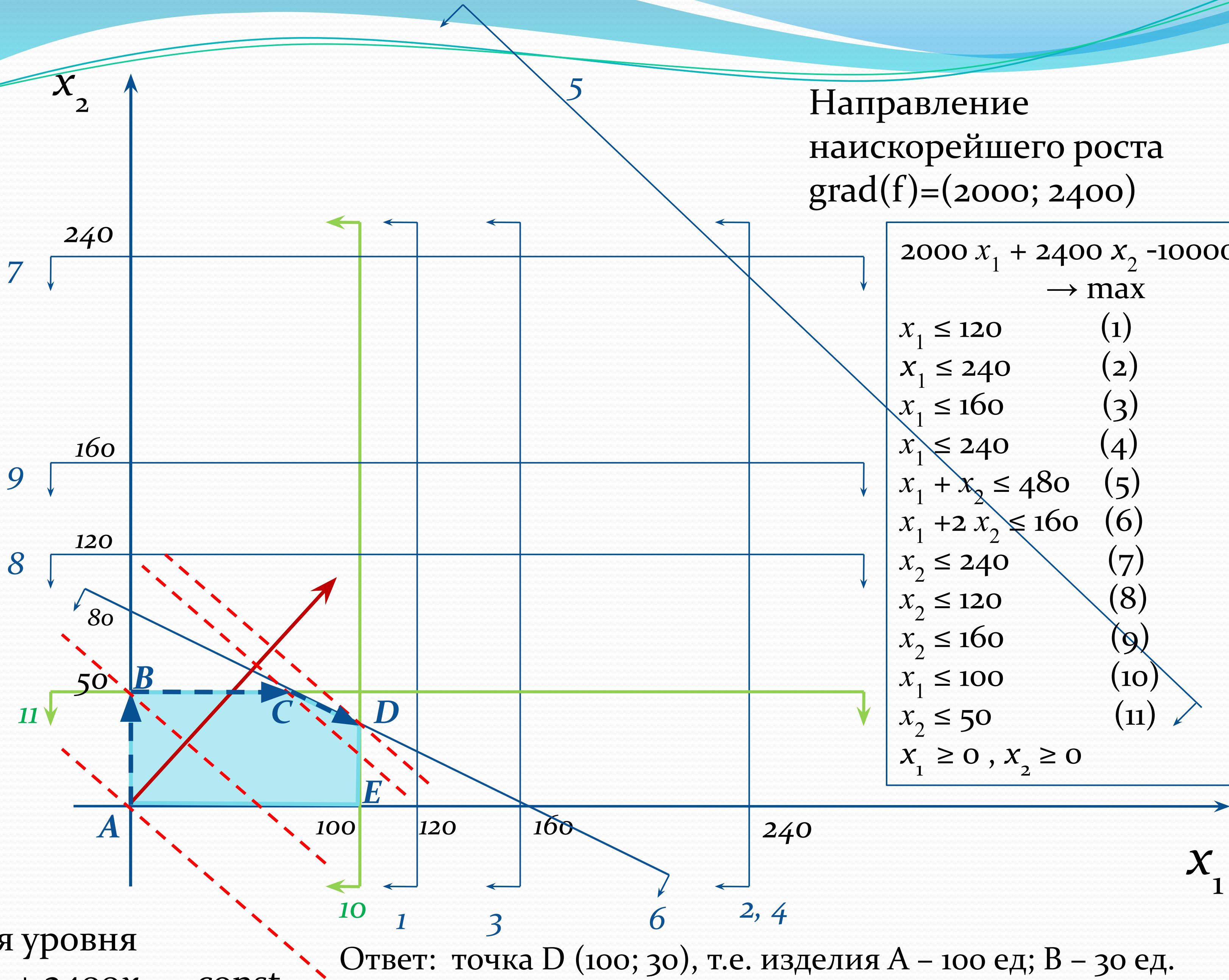
$x_2 \le 160$

$x_1 \le 100$

$x_2 \le 50$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

Направление наискорейшего роста grad(f)=(2000; 2400)




$2000\,x_1 + 2400\,x_2 - 100000 \rightarrow \max$

$x_1 \le 120$ (1)

$x_1 \le 240$ (2)

$x_1 \le 160$ (3)

$x_1 \le 240$ (4)

$x_1 + x_2 \le 480$ (5)

$x_1 + 2\,x_2 \le 160$ (6)

$x_2 \le 240$ (7)

$x_2 \le 120$ (8)

$x_2 \le 160$ (9)

$x_1 \le 100$ (10)

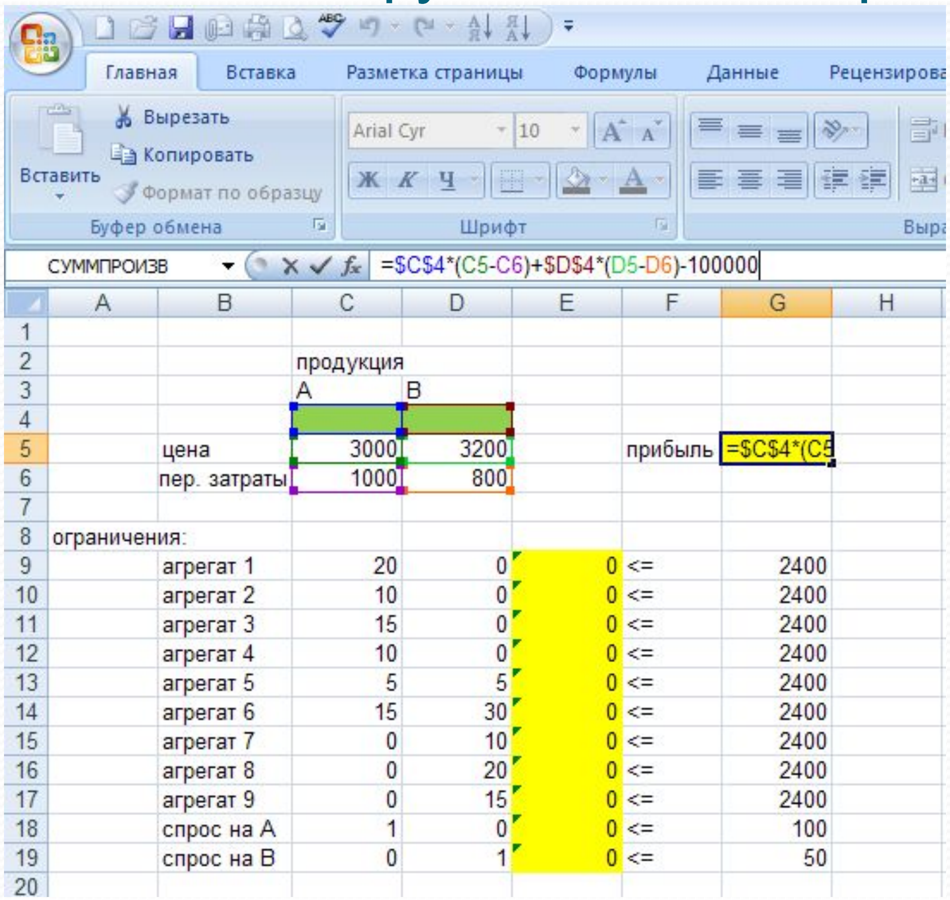
$x_2 \le 50$ (11)

$x_1 \ge 0$ , $x_2 \ge 0$

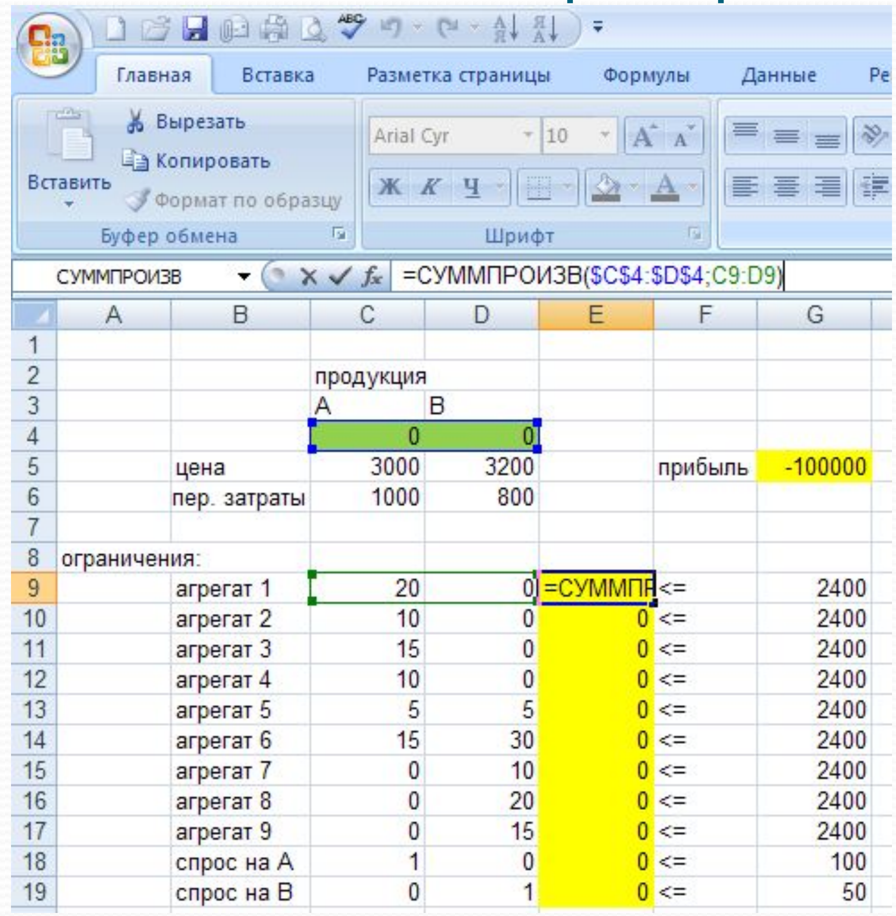
Линия уровня
$2000x_1 + 2400x_2 = \text{const}$

Ответ: точка D (100; 30), т.е. изделия А – 100 ед; В – 30 ед.
Прибыль составит 172 000 рублей

# Решение задачи линейного программирования с помощью функции «Поиск решения» в MS Excel. Пример 9




| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | продукция | | | | | |
| 3 | | | A | B | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | цена | 3000 | 3200 | | прибыль | =$C$4*(C5 | |
| 6 | | пер. затраты | 1000 | 800 | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | ограничения: | | | | | | | |
| 9 | | агрегат 1 | 20 | 0 | 0 | <= | 2400 | |
| 10 | | агрегат 2 | 10 | 0 | 0 | <= | 2400 | |
| 11 | | агрегат 3 | 15 | 0 | 0 | <= | 2400 | |
| 12 | | агрегат 4 | 10 | 0 | 0 | <= | 2400 | |
| 13 | | агрегат 5 | 5 | 5 | 0 | <= | 2400 | |
| 14 | | агрегат 6 | 15 | 30 | 0 | <= | 2400 | |
| 15 | | агрегат 7 | 0 | 10 | 0 | <= | 2400 | |
| 16 | | агрегат 8 | 0 | 20 | 0 | <= | 2400 | |
| 17 | | агрегат 9 | 0 | 15 | 0 | <= | 2400 | |
| 18 | | спрос на A | 1 | 0 | 0 | <= | 100 | |
| 19 | | спрос на B | 0 | 1 | 0 | <= | 50 | |
| 20 | | | | | | | | |




| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | продукция | | | | |
| 3 | | | A | B | | | |
| 4 | | | 0 | 0 | | | |
| 5 | | цена | 3000 | 3200 | | прибыль | -100000 |
| 6 | | пер. затраты | 1000 | 800 | | | |
| 7 | | | | | | | |
| 8 | ограничения: | | | | | | |
| 9 | | агрегат 1 | 20 | 0 | =СУММПР | <= | 2400 |
| 10 | | агрегат 2 | 10 | 0 | 0 | <= | 2400 |
| 11 | | агрегат 3 | 15 | 0 | 0 | <= | 2400 |
| 12 | | агрегат 4 | 10 | 0 | 0 | <= | 2400 |
| 13 | | агрегат 5 | 5 | 5 | 0 | <= | 2400 |
| 14 | | агрегат 6 | 15 | 30 | 0 | <= | 2400 |
| 15 | | агрегат 7 | 0 | 10 | 0 | <= | 2400 |
| 16 | | агрегат 8 | 0 | 20 | 0 | <= | 2400 |
| 17 | | агрегат 9 | 0 | 15 | 0 | <= | 2400 |
| 18 | | спрос на A | 1 | 0 | 0 | <= | 100 |
| 19 | | спрос на B | 0 | 1 | 0 | <= | 50 |

Рисунок 1

Рисунок 2

# Решение задачи линейного программирования с помощью функции «Поиск решения» в MS Excel. Пример 9

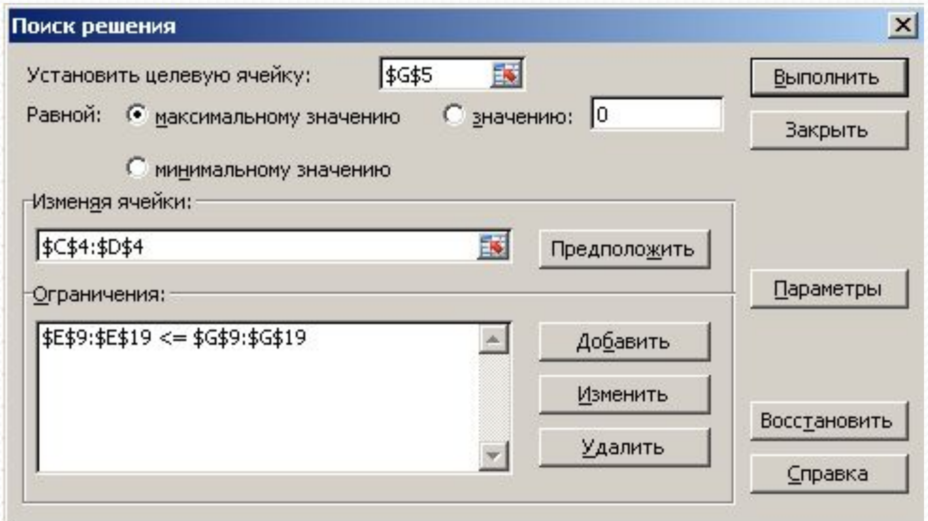



Рисунок 3

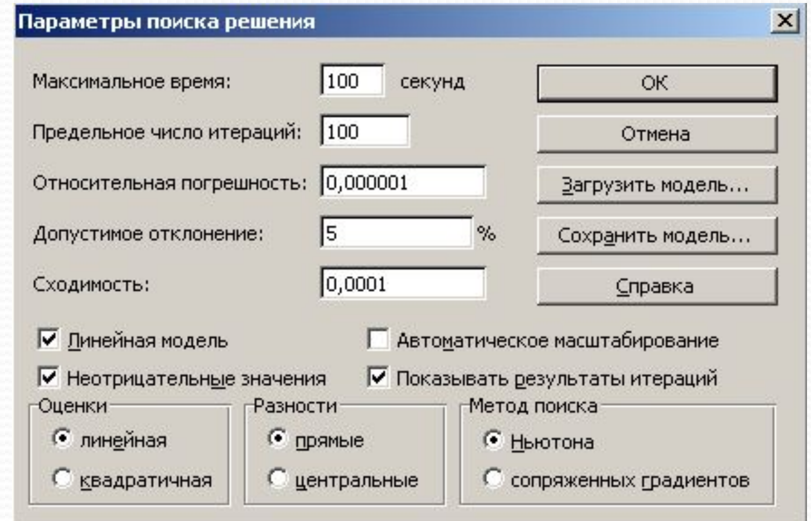



Рисунок 4

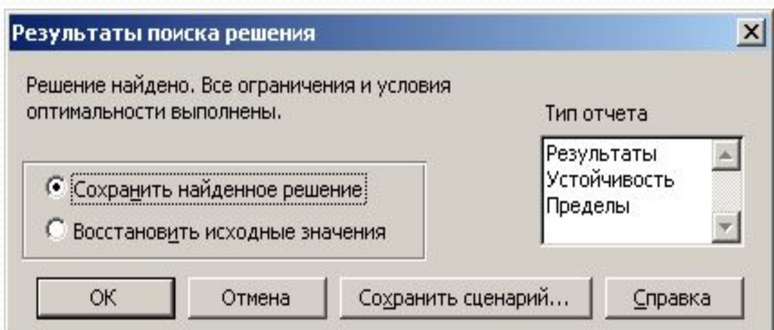
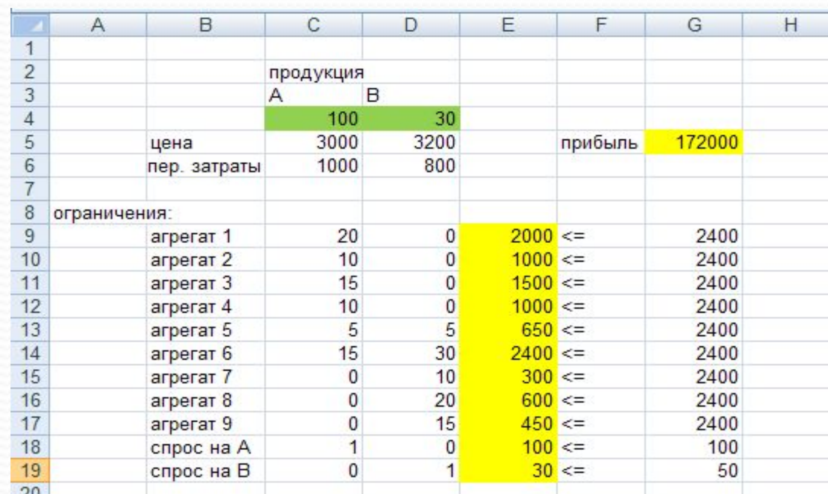



Рисунок 5



| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | продукция | | | | | |
| 3 | | | A | B | | | | |
| 4 | | | 100 | 30 | | | | |
| 5 | | цена | 3000 | 3200 | | прибыль | 172000 | |
| 6 | | пер. затраты | 1000 | 800 | | | | |
| 7 | | | | | | | | |
| 8 | ограничения: | | | | | | | |
| 9 | | агрегат 1 | 20 | 0 | 2000 | <= | 2400 | |
| 10 | | агрегат 2 | 10 | 0 | 1000 | <= | 2400 | |
| 11 | | агрегат 3 | 15 | 0 | 1500 | <= | 2400 | |
| 12 | | агрегат 4 | 10 | 0 | 1000 | <= | 2400 | |
| 13 | | агрегат 5 | 5 | 5 | 650 | <= | 2400 | |
| 14 | | агрегат 6 | 15 | 30 | 2400 | <= | 2400 | |
| 15 | | агрегат 7 | 0 | 10 | 300 | <= | 2400 | |
| 16 | | агрегат 8 | 0 | 20 | 600 | <= | 2400 | |
| 17 | | агрегат 9 | 0 | 15 | 450 | <= | 2400 | |
| 18 | | спрос на A | 1 | 0 | 100 | <= | 100 | |
| 19 | | спрос на B | 0 | 1 | 30 | <= | 50 | |
| 20 | | | | | | | | |

Рисунок 6

# Экономический анализ задачи ЛП с использованием теории двойственности

Для каждой задачи линейного программирования по определенным правилам можно поставить двойственную задачу. Переменными двойственной задачи будут двойственные оценки ресурсов (теневые, неявные, учетные, объективно обусловленные цены ресурсов).

Результаты решения двойственной задачи можно увидеть при решении ЗЛП в MS Excel, если заказать отчет по результатам и отчет по устойчивости (они выводятся на отдельные листы)

| Задача I (исходная) | Задача II (двойственная) |
|---|---|
| $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$ **(6.1)** | $Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$ **(6.4)** |
| при ограничениях: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$ **(6.2)** | при ограничениях: $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_2 \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$ **(6.5)** |
| и условии неотрицательности $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$ **(6.3)** | и условии неотрицательности $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ \ldots,\ y_m \ge 0.$ **(6.6)** |
| *Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов* | *Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли (выручки) от реализации этой продукции* |

Таблица 1

Для симметричных двойственных задач (как в таблице 1) двойственная задача строится по следующим правилам:

- Каждому неравенству системы ограничений исходной задачи ставим в соответствие переменную $y_i$.
- Составляем целевую функцию, коэффициентами которой являются свободные члены системы ограничений исходной задачи. Если исходная задача на максимум, то двойственная – на минимум.
- Составляем систему ограничений. Коэффициенты системы ограничений образуют транспонированную матрицу коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Знаки неравенств меняются на противоположные.
- Свободными членами системы ограничений являются коэффициенты целевой функции исходной задачи.
- Все переменные двойственной задачи неотрицательные.

# Пример 10 составления двойственной задачи

**Исходная задача**

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 & |y_1 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 & |y_2 \\ x_1 + x_2 \le 5 & |y_3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 2 & -1 & F \end{array}\right)^T$$

**Двойственная задача**

$$Z(y_1, y_2, y_3) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 \ge 2 & |x_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 & |x_1 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, y_3 \ge 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 5 & Z \end{array}\right)$$

# Решение двойственной задачи

При решении исходной задачи решение двойственной задачи находится автоматически, используя 1 и 2-ую теоремы двойственности (см лит-ру). При этом наблюдается взаимно однозначное соответствие переменных:

| | **Основные переменные** | | **Дополнительные переменные** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Исходная задача | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| Двойственная задача | $y_4$ | $y_5$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
| | **Дополнительные переменные** | | **Основные переменные** | | |

# Двойственная задача для примера 9

$2000\,x_1 + 2400\,x_2 - 100000 \to \max$

$x_1 \le 120 \quad | y_1$

$x_1 \le 240 \quad | y_2$

$x_1 \le 160 \quad | y_3$

$x_1 \le 240 \quad | y_4$

$x_1 + x_2 \le 480 \quad | y_5$

$x_1 + 2x_2 \le 160 \quad | y_6$

$x_2 \le 240 \quad | y_7$

$x_2 \le 120 \quad | y_8$

$x_2 \le 160 \quad | y_9$

$x_1 \le 100 \quad | y_{10}$

$x_2 \le 50 \quad | y_{11}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

$120\,y_1 + 240\,y_2 + 160\,y_3 + 240\,y_4 + 480\,y_5 + 160\,y_6 + 240\,y_7 + 120\,y_8 + 160\,y_9 + 100\,y_{10} + 50\,y_{11} \to \min$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_{10} \ge 2000$

$y_5 + 2\,y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + 2\,y_{10} + y_{11} \ge 2400$

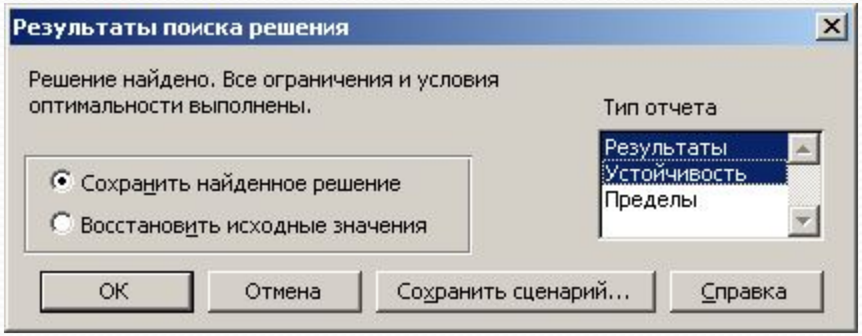
$y_i \ge 0,\ i=1,\dots,11$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 120 \\ 1 & 0 & 240 \\ 1 & 0 & 160 \\ 1 & 0 & 240 \\ 1 & 1 & 480 \\ 1 & 2 & 160 \\ 0 & 1 & 240 \\ 0 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 160 \\ 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 50 \\ \hline 2000 & 2400 & F \end{array}\right)^{T} \to \left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2400 \\ \hline 120 & 240 & 160 & 240 & 480 & 160 & 240 & 120 & 160 & 100 & 50 & Z \end{array}\right)$$

# Решение двойственной задачи в MS Excel Пример 9

После того, как запущена работа надстройки Поиск решения, в окне Результаты поиска решения предложат заказать 3 типа отчета. Щёлкните по первым двум: Результаты и Устойчивость.

Эти отчеты появятся на отдельных листах Вашей книги в MS Excel.



# Отчет по результатам

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [пример из Салганика.xls]Лист1
Отчет создан: 31.10.2010 13:10:36

Целевая ячейка (Максимум)

| Ячейка | Имя | Исходное значение | Результат |
|---|---|---|---|
| $G$5 | прибыль | -100000 | 172000 |

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Исходное значение | Результат |
|---|---|---|---|
| $C$4 | A | 0 | 100 |
| $D$4 | B | 0 | 30 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Значение | Формула | Статус | Разница |
|---|---|---|---|---|---|
| $E$9 | агрегат 1 | 2000 | $E$9<=$G$9 | не связан. | 400 |
| $E$10 | агрегат 2 | 1000 | $E$10<=$G$10 | не связан. | 1400 |
| $E$11 | агрегат 3 | 1500 | $E$11<=$G$11 | не связан. | 900 |
| $E$12 | агрегат 4 | 1000 | $E$12<=$G$12 | не связан. | 1400 |
| $E$13 | агрегат 5 | 650 | $E$13<=$G$13 | не связан. | 1750 |
| $E$14 | агрегат 6 | 2400 | $E$14<=$G$14 | связанное | 0 |
| $E$15 | агрегат 7 | 300 | $E$15<=$G$15 | не связан. | 2100 |
| $E$16 | агрегат 8 | 600 | $E$16<=$G$16 | не связан. | 1800 |
| $E$17 | агрегат 9 | 450 | $E$17<=$G$17 | не связан. | 1950 |
| $E$18 | спрос на А | 100 | $E$18<=$G$18 | связанное | 0 |
| $E$19 | спрос на В | 30 | $E$19<=$G$19 | не связан. | 20 |

В верхней таблице выводиться исходное **значение целевой функции** и конечное (результат), которое достигается при оптимальном плане.

В средней таблице – значения изменяемых ячеек в начале (исходное значение) и в конце (результат) – **оптимальный план**.

В нижней таблице значения левых частей системы ограничений (столбец «Значение»), разница с правыми частями системы ограничений (столбец «Разница») и **статус** ограничения: «связное» или «не связное», т.е. указываются соответственно дефицитные и недефицитные виды ресурсов, на которые наложены ограничения задачи.

В столбце «Разница» указываются неиспользованные запасы ресурсов. Например, агрегат 1 будет простаивать 400 минут (6 часов 40 минут) в неделю; спрос на изделие В не будет удовлетворен на 20 единиц.

# Отчет по устойчивости

**Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости**
**Рабочий лист: [пример из Салганика.xls]Лист1**
**Отчет создан: 29.10.2010 10:44:05**

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$4 | A | 100 | 0 | 2000 | 1E+30 | 800 |
| $D$4 | B | 30 | 0 | 2400 | 1600 | 2400 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$9 | агрегат 1 | 2000 | 0 | 2400 | 1E+30 | 400 |
| $E$10 | агрегат 2 | 1000 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1400 |
| $E$11 | агрегат 3 | 1500 | 0 | 2400 | 1E+30 | 900 |
| $E$12 | агрегат 4 | 1000 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1400 |
| $E$13 | агрегат 5 | 650 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1750 |
| $E$14 | агрегат 6 | 2400 | 80 | 2400 | 600 | 900 |
| $E$15 | агрегат 7 | 300 | 0 | 2400 | 1E+30 | 2100 |
| $E$16 | агрегат 8 | 600 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1800 |
| $E$17 | агрегат 9 | 450 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1950 |
| $E$18 | спрос на A | 100 | 800 | 100 | 20 | 40 |
| $E$19 | спрос на B | 30 | 0 | 50 | 1E+30 | 20 |

В *верхней таблице* выводится информация об изменяемых ячейках, т.е. об оптимальном плане:

Результ. значение – оптимальный план.

Нормир. стоимость – значение, на которое уменьшиться целевая функция, если в план принудительно включить производство единицы продукции, отсутствующей в оптимальном плане. Поскольку в данной задаче обе переменные присутствуют в оптимальном плане (≠0), то их нормировочная стоимость равна нулю.

$$2000-800 \le c_1 \le 2000+\infty$$
$$2400-2400 \le c_2 \le 2400+1600$$

Допустимое увеличение и допустимое уменьшение – **интервал устойчивости для целевого коэффициента**, изменение его в этих пределах (при прочих равных) не приведет к изменению оптимального плана. (1E+30 – символ бесконечности) Например: если бы маржинальная прибыль от изделия А была бы на сколько угодно больше или на 800 рублей меньше (2000-800=1200), то оптимальное значение 100 ед. в плане производства не изменилось бы.

# Отчет по устойчивости

Ограничения

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$9 | агрегат 1 | 2000 | 0 | 2400 | 1E+30 | 400 |
| $E$10 | агрегат 2 | 1000 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1400 |
| $E$11 | агрегат 3 | 1500 | 0 | 2400 | 1E+30 | 900 |
| $E$12 | агрегат 4 | 1000 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1400 |
| $E$13 | агрегат 5 | 650 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1750 |
| $E$14 | агрегат 6 | 2400 | 80 | 2400 | 600 | 900 |
| $E$15 | агрегат 7 | 300 | 0 | 2400 | 1E+30 | 2100 |
| $E$16 | агрегат 8 | 600 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1800 |
| $E$17 | агрегат 9 | 450 | 0 | 2400 | 1E+30 | 1950 |
| $E$18 | спрос на А | 100 | 800 | 100 | 20 | 40 |
| $E$19 | спрос на В | 30 | 0 | 50 | 1E+30 | 20 |

В *нижней таблице* отчета по устойчивости выводятся значения левых частей системы ограничений (столбец «Результ. значение»);

**Теневые цены** ресурсов, они показывают, на сколько может увеличиться значение целевой функции, если увеличить запасы соответствующего ресурса на 1 единицу.

В данной задаче под запасами ресурсов понимается доступный фонд времени работы всех агрегатов (2400 мин) и величина планируемого спроса на изделия (100 и 50 ед). Эти ограничения выведены здесь в столбце «Ограничение Правая часть»). Например, теневая цена по агрегату 6 равна 80, значит, если бы фонд времени агрегата 6 увеличился бы на 1 минуту, то это бы привело к изменению оптимального плана и принесло дополнительную маржинальную прибыль в 80 рублей.

Теневая цена по спросу на А равна 800 рублей, значит, если бы величина планируемого спроса на изделие А была бы не 100 а 101 единица, то это бы привело к изменению оптимального плана и принесло дополнительную маржинальную прибыль в 800 рублей.

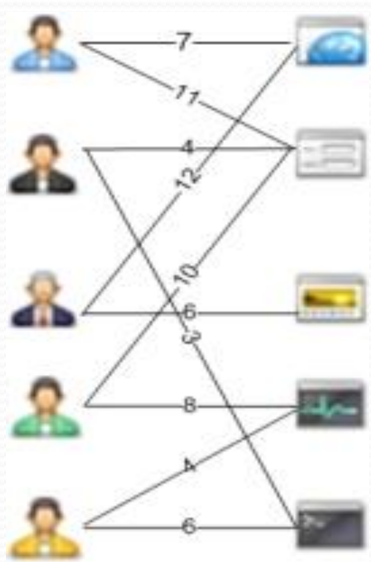
Таким образом, в столбце «Теневые цены» ненулевыми значениями отмечаются, так называемые, «узкие места» как производства, так и отдела сбыта.

Мало того, в двух последних столбцах указаны **границы интервалов устойчивости для правых частей системы ограничений**, т.е. на сколько можно увеличить или уменьшить запасы ресурса (при прочих равных), от чего его теневая цена не измениться. Например, если фонд времени работы агрегата 6 будет составлять от 2400-900=1300 мин до 2400+600=3000 мин в неделю, то его теневая цена не измениться, т.е. он будет оставаться «узким местом». Что бы его расшить нужно фонд времени его работы увеличить как минимум на 601 минуту.

$$\boxed{2400-900 \le b_6 \le 2400+600}$$

# Специальные задачи линейного программирования

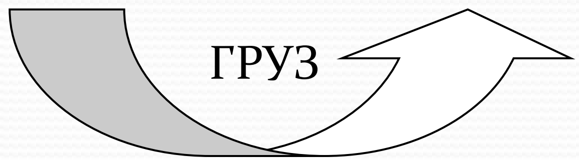
- Транспортная задача
- Задача о назначениях
- Задача коммивояжера
- Задача календарного и оперативного планирования и др.




# Постановка транспортной задачи (ТЗ)

| Поставщики | Количество |
|---|---|
| $A_1$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $a_2$ |
| … | |
| $A_m$ | $a_m$ |

| Потребители | Количество |
|---|---|
| $B_1$ | $b_1$ |
| $B_2$ | $b_2$ |
| … | |
| $B_n$ | $b_n$ |




Известна стоимость $c_{ij}$ перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Необходимо составить самый дешевый план перевозок, позволяющий вывести все грузы у поставщиков и полностью удовлетворить потребителей.

# Математическая модель ТЗ

*Обозначим* через $x_{ij}$ количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

*Систему ограничений* получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены, т.е. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i = 1..m$

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е. $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1..n$

*Целевая функция* - стоимость всех перевозок: $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$

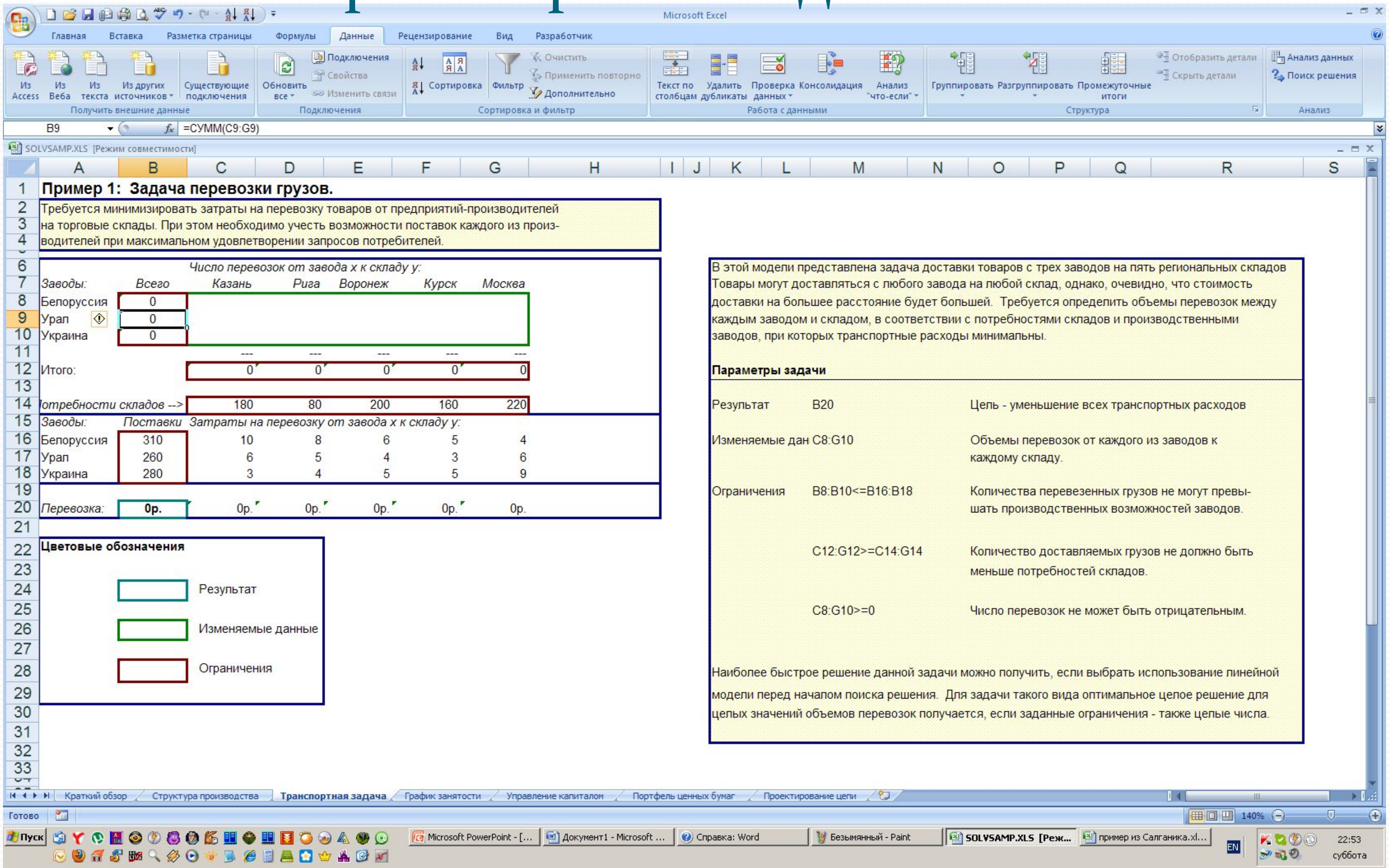
# Пример транспортной задачи 1

Требуется минимизировать затраты на перевозку товаров от трех предприятий-производителей на пять региональных торговых складов. При этом необходимо учесть возможности поставок каждого из производителей при максимальном удовлетворении запросов потребителей.

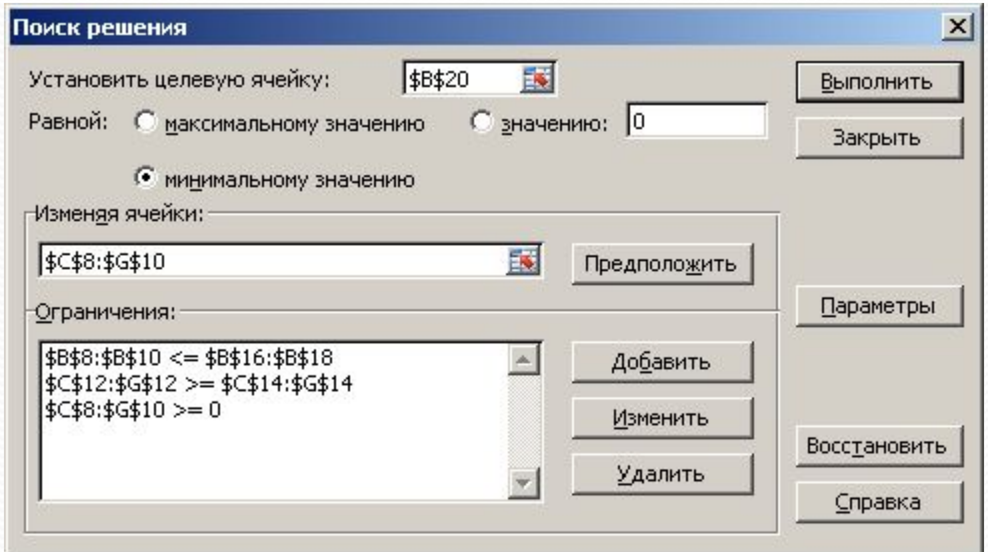
Товары могут доставляться с любого завода на любой склад, однако, очевидно, что стоимость доставки на большее расстояние будет большей. Требуется определить объемы перевозок между каждым заводом и складом, в соответствии с потребностями складов и производством заводов, при которых транспортные расходы будут минимальны.

| | | *Затраты на перевозку от завода x к складу y* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Заводы* | *Поставки* | *Казань* | *Рига* | *Воронеж* | *Курск* | *Москва* |
| Белоруссия | 310 | 10 | 8 | 6 | 5 | 4 |
| Урал | 260 | 6 | 5 | 4 | 3 | 6 |
| Украина | 280 | 3 | 4 | 5 | 5 | 9 |
| Потребности складов | | 180 | 80 | 200 | 160 | 220 |

# Решение транспортной задачи 1 в MS Excel



# Решение транспортной задачи 1




Общий расход на перевозку всех грузов составит 3200 р.

| | | *Объемы перевозки от завода к складу* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Заводы* | *Поставки* | *Казань* | *Рига* | *Воронеж* | *Курск* | *Москва* |
| Белоруссия | 310 | 0 | 0 | 0 | 80 | 220 |
| Урал | 260 | 0 | 0 | 180 | 80 | 0 |
| Украина | 280 | 180 | 80 | 20 | 0 | 0 |
| Потребности складов | | 180 | 80 | 200 | 160 | 220 |

# Пример транспортной задачи 2

Металлургический комбинат имеет четыре доменных печи, выпускающих соответственно 3020, 3220, 2920, 3020 т чугуна в сутки. Чугун транспортируется в четыре сталеплавильных цеха - кислородно-конвертерный (ККЦ), два мартеновских Цеха (МЦ$_1$ и МЦ$_2$) и в электросталеплавильный цех (ЭСПЦ). Известны расходные коэффициенты чугуна на производство одной тонны стали определяющие, сколько чугуна необходимо использовать для производства одной тонны стали. (приведены в таблице)

| Номер доменной печи | Сталеплавильный цех | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ККЦ | МЦ1 | МЦ2 | ЭСПЦ |
| 1 | 0,26 | 0,41 | 0,45 | 0,46 |
| 2 | 0,27 | 0,47 | 0,44 | 0,46 |
| 3 | 0,29 | 0,41 | 0,39 | 0,42 |
| 4 | 0,36 | 0,42 | 0,44 | 0,39 |

Известно, что в каждой доменной печи на конец суток остается переходящий запас чугуна в размере соответственно 200, 370, 340 и 320 т. Определить, сколько нужно производить стали в каждом цехе и из чугуна какой доменной печи, так, чтобы прибыль от производства была максимальной. Известно, что цена продажи тонны стали 1000 руб, а себестоимость выплавки 1 т стали в ККЦ составляет 378 руб., в мартеновском цехе 1 - 549 руб., в мартеновском цехе 2 - 552 руб. и в электросталеплавильном цехе - 555 руб.

# Решение:

Обозначим: $X_{ij}$ – количество чугуна из i-й доменной печи, поставляемое в j-ый сталеплавильный цех, i=1,..,4; j=1,…,4;

Найдем количество стали, произведенное в j-ом сталеплавильном цехе:

*ККЦ:* $X_{11}/0{,}26 + X_{21}/0{,}27 + X_{31}/0{,}29 + X_{41}/0{,}36 = c_1$

*МЦ1:* $X_{12}/0{,}41 + X_{22}/0{,}47 + X_{32}/0{,}41 + X_{42}/0{,}42 = c_2$

*МЦ2:* $X_{13}/0{,}45 + X_{23}/0{,}44 + X_{33}/0{,}39 + X_{43}/0{,}44 = c_3$

*ЭСПЦ:* $X_{14}/0{,}46 + X_{24}/0{,}46 + X_{34}/0{,}42 + X_{44}/0{,}39 = c_4$

Целевая функция (прибыль от продажи стали) в руб.:

$1000(c_1 + c_2 + c_3 + c_4) - 378\,c_1 - 549\,c_2 - 552\,c_3 - 555\,c_4 \to \max$

Ограничения (по количеству чугуна, выпускаемого в доменных печах в сутки) :

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 3020$

$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 3220$

$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 2920$

$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 3020$

$X_{ij} \geq 0$ , *i=1,..,4; j=1,…,4*

***Ответ:*** X= …йдено с помощью функции «Поиск решения» в MS Excel)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3020 | 0 | 0 | 0 |
| 3220 | 0 | 0 | 0 |
| 2920 | 0 | 0 | 0 |
| 3020 | 0 | 0 | 0 |

То есть весь чугун следует направлять в ККЦ , который будет выпускать 41 999,16т стали; прибыль при этом будет максимальна и составит 26 123 481 рублей.