Задачи с параметрами

Основные типы задач с параметрами

1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству
2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра
3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения (…) имеют заданное число решений
4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Основные способы (методы) решения задач с параметрами

1. *(аналитический).* Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах с без параметров.
2. *(графический).* В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x;y), или в координатной плоскости (x;a)
3. *(решение относительно параметра).* При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная , относительно которой аналитическое решение признается наиболее простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

пример 1: При каких значениях параметра *a* уравнение $|x^2-2ax|=1$ имеет три различных корня?

Решение:

Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $x^2-2ax=1$ и $x^2-2ax=-1$

1) уравнение $x^2-2ax-1=0$ при любых значениях a имеет два различных корня $x_{1,2}$, т.к. $D = 4a^2+4>0$

2) если у уравнения $x^2-2ax=-1$ есть два корня $x_{3,4}$, то поскольку они не могут совпадать с $x_{1,2}$, исходное уравнение имеет три корня тогда и только тогда, когда уравнение $x^2-2ax+1=0$ имеет кратный корень, что равносильно условию $D = 4a^2-4=0$, откуда $a=\pm1$.

- Ответ: $a=\pm1$

Пример2: Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $||x| + a - 9| = a^2$ имеет ровно 3 корня. Если таких значений a более одного, в ответе укажите их произведение.

Решаем данное уравнение графически.

На рис. 2а изображён эскиз графика $y = |x| + a - 9$,

а на рис.2б — эскиз графика $y = ||x| + a - 9|$ и прямой $y = a^2$ (предполагаем, что $a - 9 < 0$, т.к. если $a - 9 > 0$, то

$||x| + a - 9| = |x| + a - 9$, при этом данное в условии уравнение принимает вид $|x| = a^2 - a + 9$ и имеет не более двух корней).

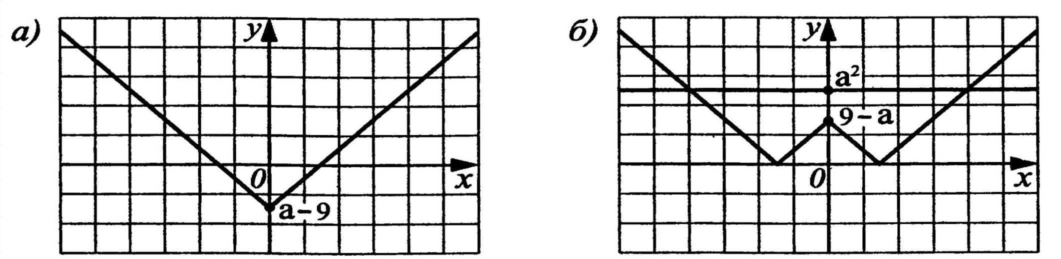


Рис. 2.

Из рис.2б следует, что график $y = ||x| + a - 9|$ и прямая $y = a^2$ имеют ровно три общие точки $a^2 = 9 - a$, $a^2 + a - 9 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет два корня, произведение которых по теореме Виета равно -9.

- Ответ: -9.

Пример3:

Найдите все значения , которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра , принадлежащем промежутку

Решение:

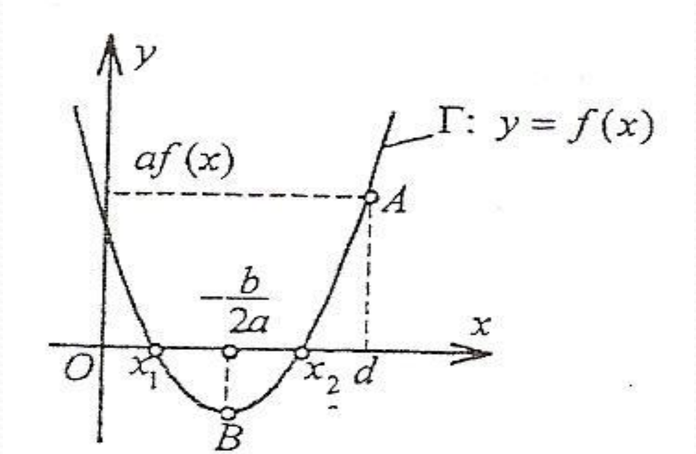
Задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения

- **Теорема 1.**

Пусть дан квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, и некоторое действительное число d. Если для $f(x)$ выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af(d) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < d \end{cases}$$

, то он имеет два действительных корня x_1 и x_2, меньших числа d.



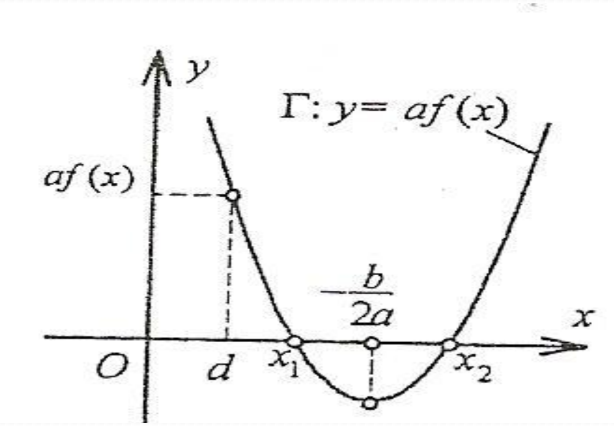
Задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения

- **Теорема 2.**

Пусть дан квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, и некоторое действительное число d. Если для квадратного трехчлена $f(x)$ выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af(d) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > d \end{cases}$$

то он имеет два действительных корня x_1 и x_2, *больших* числа d.



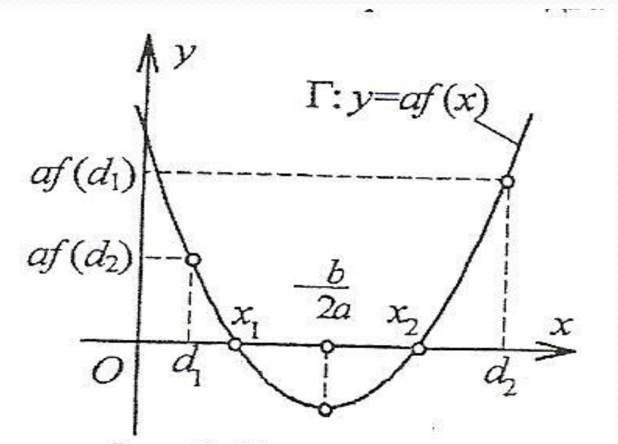
Задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения

- **Следствие из Т1 и 2**

Пусть даны два действительных числа d_1 и d_2. Если для квадратного трехчлена $f(x)$ выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ af(d_1) > 0 \\ af(d_2) > 0 \\ d_1 < -\dfrac{b}{2a} < d_2 \end{cases}$$

то он имеет два действительных корня x_1 *и* x_2, *принадлежащих промежутку* $(d_1;d_2)$



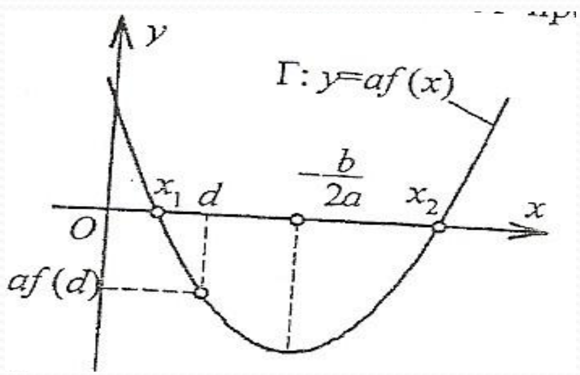
Задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения

- **Теорема 3.**

Пусть дано некоторое действительное число *d*. Если для квадратного трехчлена $f(x)$ выполняется условие

$$af(d) < 0$$

то он имеет два действительных корня x_1 и x_2, расположенных по разные стороны от числа *d*.

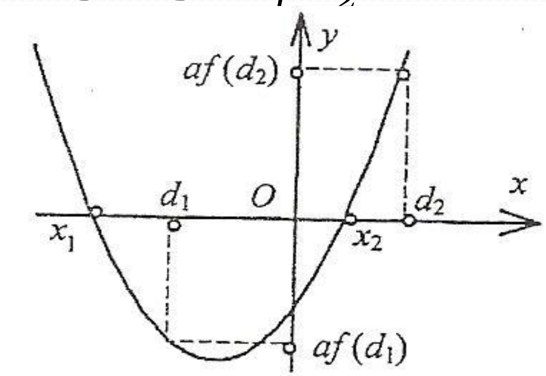


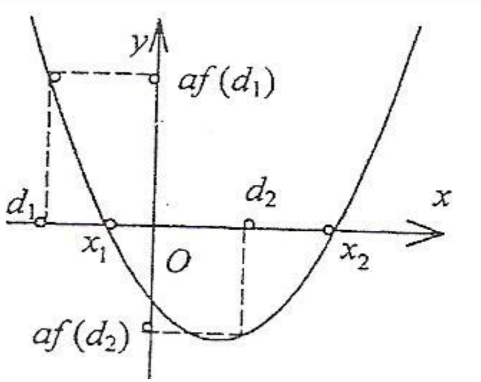
Задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения

- **Теорема 4.**

Пусть даны два действительных числа d_1 и d_2 : $d_1 < d_2$. Если для квадратного трехчлена $f(x)$ выполняется условие $f(d_1)f(d_2) < 0$

, то квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два действительных корня, один из которых принадлежит промежутку $(d_1;d_2)$, а другой не принадлежит промежутку $[d_1;d_2]$.





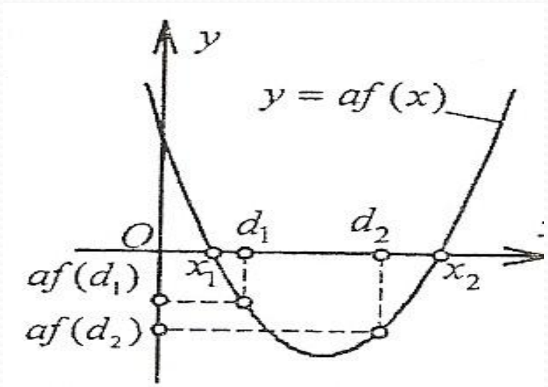
Задачи, связанные с расположением корней квадратного уравнения

- **Теорема 5.**

Пусть даны два действительных числа d_1 и d_2 : $d_1 < d_2$. Если для квадратного трехчлена $f(x)$ выполняются условия

$$\begin{cases} af(d_1) < 0 \\ af(d_2) < 0 \end{cases}$$

, то квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два действительных корня, один из которых меньше числа d_1, а второй – больше числа d_2



Квадратные неравенства

$ax^2 + bx + c > 0 \quad (a \neq 0).$ (1)

Возможны следующие случаи:

1. Если $a > 0$ и дискриминант $D < 0$ (рис. 19), то решением неравенства являются все $x \in \mathrm{R}$.

2. Если $a > 0$ и $D = 0$ (рис. 20), то $x \in \left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b}{2a}; +\infty\right)$.

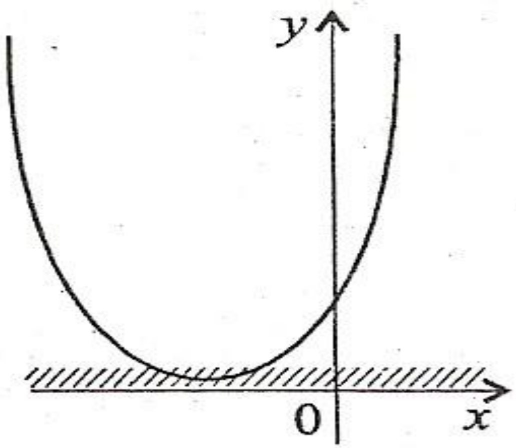


Рис. 19

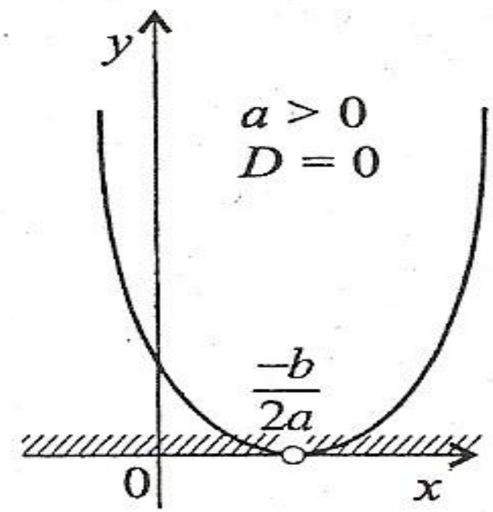


Рис. 20

Квадратные неравенства

3. Если $a > 0$ и $D > 0$ (рис. 21), то $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, где x_1, x_2 — соответственно меньший и больший корни квадратного трехчлена.

4. Если $a < 0$ и $D < 0$ (рис. 22), то $x \in \varnothing$.

5. Если $a < 0$ и $D = 0$ (рис. 23), то $x \in \varnothing$.

6. Если $a < 0$ и $D > 0$ (рис. 24), то $x \in (x_1; x_2)$, где x_1, x_2 — соответственно меньший и больший корни квадратного трехчлена.

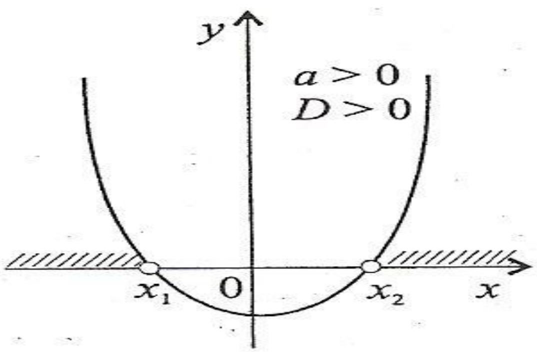


Рис. 21

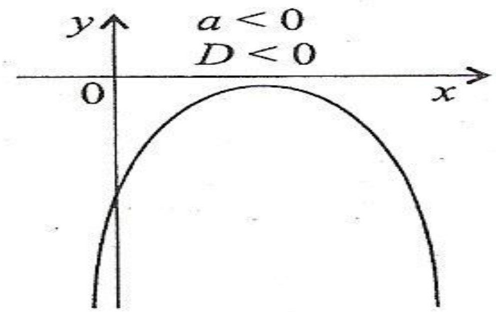


Рис. 22

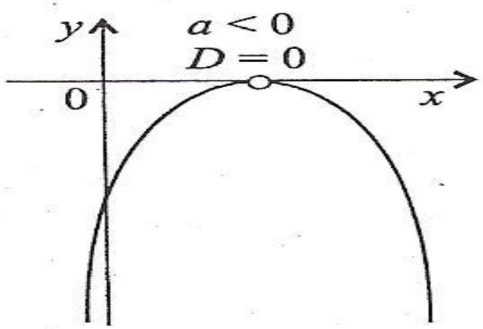


Рис. 23

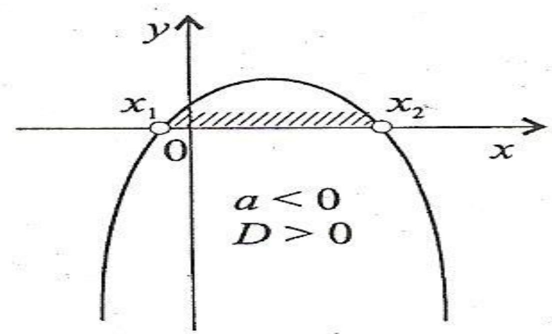


Рис. 24