ЕГЭ по математике

ЗАДАНИЕ С2

Подготовил:
Кондратьев Даниил

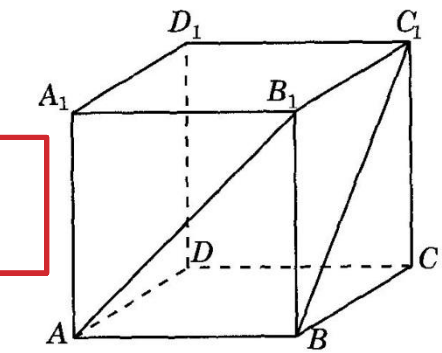
Начать

Суть Задания

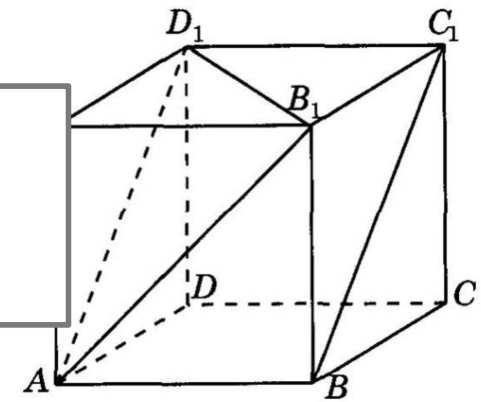
Задания группы C2 связаны с нахождением:

- Угла между прямыми
- Угла между прямой и плоскостью
- Угла между двумя плоскостями
- Расстояния от точки до прямой
- Расстояния от точки до плоскости
- Расстояния между двумя прямыми

Задание 1.1



В единичном кубе A...D_1 найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



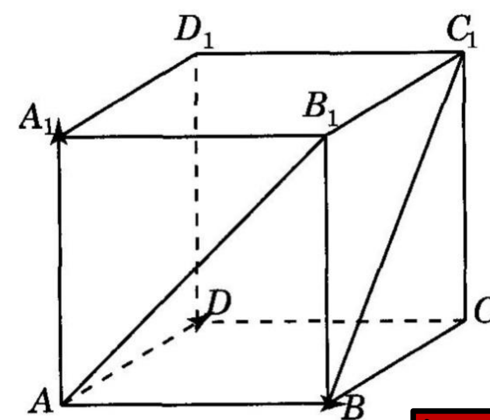
Первое решение.

Прямая AD_1 параллельна прямой BC_1 и, следовательно, угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу B_1AD_1. Треугольник B_1AD_1 равносторонний и, значит, угол B_1AD_1 равен 60°.

Второе решение.

Введем систему координат, считая началом координат точку A, осями координат — прямые AB, AD, AA_1. Вектор $\overrightarrow{AB_1}$ имеет координаты (1, 0,1). Вектор $\overrightarrow{BC_1}$ имеет координаты (0,1,1). Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла ϕ между

Векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$. Получим $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ и, значит, угол ϕ равен 60°.

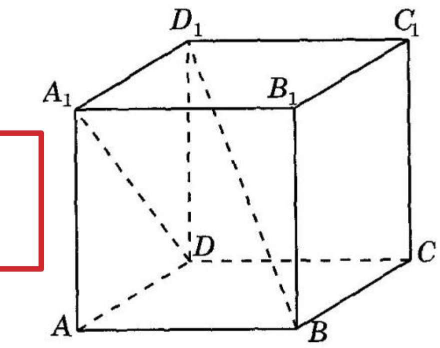


Следовательно, искомый угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен 60°.

Ответ:60°

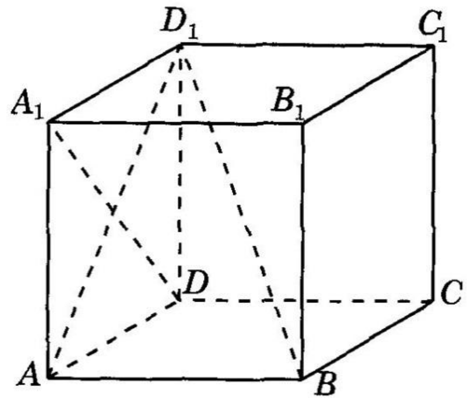
Задание 1.2

В единичном кубе A...D_1 найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1.



Первое решение.

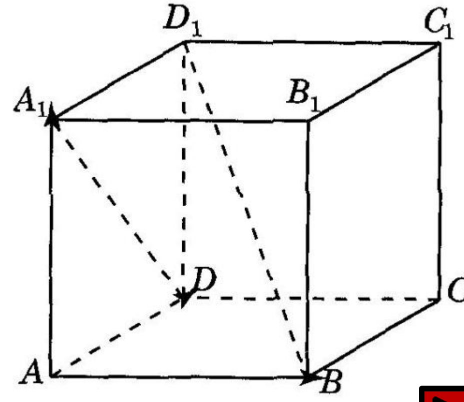
Рассмотрим ортогональную проекцию AD_1 прямой BD_1 на плоскость ADD_1. Прямые AD_1 и DA_1 перпендикулярны. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что прямые DA_1 и BD_1 также перпендикулярны, т. е. искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1 равен 90°.



Второе решение.

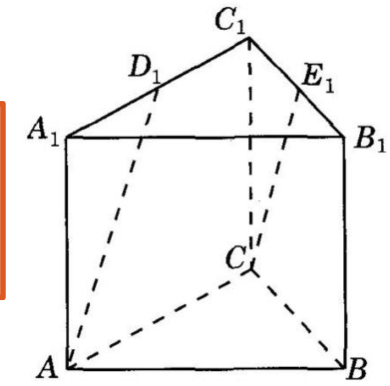
Введем систему координат, считая началом координат точку A, осями координат — прямые AB, AD, AA_1. Вектор $\overrightarrow{DA_1}$ имеет координаты (0, -1,1). Вектор $\overrightarrow{BD_1}$ имеет координаты (-1,1,1). Скалярное произведение этих векторов равно нулю и, значит, искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1, равен 90°.

Ответ: 90°



Задание 1.3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1, где D_1 и E_1 — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1.

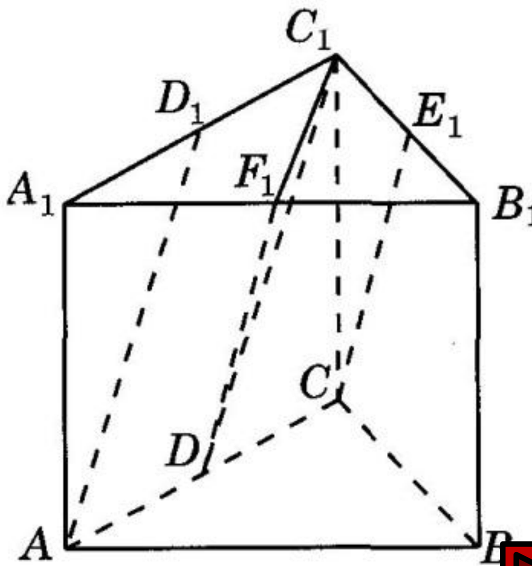


Первое решение.

Обозначим D и F_1 соответственно середины ребер AC и A_1B_1.Прямые DC1 и DF1 будут соответственно параллельны AD1 и CE1. Следовательно, угол между прямыми AD1 и CE1 будет равен углу C1DF1.

Треугольник C1DF1 равнобедренный, $C_1D = DF_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя теорему косинусов, получаем $\cos\angle C_1DF_1 = 0{,}7.$

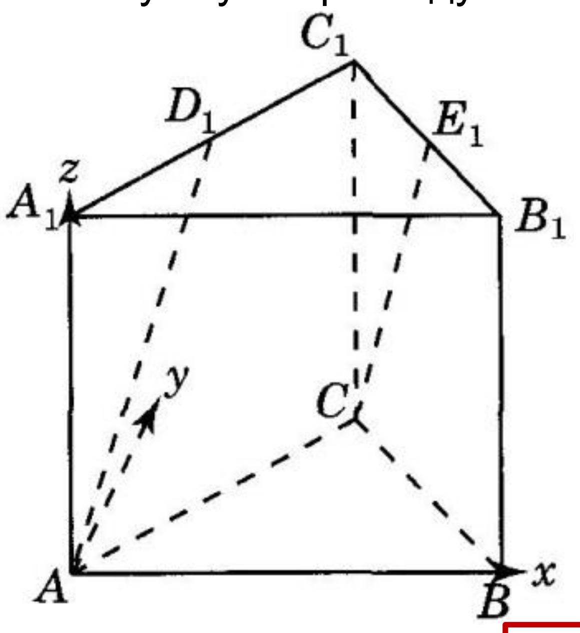


Второе решение.

Введем систему координат, считая началом координат точку А, как показано на рисунке.

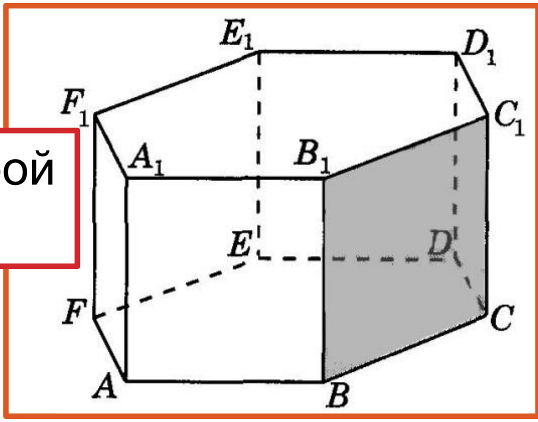
Точка С имеет координаты $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, точка D1 имеет координаты $\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$, точка E1 имеет координаты $\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$. Вектор $\overrightarrow{AD_1}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$. Вектор $\overrightarrow{CE_1}$ координаты $\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},1\right)$. Косинус угла между прямыми AD1 и CE1 равен косинусу угла между векторами $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{CE_1}$. Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла ϕ между векторами. Получим ϕ=0,7

Ответ: 0,7



Задание 2.1

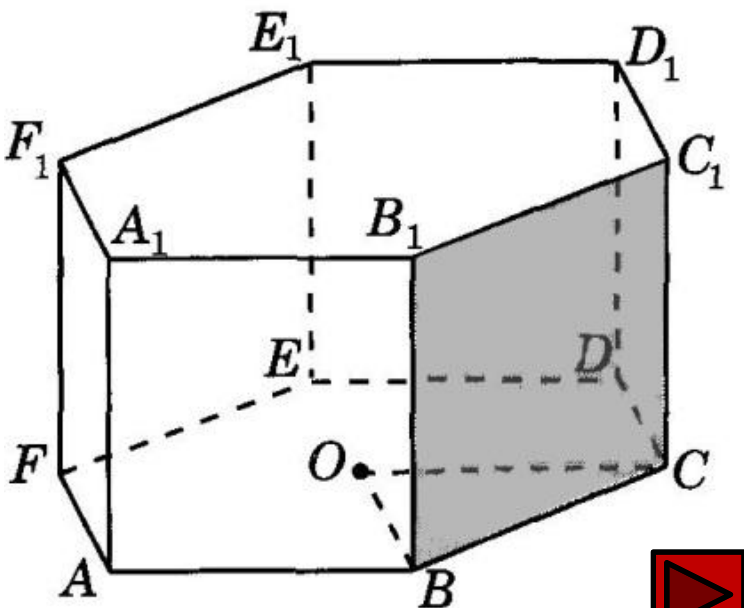
В правильной шестиугольной призме A.. .F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BCC_1.



Решение.

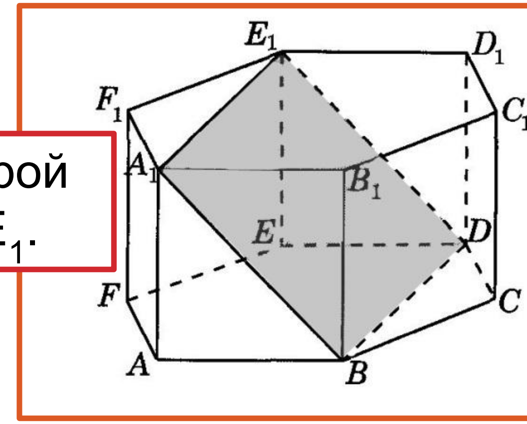
Пусть O — центр нижнего основания призмы. Прямая BO параллельна AF. Так как плоскости ABC и BCC_1 перпендикулярны, то искомым углом будет угол OBC. Так как треугольник OBC равносторонний, то этот угол будет равен 60°.

Ответ: 60°



Задание 2.2

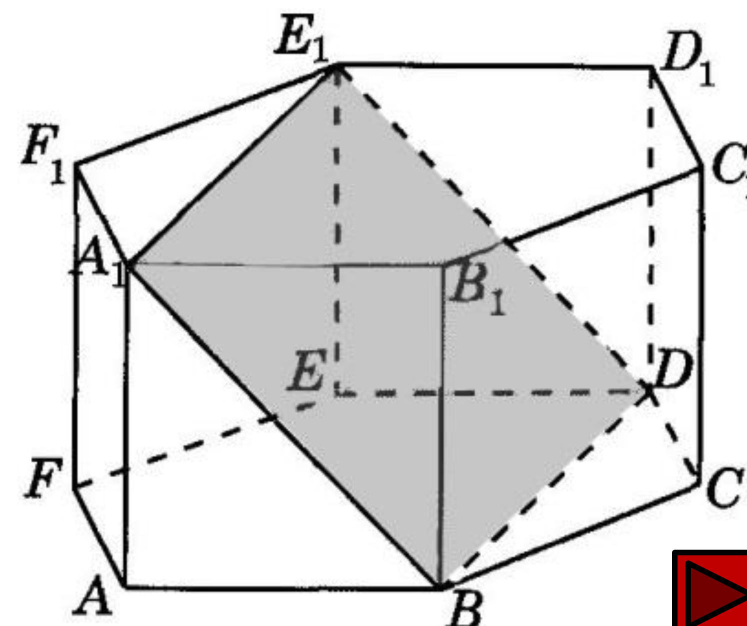
В правильной шестиугольной призме A.. .F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1.



Решение.

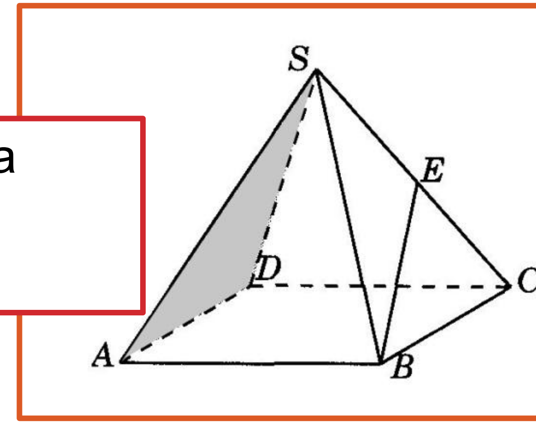
Так как прямые BB_1 и CC_1 параллельны, то искомый угол будет равен углу между прямой BB_1 и плоскостью BDE_1. Прямая BD, через которую проходит плоскость BDE_1, перпендикулярна плоскости ABB_1 и, значит, плоскость BDE_1 перпендикулярна плоскости ABB_1. Следовательно, искомый угол будет равен углу A_1BB_1; т. е. равен 45°.

Ответ: 45°



Задание 2.3

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E — середина ребра SC.



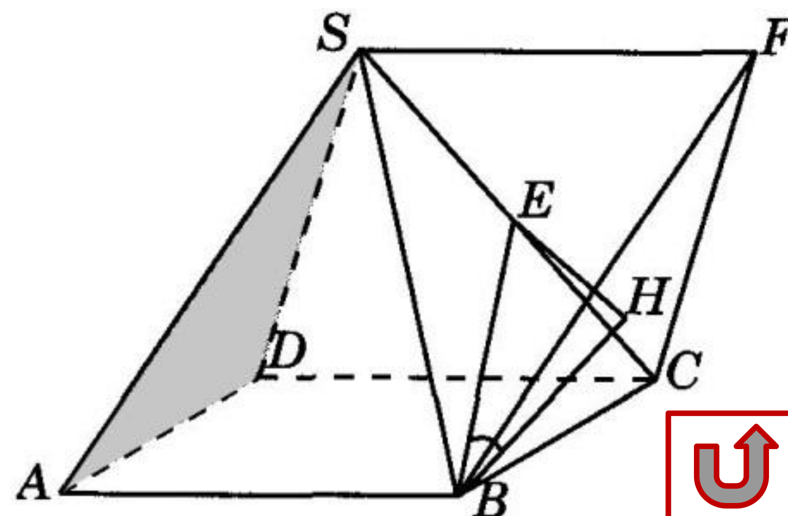
Решение.

Через вершину S проведем прямую, параллельную прямой AB, и отложим на ней отрезок SF, равный отрезку AB. В тетраэдре SBCF все ребра равны 1 и плоскость BCF параллельна плоскости SAD. Перпендикуляр EH, опущенный из точки E на плоскость BCF,

равен половине высоты тетраэдра, т. е равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Угол между прямой BE и плоскостью SAD

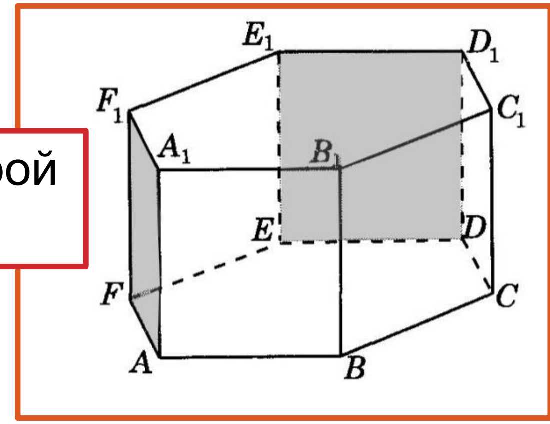
равен углу EBH, синус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

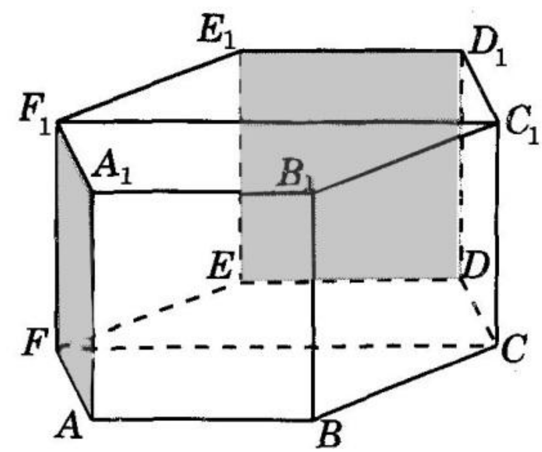
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$



Задание 3.1

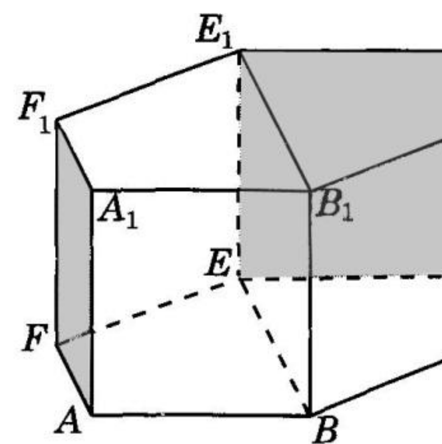
В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1.





Первое решение.

Так как плоскость FCC_1 параллельна плоскости DEE_1, то искомый угол равен углу между плоскостями AFF_1 и FCC_1. Так как плоскости AFF_1 и FCQ перпендикулярны плоскости ABC, то соответствующим линейным углом будет угол AFC, который равен 60°.



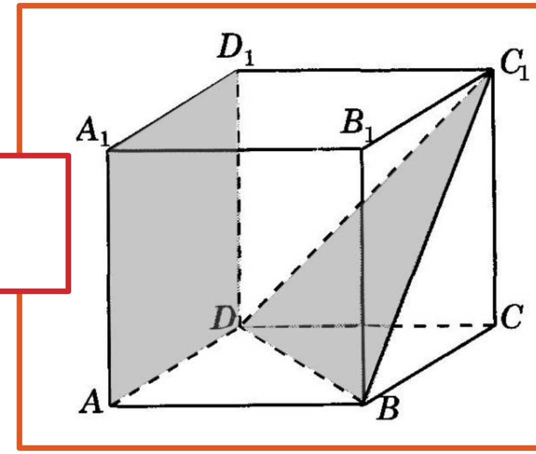
Второе решение.

Так как плоскость AFF_1 параллельна плоскости BEE_1, то искомый угол равен углу между плоскостями BEE_1 и DEE_1. Так как плоскости BEE_1 и DEE_1 перпендикулярны плоскости ABC, то соответствующим линейным углом будет угол BED, который равен 60°

Ответ: 60°

Задание 3.2

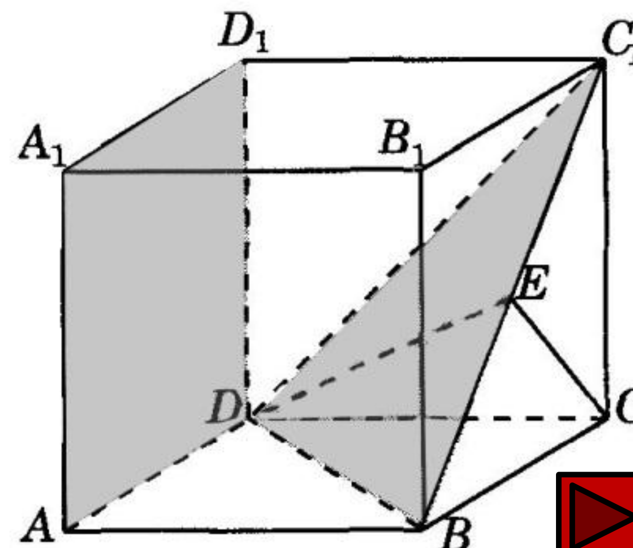
В единичном кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ADD_1 и BDC_1.



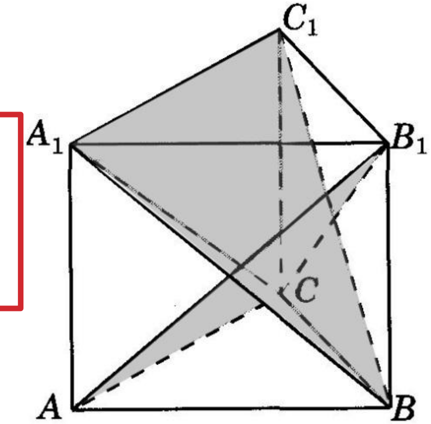
Решение.

Так как плоскость ADD_1 параллельна плоскости BCC_1 то искомый угол равен углу между плоскостями BCC_1 и BDC_1. Пусть E — середина отрезка BC_1. Тогда прямые CE и DE будут перпендикулярны прямой BC_1 и, следовательно, угол CED будет линейным углом между плоскостями BCC_1 и BDC_1. Треугольник CED прямоугольный, катет CD равен 1, катет CE равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $tg\angle CED = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$



Задание 3.3



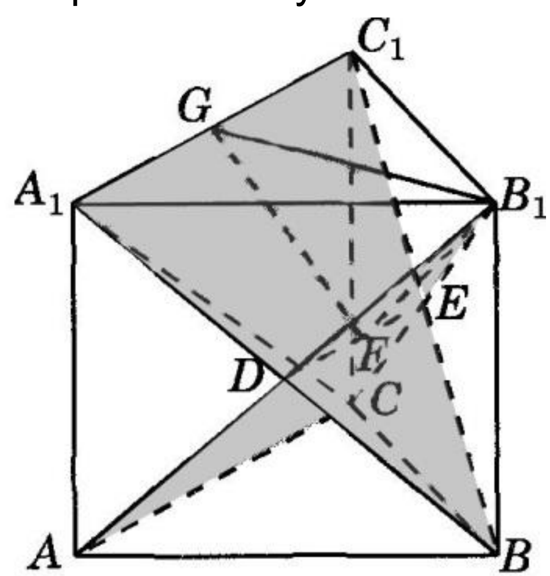
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1.

Решение:

Пусть DE—линия пересечения данных плоскостей, F — середина отрезка DE, G — середина отрезка A1C1. Угол GFB1 является линейным углом между данными плоскостями.

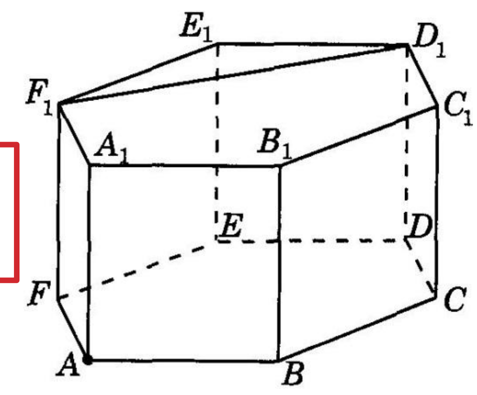
В треугольнике GFB1 имеем: $FG = FB_1 = \dfrac{\sqrt{7}}{4}, \quad GB_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ По теореме косинусов находим $\cos\angle CFB_1 = \dfrac{1}{7}.$

Ответ: $\dfrac{1}{7}.$



Задание 4.1

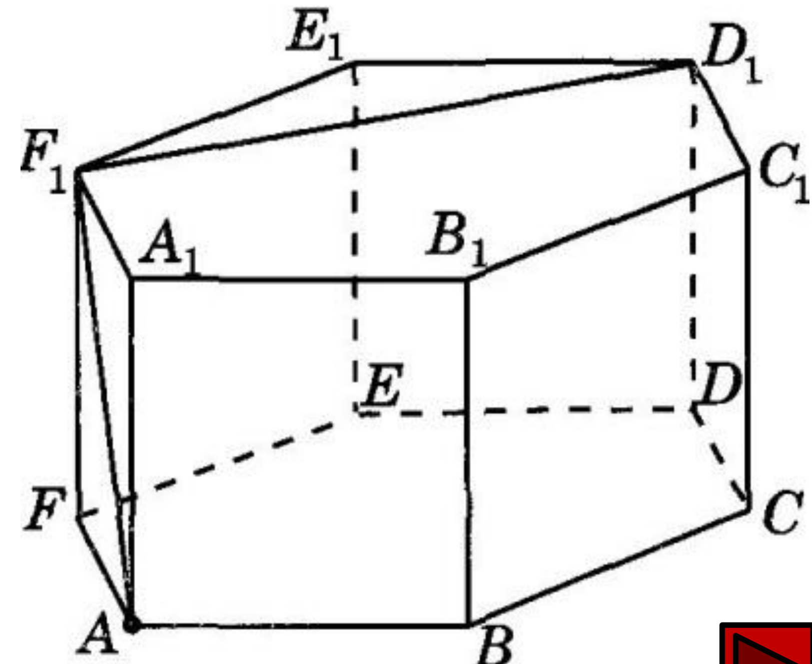
В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1F_1.



Решение.

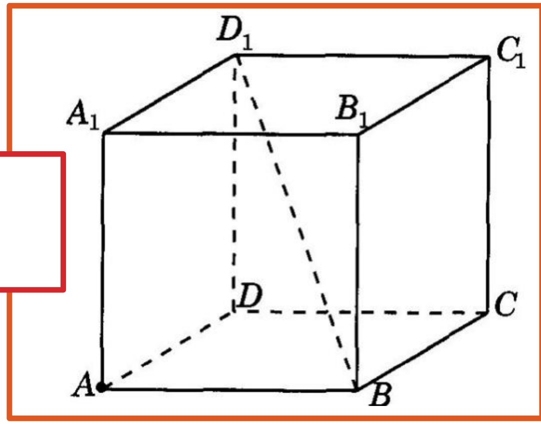
Так как прямая D1F1 перпендикулярна плоскости AFF1, то отрезок AF1 будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую D1F1. Его длина равна $\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}.$



Задание 4.2

В единичном кубе A…D_1 найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.



Первое решение.

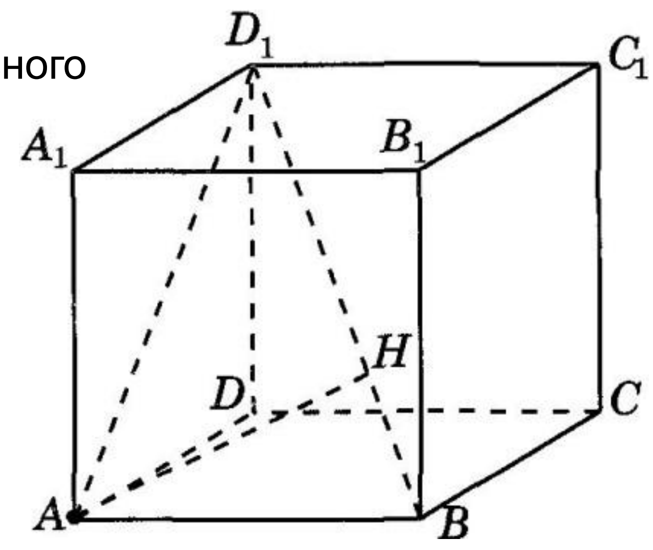
Искомым перпендикуляром является высота AH прямоугольного треугольника ABD1, в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Для площади S этого треугольника имеют место равенства

$$2S = AD * AD_1 = BD_1 * AH.$$

Откуда находим $AH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}.$



Второе решение.

Искомым перпендикуляром является высота AH прямоугольного треугольника ABD_1, в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Треугольники BAD_1 и BHA подобны по трем углам. Следовательно,

$$AB : BD_1 = AH : AB.$$

Откуда находим $AH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Третье решение.

Искомым перпендикуляром является высота AH прямоугольного треугольника ABD_1; в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

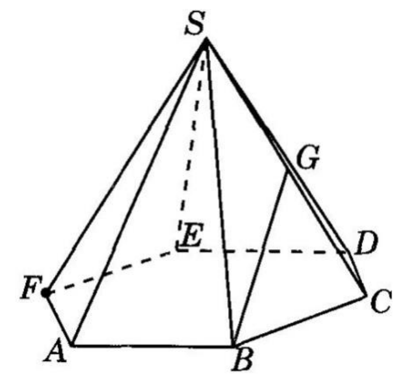
Откуда $\sin \angle ABD_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ и, следовательно,

$$AH = AB * \sin \angle ABH = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Задание 4.3

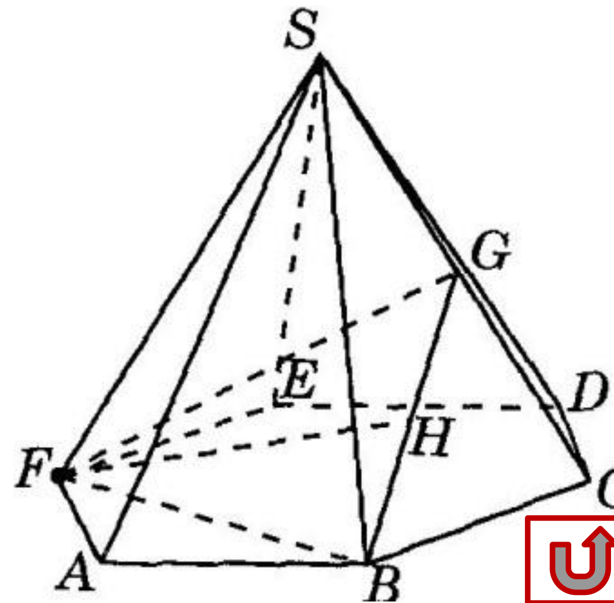
В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG, где G — середина ребра SC.



Решение:

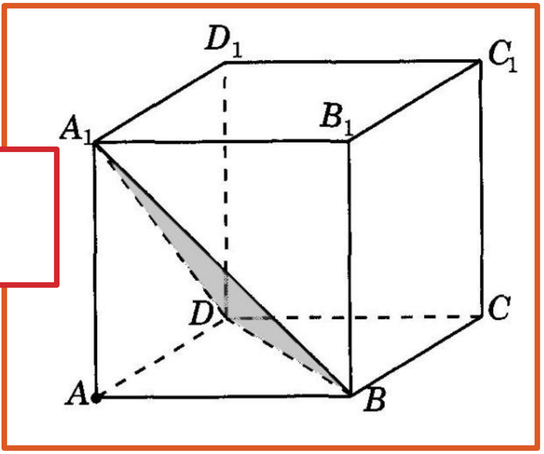
Искомое расстояние от точки F до прямой BG равно высоте FH треугольника FBG, в котором $FB = FG = \sqrt{3},\ BG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. По теореме Пифагора находим $FH = \frac{\sqrt{42}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$.



Задание 5.1

В единичном кубе A...D_1 найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.



Первое решение.

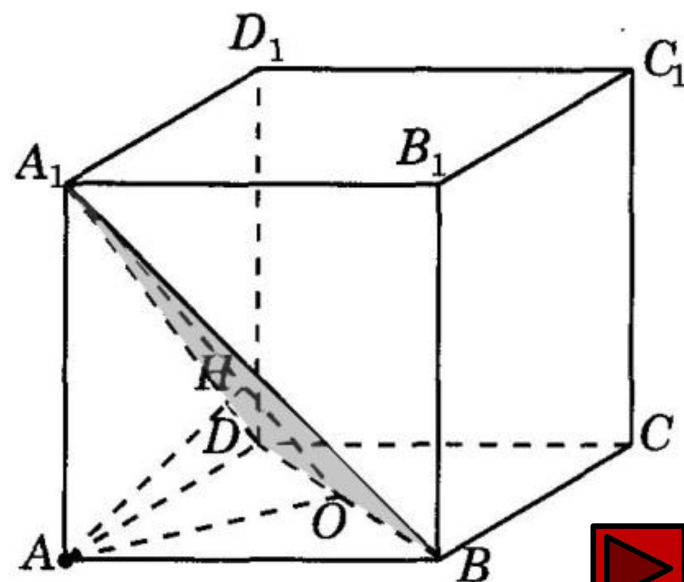
Пусть O — середина отрезка BD. Прямая BD перпендикулярна плоскости AOA_1. Следовательно, плоскости BDA_1 и AOA_1 перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDA_1, является высота AH прямоугольного треугольника AOA_1, в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Для площади S этого треугольника имеют место равенства

$$2S = AO * AA_1 = OA_1 * AH.$$

Откуда находим $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Второе решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Прямая BD перпендикулярна плоскости AOA_1. Следовательно, плоскости BDA_1 и AOA_1 перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDA_1 является высота AH прямоугольного треугольника AOA_1 в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Треугольники AOA_1 и HOA подобны по трем углам. Следовательно, $AA_1 : OA_1 = AH : AO$.

Откуда находим $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Третье решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Прямая BD перпендикулярна плоскости AOA_1. Следовательно, плоскости BDA_1 и AOA_1 перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDA_1, является высота AH прямоугольного треугольника AOA_1 в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

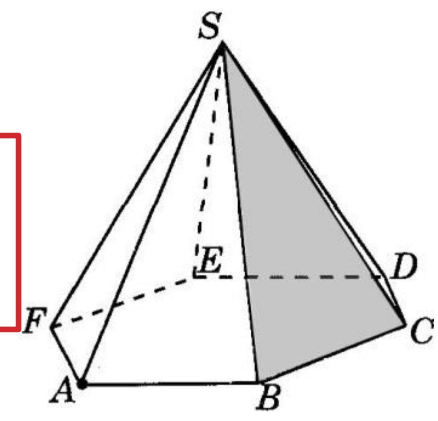
Откуда $\sin \angle AOA_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ и, следовательно,

$$AH = AO * \sin \angle AOH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание 5.2

В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC.



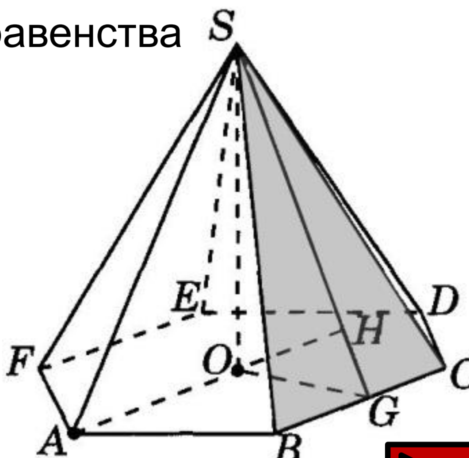
Первое решение.

Пусть O — центр основания пирамиды. Пря-мая AO параллельна прямой BC и, значит, параллельна плоскости SBC. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости SBC. Пусть G — середина отрезка BC. Тогда прямая 0G перпендикулярна BC и искомым перпендикуляром, опущенным из точки O на плоскость SBC,

является высота OH прямоугольного треугольника SOG. В этом треугольнике $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $SO = \sqrt{3}$. Для площади S этого треугольника имеют место равенства

$2S = OG * SO = SG * OH$. Откуда находим $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$.



Второе решение.

Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая AO параллельна прямой BC и, значит, параллельна плоскости SBC. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости SBC. Пусть G — середина отрезка BC. Тогда прямая OG перпендикулярна BC и искомым перпендикуляром, опущенным из точки O на плоскость SBC, является высота OH прямоугольного треугольника SOG. В этом треугольнике

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ SG = \frac{\sqrt{15}}{2},\ \ SO = \sqrt{3}.$$

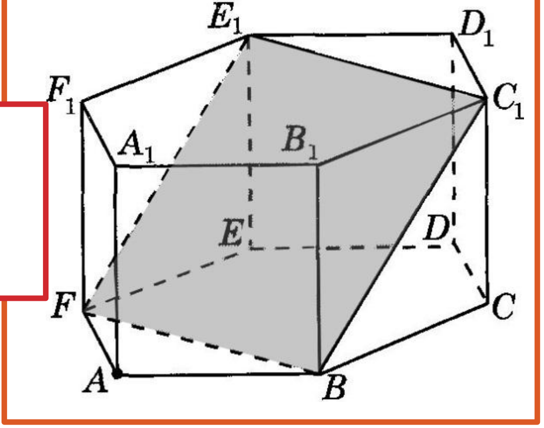
Треугольники SOG и OHG подобны по трем углам. Следовательно , SO : SG = OH : OG.

Откуда находим $OH = \dfrac{\sqrt{15}}{5}.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{15}}{5}.$

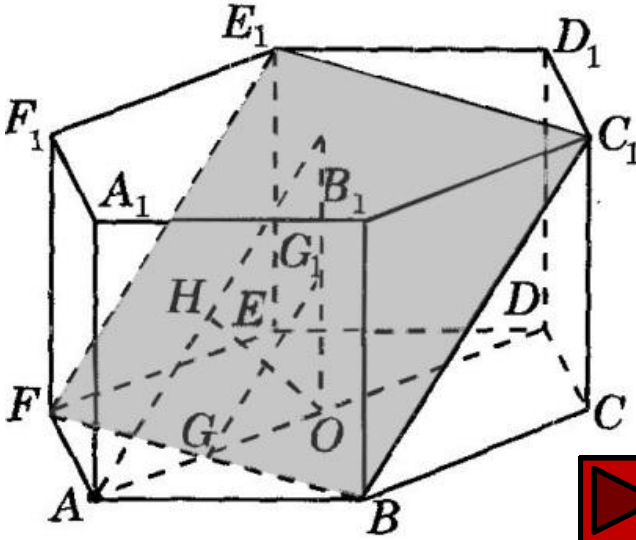
Задание 5.3

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$; все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.



Первое решение.

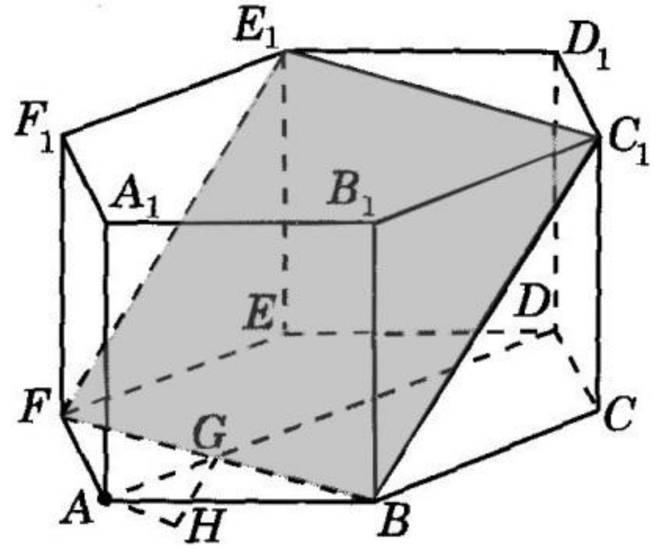
Пусть O и O_1 — центры оснований призмы. Прямая AO_1 параллельна плоскости BFE_1 и, следовательно, расстояние от точки A до плоскости BFE_1 равно расстоянию от прямой AO_1 до плоскости BFE_1 . Плоскость AOO_1 перпендикулярна плоскости BFE_1 и, следовательно, расстояние от прямой $A0_1$ до плоскости BFE_1 равно расстоянию от прямой AO_1 до линии пересечения GG_1 плоскостей AOO_1 и BFE_1. Треугольник $A00_1$ прямоугольный, $AO = OO_1 = 1$, GG_1 — его средняя линия. Следовательно, расстояние между прямыми AO_1 и GG_1 равно половине высоты OH треугольника AOO_1 т. е. равно $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



Второе решение.

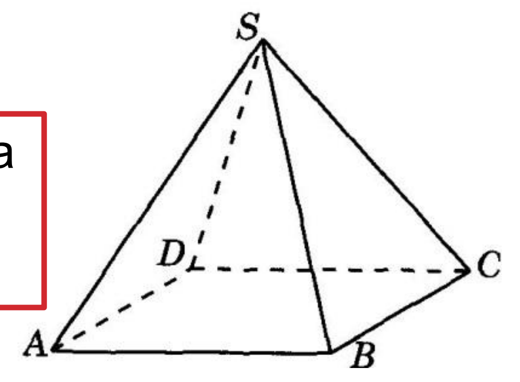
Пусть G—точка пересечения прямых AD и BF. Угол между прямой AD и плоскостью BFE_1 равен углу между прямыми BC и BC_1 и равен 45°. Перпендикуляр AH, опущенный из точки A на плоскость BFE_1, равен AG • sin 45°. Так как AG = 0,5, то $AH = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



Задание 6.1

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.



Решение.

Прямая BC параллельна плоскости SAD, в которой лежит прямая SA. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости SAD.

Пусть E и F соответственно середины ребер AD и BC. Тогда искомым перпендикуляром будет высота FH треугольника SEF. В треугольнике SEF имеем:

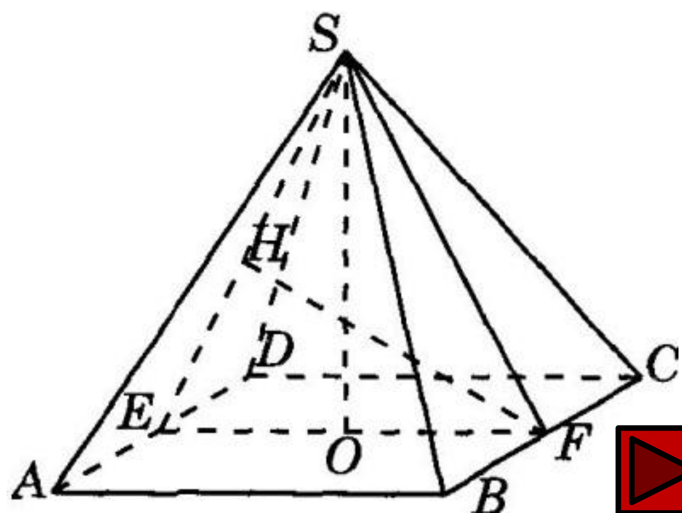
$$EF = 1, \; SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

высота SO равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Для площади S треугольника SEF имеют место равенства

$$2S = EF * SO = SE * FH,$$

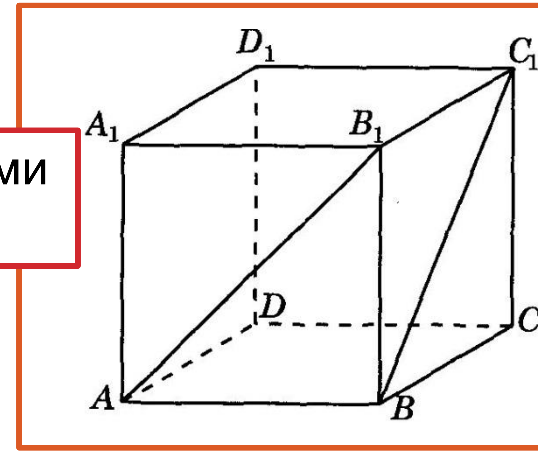
из которых получаем $FH = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



Задание 6.2

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 .

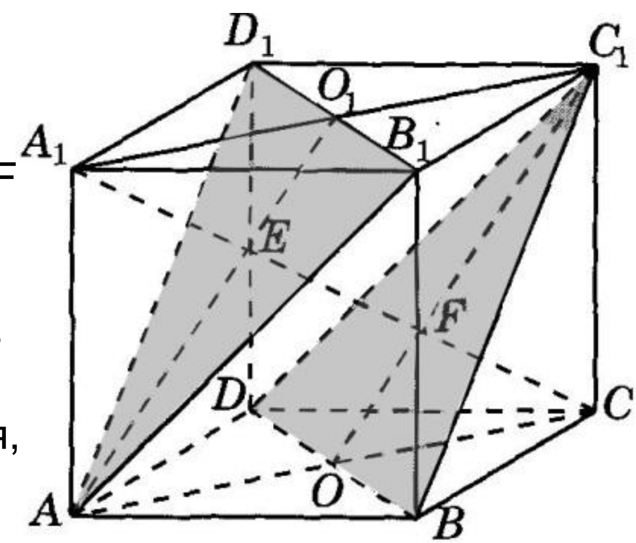


Решение.

Плоскости AB_1D_1 и BDC_1, в которых лежат данные прямые, параллельны. Следовательно, расстояние между этими скрещивающимися прямыми равно расстоянию между соответствующими плоскостями.

Диагональ CA_1 куба перпендикулярна этим плоскостям. Обозначим E и F точки пересечения диагонали CA_1 соответственно с плоскостями AB_1D_1 и BDC_1. Длина отрезка EF будет равна расстоянию между прямыми AB_1 и BC_1. Пусть O и O_1 соответственно центры граней AHCD и $A_1B_1C_1D_1$ куба. В треугольнике ACE отрезок OF параллелен AE и проходит через середину AC. Следовательно, OF — средняя линия треугольника ACE и, значит, EF = FC. Аналогично доказывается, что O_1E — средняя линия треугольника $A_1C_1F_1$и, значит, A_1E = EF. Таким образом, EF оставляет одну треть диагонали CA_1

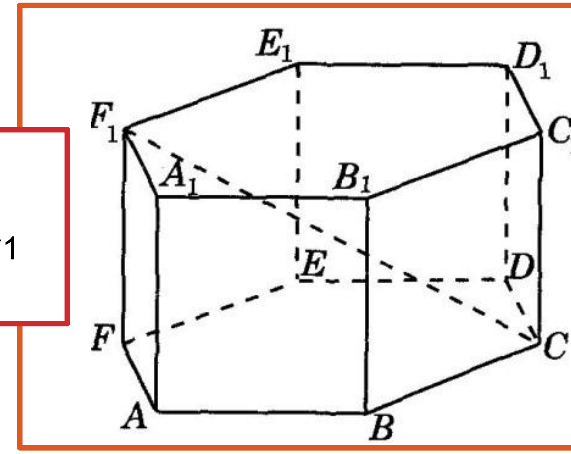
т.е. $EF = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Задание 6.3

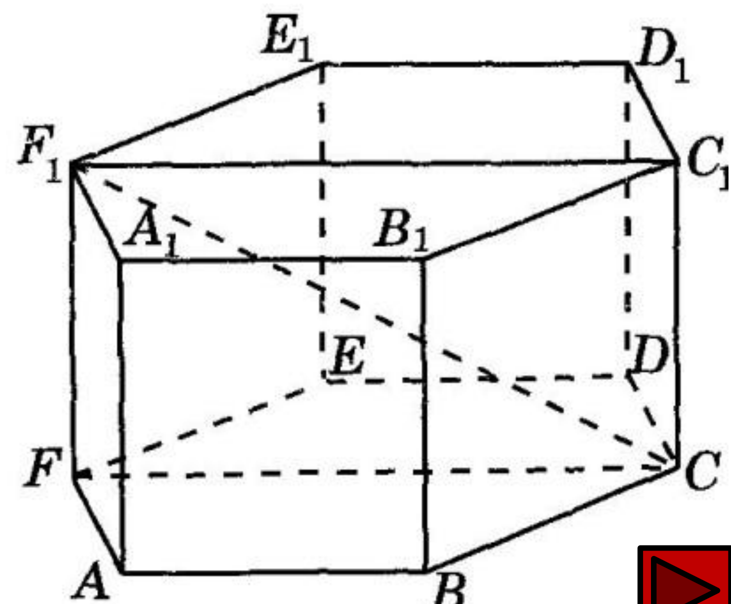
В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1.



Решение.

Расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и CF_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями ABB_1 и CFF_1 в которых лежат эти прямые. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



The End