

ЗАДАНИЕ С2

Подготовил:

Кондратьев Даниил

Начать

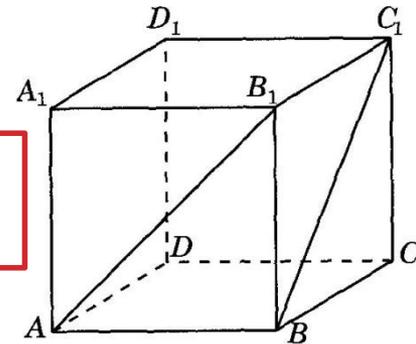
Суть Задания

Задания группы С2 связаны с нахождением:

- Угла между прямыми
- Угла между прямой и плоскостью
- Угла между двумя плоскостями
- Расстояния от точки до прямой
- Расстояния от точки до плоскости
- Расстояния между двумя прямыми

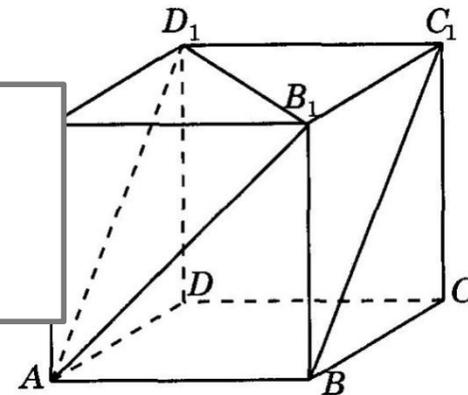
Задание 1.1

В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .



Первое решение.

Прямая AD_1 параллельна прямой BC_1 и, следовательно, угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен углу B_1AD_1 . Треугольник B_1AD_1 равносторонний и, значит, угол B_1AD_1 равен 60° .



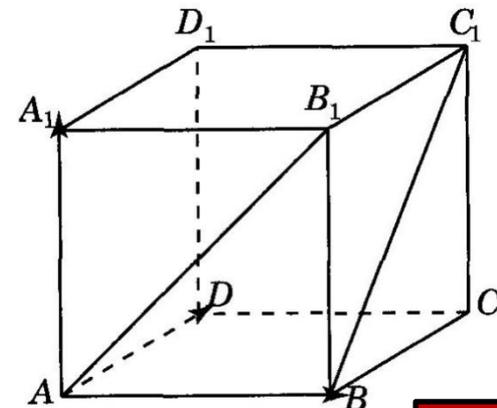
Второе решение.

Введем систему координат, считая началом координат точку A , осями координат — прямые AB , AD , AA_1 . Вектор $\overrightarrow{AB_1}$ имеет координаты $(1, 0, 1)$. Вектор $\overrightarrow{BC_1}$ имеет координаты $(0, 1, 1)$. Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла φ между

Векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$. Получим $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ и, значит, угол φ равен 60° .

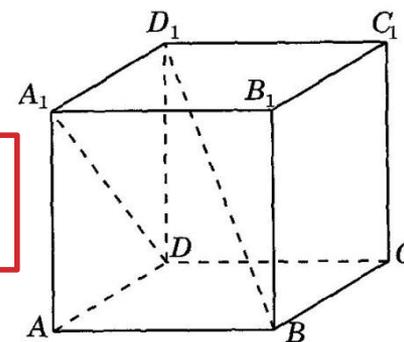
Следовательно, искомый угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен 60° .

Ответ: 60°



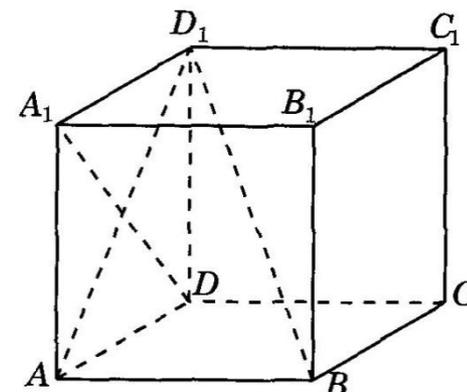
Задание 1.2

В единичном кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1 .



Первое решение.

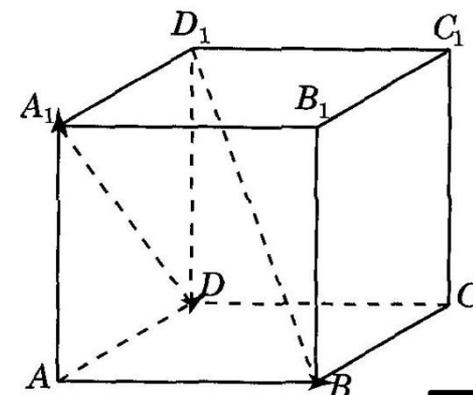
Рассмотрим ортогональную проекцию AD_1 прямой BD_1 на плоскость ADD_1 . Прямые AD_1 и DA_1 перпендикулярны. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что прямые DA_1 и BD_1 также перпендикулярны, т. е. искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1 равен 90° .



Второе решение.

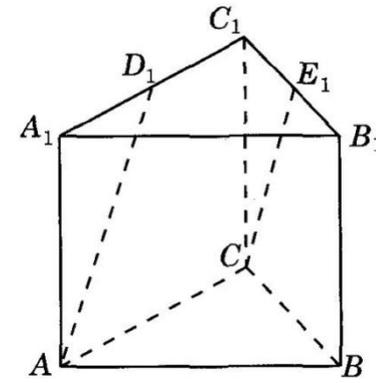
Введем систему координат, считая началом координат точку A , осями координат — прямые AB , AD , AA_1 . Вектор $\overrightarrow{DA_1}$ имеет координаты $(0, -1, 1)$. Вектор $\overrightarrow{BD_1}$ имеет координаты $(-1, 1, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю и, значит, искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1 , равен 90° .

Ответ: 90°



Задание 1.3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1 , где D_1 и E_1 — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1 .

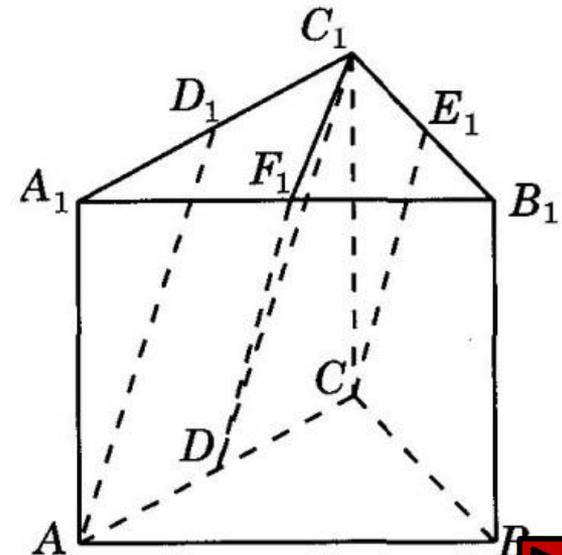


Первое решение.

Обозначим D и F_1 соответственно середины ребер AC и A_1B_1 . Прямые DC_1 и DF_1 будут соответственно параллельны AD_1 и CE_1 . Следовательно, угол между прямыми AD_1 и CE_1 будет равен углу C_1DF_1 .

Треугольник C_1DF_1 равнобедренный, $C_1D = DF_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Используя теорему косинусов, получаем $\cos \angle C_1DF_1 = 0,7$.



Второе решение.

Введем систему координат, считая началом координат точку А, как показано на рисунке.

Точка С имеет координаты $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, точка D1 имеет координаты $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$, точка E1

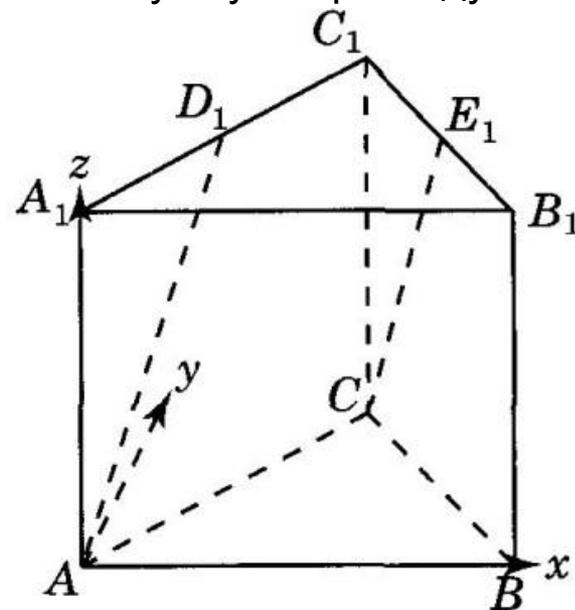
имеет координаты $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$. Вектор $\overrightarrow{AD_1}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$. Вектор $\overrightarrow{CE_1}$

имеет координаты $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right)$. Косинус угла между прямыми AD1 и CE1 равен косинусу угла между

векторами $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{CE_1}$. Воспользуемся формулой нахождения косинуса угла ϕ между

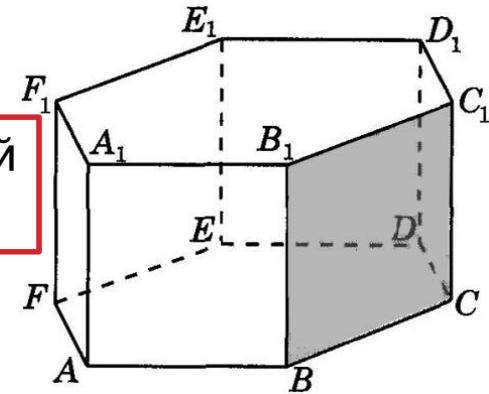
векторами. Получим $\phi=0,7$

Ответ: 0,7



Задание 2.1

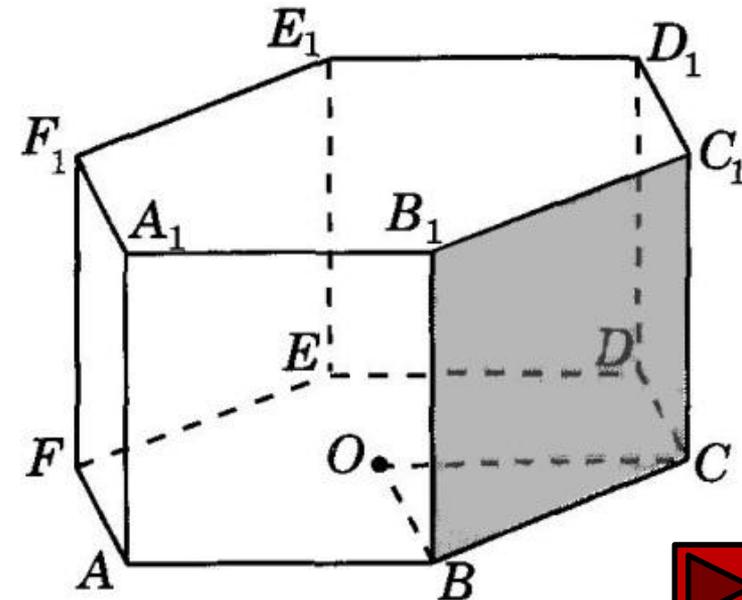
В правильной шестиугольной призме $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF и плоскостью BCC_1 .



Решение.

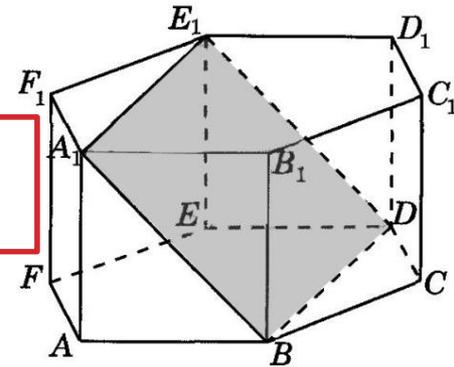
Пусть O — центр нижнего основания призмы. Прямая BO параллельна AF . Так как плоскости ABC и BCC_1 перпендикулярны, то искомым углом будет угол OBC . Так как треугольник OBC равносторонний, то этот угол будет равен 60° .

Ответ: 60°



Задание 2.2

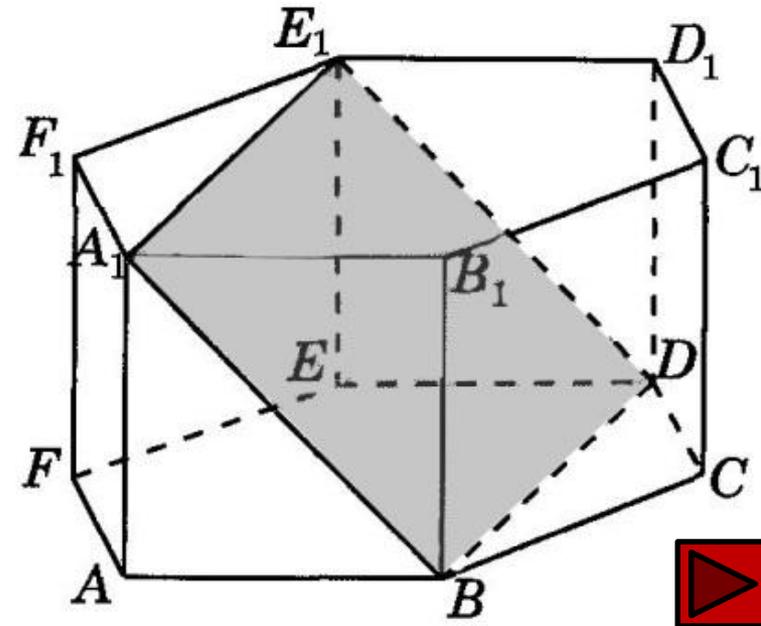
В правильной шестиугольной призме $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1 .



Решение.

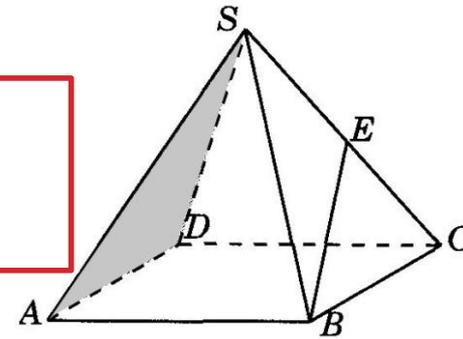
Так как прямые BB_1 и CC_1 параллельны, то искомый угол будет равен углу между прямой BB_1 и плоскостью BDE_1 . Прямая BD , через которую проходит плоскость BDE_1 , перпендикулярна плоскости ABB_1 и, значит, плоскость BDE_1 перпендикулярна плоскости ABB_1 . Следовательно, искомый угол будет равен углу A_1BB_1 ; т. е. равен 45° .

Ответ: 45°



Задание 2.3

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между прямой BE и плоскостью SAD , где E — середина ребра SC .



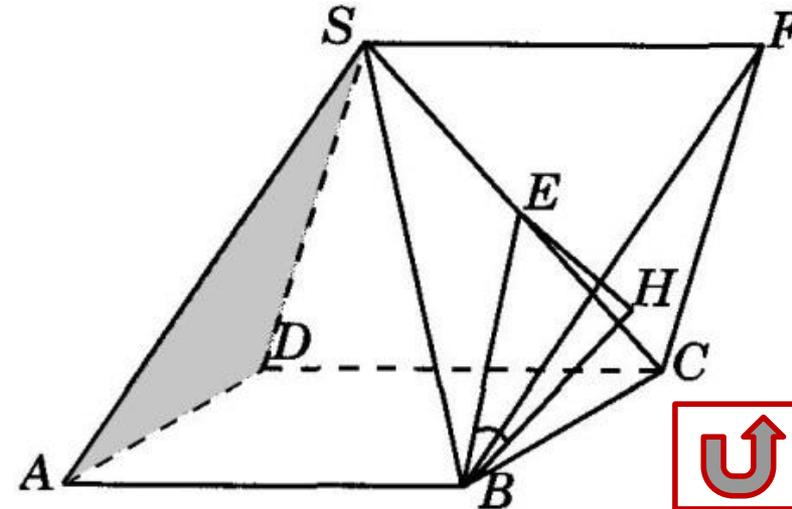
Решение.

Через вершину S проведем прямую, параллельную прямой AB , и отложим на ней отрезок SF , равный отрезку AB . В тетраэдре $SBCF$ все ребра равны 1 и плоскость BCF параллельна плоскости SAD . Перпендикуляр EH , опущенный из точки E на плоскость BCF ,

равен половине высоты тетраэдра, т. е. равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Угол между прямой BE и плоскостью SAD

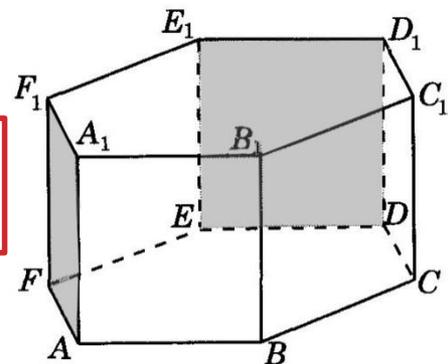
равен углу EBH , синус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$



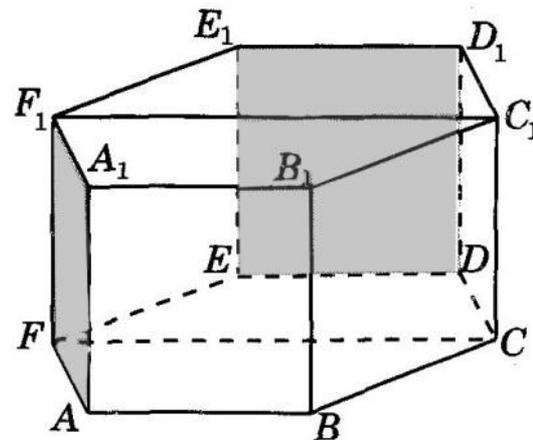
Задание 3.1

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и DEE_1 .



Первое решение.

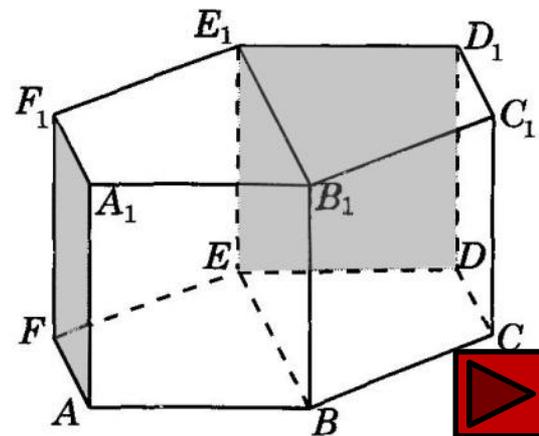
Так как плоскость FCC_1 параллельна плоскости DEE_1 , то искомый угол равен углу между плоскостями AFF_1 и FCC_1 . Так как плоскости AFF_1 и FCQ перпендикулярны плоскости ABC , то соответствующим линейным углом будет угол AFC , который равен 60° .



Второе решение.

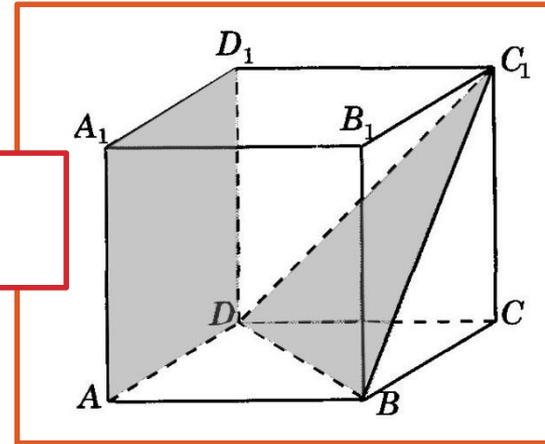
Так как плоскость AFF_1 параллельна плоскости BEE_1 , то искомый угол равен углу между плоскостями BEE_1 и DEE_1 . Так как плоскости BEE_1 и DEE_1 перпендикулярны плоскости ABC , то соответствующим линейным углом будет угол BED , который равен 60° .

Ответ: 60°



Задание 3.2

В единичном кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ADD_1 и BDC_1 .

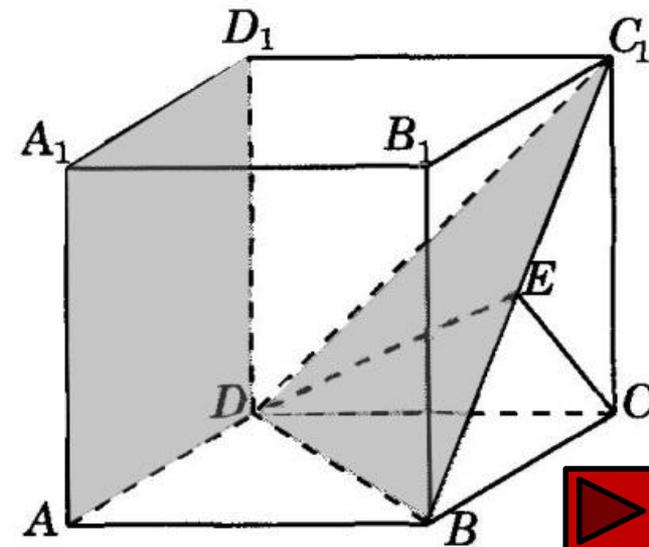


Решение.

Так как плоскость ADD_1 параллельна плоскости BCC_1 , то искомый угол равен углу между плоскостями BCC_1 и BDC_1 . Пусть E — середина отрезка BC_1 . Тогда прямые CE и DE будут перпендикулярны прямой BC_1 и, следовательно, угол CED будет линейным углом между плоскостями BCC_1 и BDC_1 . Треугольник CED прямоугольный, катет CD равен 1, катет CE

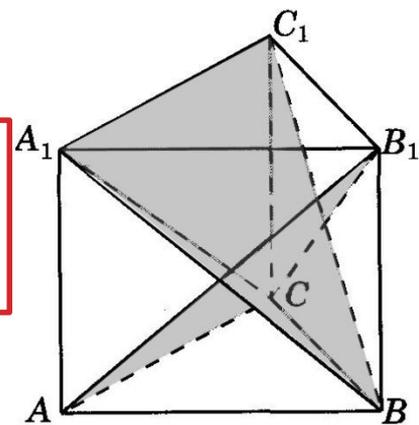
равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $tg \angle CED = \sqrt{2}$

Ответ: $\sqrt{2}$



Задание 3.3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и BA_1C_1 .



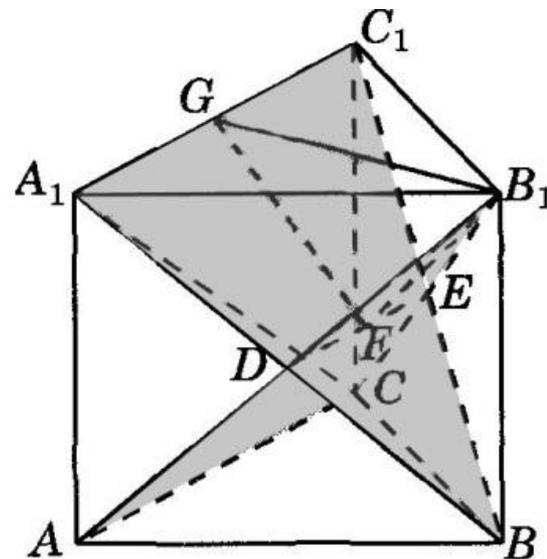
Решение:

Пусть DE — линия пересечения данных плоскостей, F — середина отрезка DE , G — середина отрезка A_1C_1 . Угол GFB_1 является линейным углом между данными плоскостями.

В треугольнике GFB_1 имеем: $FG = FB_1 = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $GB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов

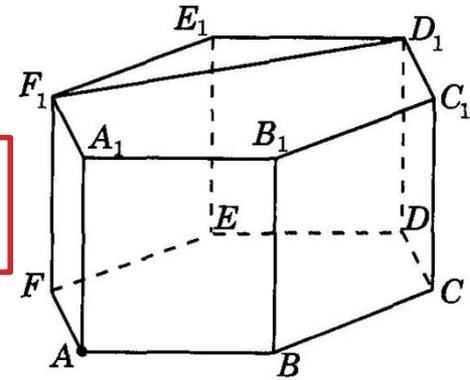
находим $\cos \angle CFB_1 = \frac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.



Задание 4.1

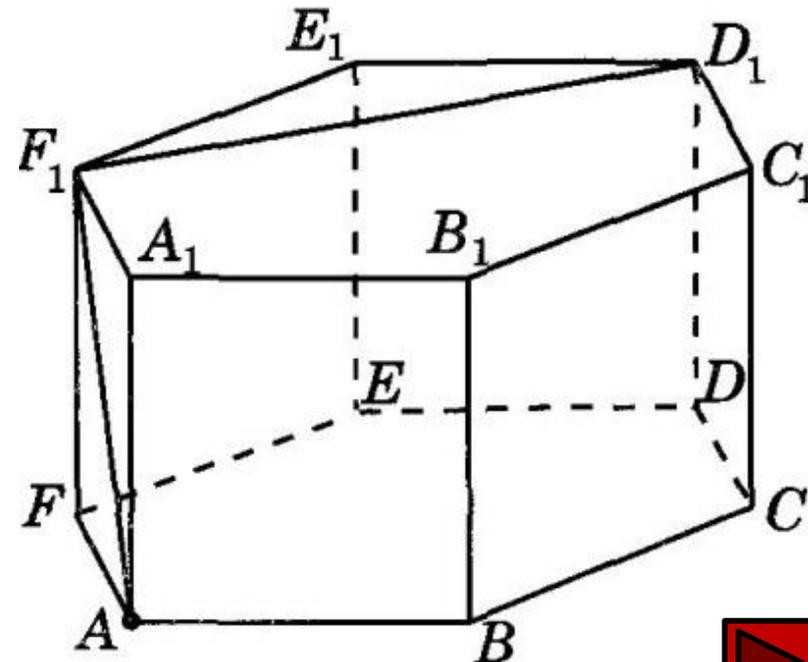
В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1F_1 .



Решение.

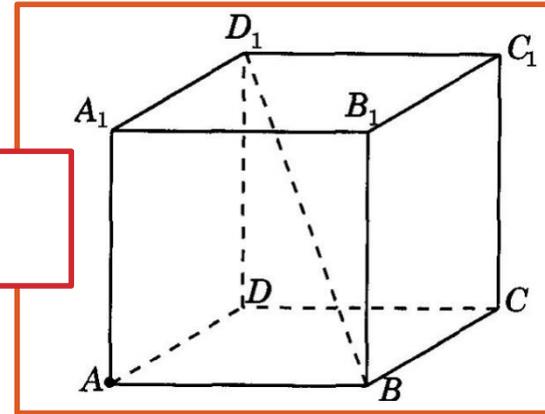
Так как прямая D_1F_1 перпендикулярна плоскости AFF_1 , то отрезок AF_1 будет искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую D_1F_1 . Его длина равна $\sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.



Задание 4.2

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1 .



Первое решение.

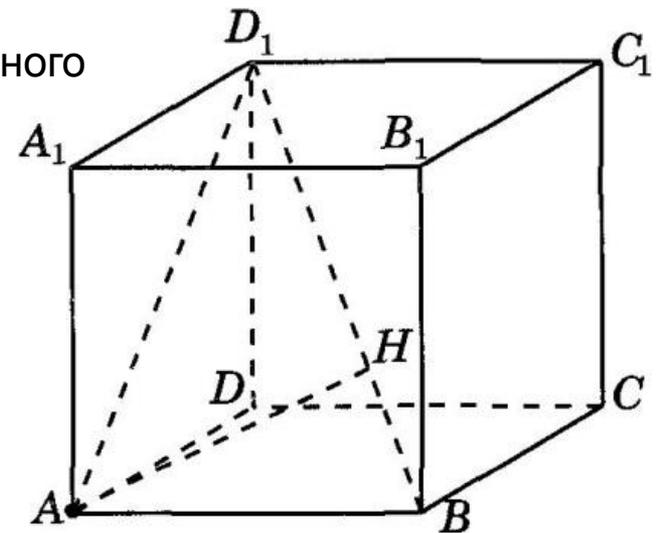
Искомым перпендикуляром является высота AH прямоугольного треугольника ABD_1 , в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Для площади S этого треугольника имеют место равенства

$$2S = AD * AD_1 = BD_1 * AH.$$

Откуда находим $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



Второе решение.

Искомым перпендикуляром является высота AH прямоугольного треугольника ABD_1 , в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Треугольники BAD_1 и BHA подобны по трем углам. Следовательно,

$$AB : BD_1 = AH : AB.$$

Откуда находим $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Третье решение.

Искомым перпендикуляром является высота AH прямоугольного треугольника ABD_1 ; в котором

$$AB = 1, \quad AD_1 = \sqrt{2}, \quad BD_1 = \sqrt{3}.$$

Откуда $\sin \angle ABD_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и, следовательно,

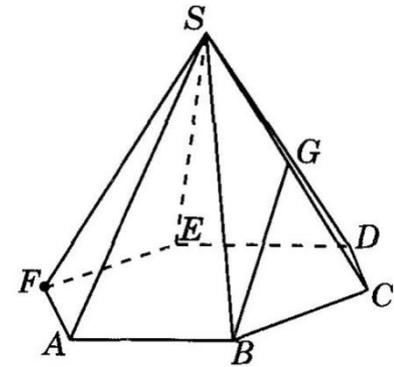
$$AH = AB * \sin \angle ABH = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



Задание 4.3

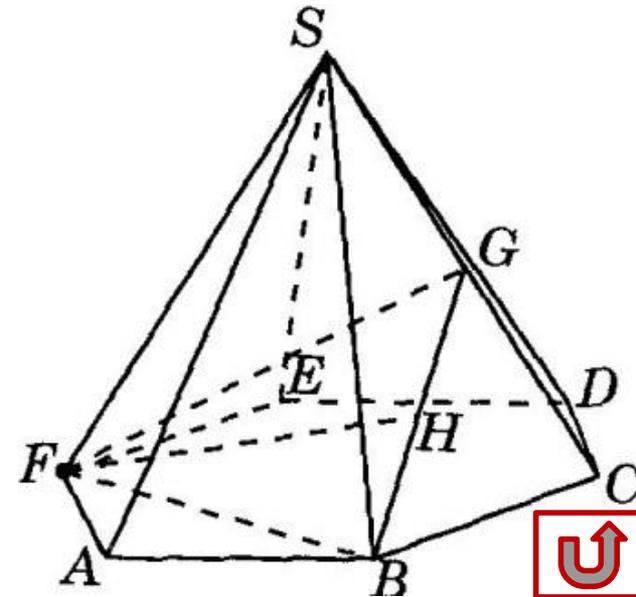
В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BG , где G — середина ребра SC .



Решение:

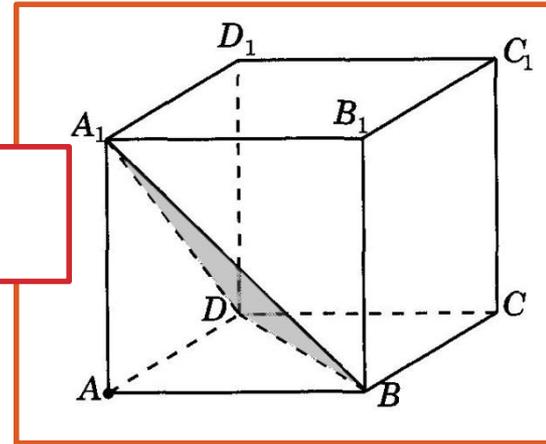
Искомое расстояние от точки F до прямой BG равно высоте FH треугольника FBG , в котором $FB = FG = \sqrt{3}$, $BG = \frac{\sqrt{6}}{2}$. По теореме Пифагора находим $FH = \frac{\sqrt{42}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{42}}{4}$.



Задание 5.1

В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1 .



Первое решение.

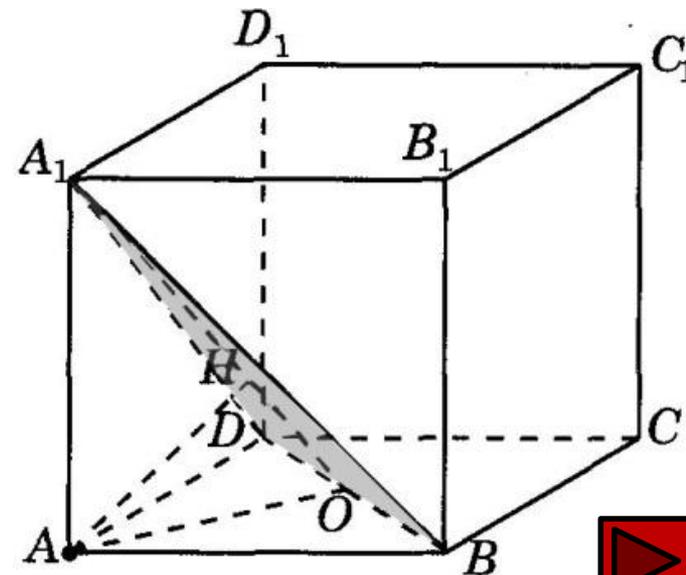
Пусть O — середина отрезка BD . Прямая BD перпендикулярна плоскости AOA_1 . Следовательно, плоскости BDA_1 и AOA_1 перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDA_1 , является высота AH прямоугольного треугольника AOA_1 , в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Для площади S этого треугольника имеют место равенства

$$2S = AO * AA_1 = OA_1 * AH.$$

Откуда находим $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Второе решение.

Пусть O — середина отрезка BD . Прямая BD перпендикулярна плоскости AOA_1 . Следовательно, плоскости BDA_1 и AOA_1 перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDA_1 является высота AH прямоугольного треугольника AOA_1 в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Треугольники AOA_1 и HOA подобны по трем углам. Следовательно, $AA_1 : OA_1 = AH : AO$.

Откуда находим $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Третье решение.

Пусть O — середина отрезка BD . Прямая BD перпендикулярна плоскости AOA_1 . Следовательно, плоскости BDA_1 и AOA_1 перпендикулярны. Искомым перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDA_1 , является высота AH прямоугольного треугольника AOA_1 в котором

$$AA_1 = 1, \quad AO = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Откуда $\sin \angle AOA_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и, следовательно,

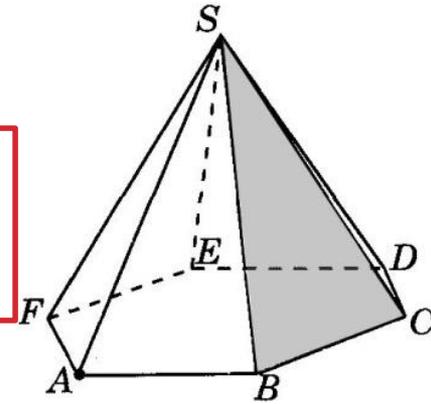
$$AH = AO * \sin \angle AOH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Задание 5.2

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости SBC .



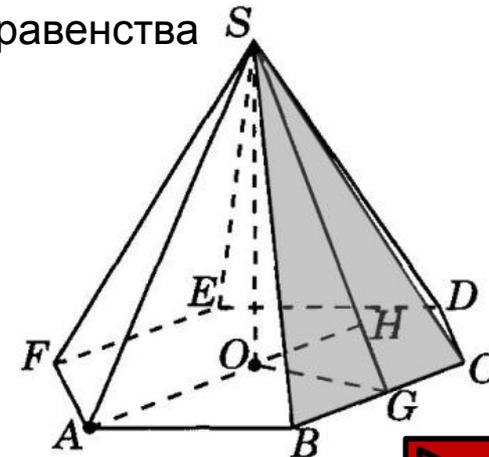
Первое решение.

Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая AO параллельна прямой BC и, значит, параллельна плоскости SBC . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости SBC . Пусть G — середина отрезка BC . Тогда прямая OG перпендикулярна BC и искомым перпендикуляром, опущенным из точки O на плоскость SBC ,

является высота OH прямоугольного треугольника SOG . В этом треугольнике $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $SO = \sqrt{3}$. Для площади S этого треугольника имеют место равенства

$2S = OG * SO = SG * OH$. Откуда находим $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$.



Второе решение.

Пусть O — центр основания пирамиды. Прямая AO параллельна прямой BC и, значит, параллельна плоскости SBC . Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию от точки O до плоскости SBC . Пусть G — середина отрезка BC . Тогда прямая OG перпендикулярна BC и искомым перпендикуляром, опущенным из точки O на плоскость SBC , является высота OH прямоугольного треугольника SOG . В этом треугольнике

$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad SG = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad SO = \sqrt{3}.$$

Треугольники SOG и OHG подобны по трем углам. Следовательно, $SO : SG = OH : OG$.

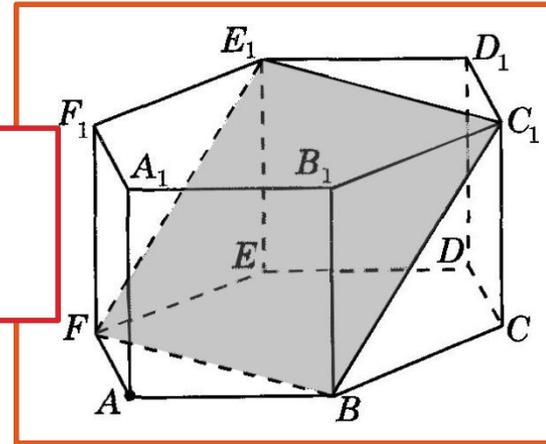
Откуда находим $OH = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.



Задание 5.3

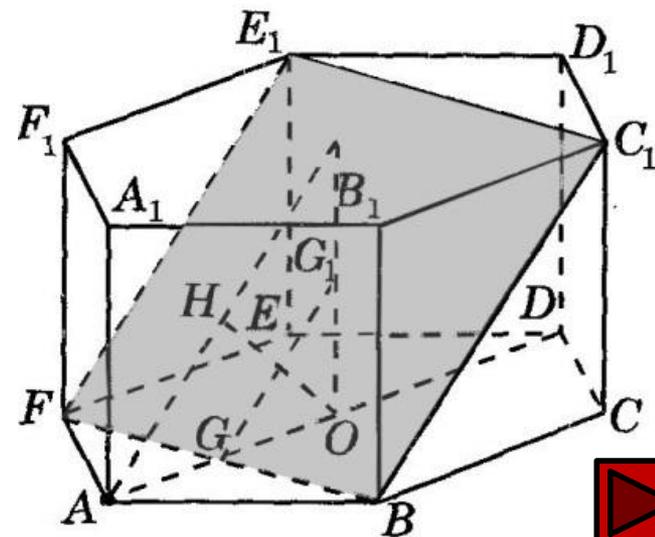
В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$; все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1 .



Первое решение.

Пусть O и O_1 — центры оснований призмы. Прямая AO_1 параллельна плоскости BFE_1 и, следовательно, расстояние от точки A до плоскости BFE_1 равно расстоянию от прямой AO_1 до плоскости BFE_1 . Плоскость AOO_1 перпендикулярна плоскости BFE_1 и, следовательно, расстояние от прямой AO_1 до плоскости BFE_1 равно расстоянию от прямой AO_1 до линии пересечения GG_1 плоскостей AOO_1 и BFE_1 . Треугольник AOO_1 прямоугольный, $AO = OO_1 = 1$, GG_1 — его средняя линия. Следовательно, расстояние между прямыми AO_1 и GG_1 равно

половине высоты OH треугольника AOO_1 т. е. равно $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

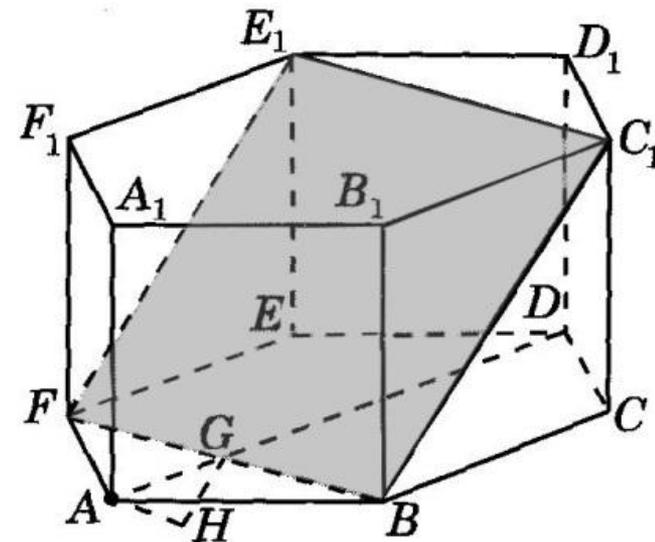


Второе решение.

Пусть G —точка пересечения прямых AD и BF . Угол между прямой AD и плоскостью BFE_1 равен углу между прямыми BC и BC_1 и равен 45° . Перпендикуляр AH , опущенный из точки A

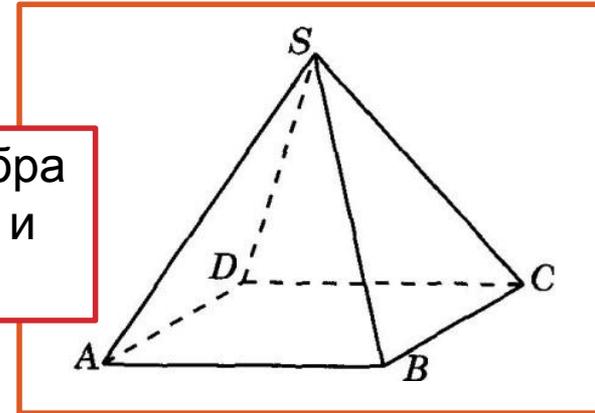
на плоскость BFE_1 , равен $AG \cdot \sin 45^\circ$. Так как $AG = 0,5$, то $AH = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.



Задание 6.1

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC .



Решение.

Прямая BC параллельна плоскости SAD , в которой лежит прямая SA . Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости SAD .

Пусть E и F соответственно середины ребер AD и BC . Тогда искомым перпендикуляром будет высота FH треугольника SEF . В треугольнике SEF имеем:

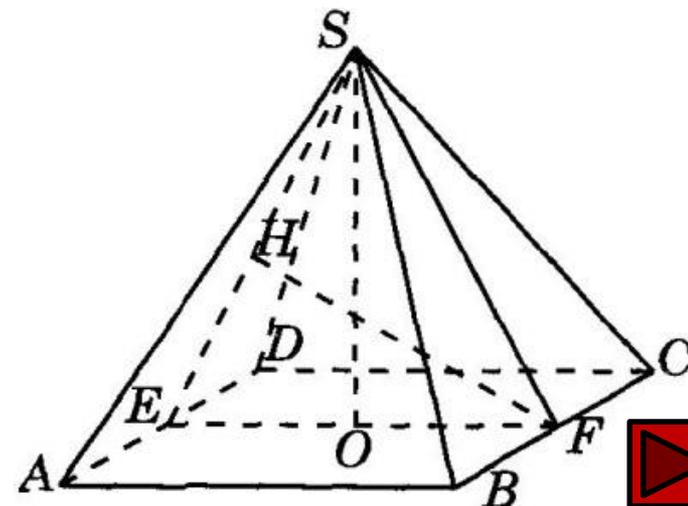
$$EF = 1, \quad SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

высота SO равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Для площади S треугольника SEF имеют место равенства

$$2S = EF * SO = SE * FH,$$

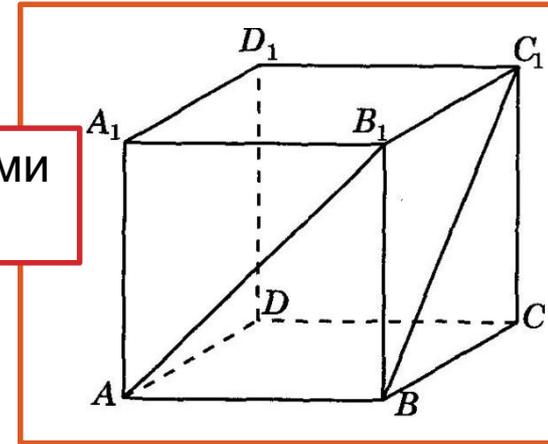
из которых получаем $FH = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



Задание 6.2

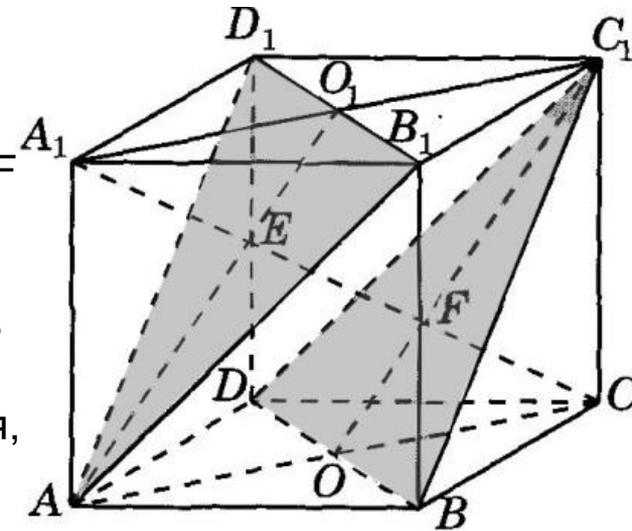
В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 .



Решение.

Плоскости AB_1D_1 и BDC_1 , в которых лежат данные прямые, параллельны. Следовательно, расстояние между этими скрещивающимися прямыми равно расстоянию между соответствующими плоскостями.

Диагональ CA_1 куба перпендикулярна этим плоскостям. Обозначим E и F точки пересечения диагонали CA_1 соответственно с плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 . Длина отрезка EF будет равна расстоянию между прямыми AB_1 и BC_1 . Пусть O и O_1 соответственно центры граней $AHCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба. В треугольнике ACE отрезок OF параллелен AE и проходит через середину AC . Следовательно, OF — средняя линия треугольника ACE и, значит, $EF = FC$. Аналогично доказывается, что O_1E — средняя линия треугольника $A_1C_1F_1$ и, значит, $A_1E = EF$. Таким образом, EF оставляет одну треть диагонали CA_1



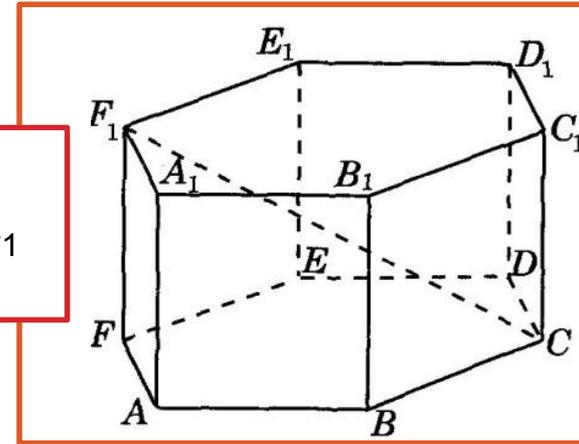
$$\text{т.е. } EF = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Задание 6.3

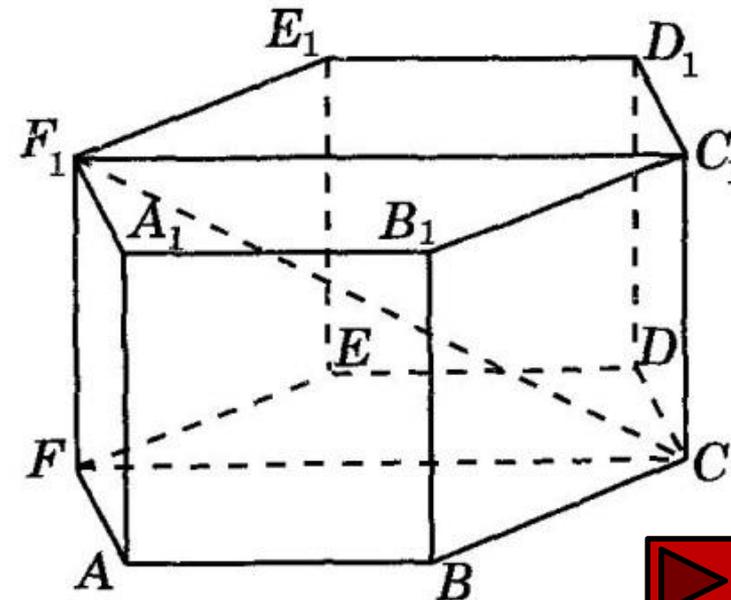
В правильной шестиугольной призме $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и CF_1 .



Решение.

Расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и CF_1 равно расстоянию между параллельными плоскостями ABB_1 и CFF_1 , в которых лежат эти прямые. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



The End