Замыкание множества. Оператор замыкания

Выполнил Фрост Марк

Определение 1

- Точка x_0 топологического пространства X называется **точкой прикосновения** множества M, если любая окрестность этой точки имеет с множеством M непустое пересечение

Определение 2

- Совокупность всех точек прикосновения множества М называется **замыканием** множества М и обозначается $\overline{M}$. Операция присоединения к множеству всех его точек прикосновения называется **операцией замыкания**.

<u>Пример</u>
В метрическом пространстве замыканием открытого шара является замкнутый шар

Теорема I (свойства операции замыкания)

- 1. $M \subset \overline{M}$;
- 2. Если $M \subset N$ то $\overline{M} \subset \overline{N}$(монотонность операции замыкания);
- 3.$M=\overline{M}$(множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием);
- 4.$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

Док-во

- 1)Первое свойство вытекает непосредственно из определения, действительно пусть $\forall\, x_0 \in$ M и произвольная окрестность этой точки $U(x_0\ ) \cap \mathrm{M} \supset \{x_0\} \neq \emptyset$, что означает что точка x_0 является точкой прикосновения множества M.

2) Пусть $\forall$ a $\in \overline{M} \Rightarrow \forall\, U$ (a) $\cap$ M$\neq \emptyset$, т.к. M $\subset$ N то U(a)$\cap$N $\neq \emptyset$ следовательно a $\in \overline{N} \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$

Док-во

3) В силу свойств 1 и 2 $M \subset \bar{M} \Rightarrow \bar{M} \subseteq \bar{\bar{M}}$. Докажем противоположное включение, т.е. $\bar{\bar{M}} \subset \bar{M}$. Пусть b $\forall \in \bar{\bar{M}}$ это означает, что произвольная окрестность точки b имеет с множеством $\bar{M}$ непустое пересечение, т.е.

$$\forall U(b) \cap \bar{M} \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \exists c \in U(b) \\ c \in \bar{M} \end{cases} \Rightarrow U(b) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow b \in \bar{M},$$

последнее означает, что $\bar{\bar{M}} \subset \bar{M}$.

4)Рассмотрим произвольные множества M и N. Имеют место очевидные включения $\begin{cases} M \subset M \cup N \\ N \subset M \cup N \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{M} \subset \overline{M \cup N} \\ \bar{N} \subset \overline{M \cup N} \end{cases} \Rightarrow \bar{M} \cup \bar{N} \subset \overline{M \cup N}$$

С другой стороны $\begin{cases} M \subset \bar{M} \\ N \subset \bar{N} \end{cases} \Rightarrow M \cup N \Rightarrow \bar{M} \cup \bar{N} \Rightarrow \overline{M \cup N} \subset \overline{\bar{M} \cup \bar{N}}$

Теорема 2

- Множество М топологического пространства Х, замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием $\overline{M}$.

Необходимость. Пусть М замкнуто, тогда G=X\M открыто. Докажем, что $\overline{M}$ ⊂ M , т.е. каждая точка прикосновения принадлежит М. Пусть. Так как множество G открытое, то оно является окрестностью каждой своей точки, следовательно существует окрестность $U(x_0)$⊂ G . Тогда $U(x_0)$ ⋂M = ∅. Следовательно точка x_0 не является точкой прикосновения множества М. Следовательно $\overline{M}$ ⊂ M . Ранее было доказано M ⊂ $\overline{M}$, следовательно M = $\overline{M}$.

- Достаточность. Пусть М = $\overline{M}$ докажем, что G=X\M является открытым множеством, а потому М - замкнуто. Пусть произвольная точка $x_0 \in$ G⇒ $x_0 \notin \overline{M}$. Так как М = $\overline{M}$ то $x_0 \notin \overline{M}$ т.е. не является точкой прикосновения множества М. Следовательно существует такая окрестность этой точки, которая не пересекается с множеством М.
- Мы получили, что множество G=X\M является окрестностью каждой своей точки. Следовательно G - отрыто, а М – замкнуто
- Следствие. Замыкание $\overline{M}$ множества М из пространства Х является замкнутым множеством в топологическом пространстве Х.

Теорема 3

- Замыкание любого множества М пространства Х совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих М.

Док-во

- Пусть M произвольное множество топологического пространства X и N=$\bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha}$, где пересечение происходит по всем замкнутым множествам, содержащим множество M. По построению множества N оно является замкнутым и является подмножеством любого замкнутого множества, содержащего M, в частности, является подмножеством $\bar{M}$, т.к. это множество замкнуто и содержит M. Таким образом N $\subset \bar{M}$.

  Докажем обратное включение. Для этого возьмем произвольное замкнутое множество F⊃M. Так как для замкнутого множества F =$\bar{F}$ из монотонности операции замыкания получим M⊂F ⇒ $\bar{M} \subset \bar{F}$= F . Таким образом, замыкание $\bar{M}$ содержится в каждом замкнутом множестве F, содержащим M, следовательно $\bar{M}$ будет содержаться и в пересечении таких множеств, т.е. $\bar{M} \subset$ N . Два противоположные включения означают, что множества равны т.е. $\bar{M}$ = N